

DER ENDLICHKEITSSATZ VON DELIGNE

OBERSEMINAR IM WINTERSEMESTER 2012

INHALT

Pierre Deligne stellte in Weil II [Del80, Conj. 1.2.10] folgende Vermutung auf:

Vermutung 1. *Sei X ein normales, zusammenhängendes Schema vom endlichen Typ über einem endlichen Körper der Charakteristik p , $\ell \neq p$ und \mathcal{V} eine irreduzible, glatte $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe auf X vom Rang r und mit einer Determinante von endlicher Ordnung. Dann gilt:*

- (1) \mathcal{V} hat Gewicht 0.
- (2) *Es gibt einen Zahlkörper $E(\mathcal{V}) \subset \bar{\mathbb{Q}}_\ell$, der alle Koeffizienten der lokalen charakteristischen Polynome $\det(1 - tF_x : \mathcal{V}_x)$ enthält. Dabei läuft x durch die abgeschlossenen Punkte von X und F_x ist der geometrische Frobenius am Punkt x .*
- (3) *Für jedes $\ell' \neq p$ gibt einen ℓ' -Begleiter zu \mathcal{V} , d. h. eine irreduzible, glatte $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ -Garbe \mathcal{V}' mit denselben lokalen charakteristischen Polynomen.*

Im Falle, dass X eine glatte Kurve ist, ist dies eine Konsequenz aus der geometrischen Langlands-Korrespondenz für GL_r . Ziel des Seminars ist es, zu zeigen, dass aus diesem Fall die Gültigkeit der Vermutung für alle glatten Schemata folgt. Im Zentrum steht dabei der folgende Endlichkeitssatz von Deligne:

Theorem 2. *Es gibt bis auf Twists nur endlich viele irreduzible, glatte $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garben auf X vom Rang r mit einer geeignet beschränkten Verzweigung im Unendlichen.*

Für den Beweis des Endlichkeitssatzes und für Teil (1) und (2) benutzen wir den Artikel [EK12] von Esnault und Kerz als Quelle. Teil (3) wird in dem Artikel [Dri12] von Drinfeld bewiesen.

ZEIT UND ORT

Di, 11 – 13 Uhr, INF 288, HS 4.

KONTAKT

Dr. Malte Witte,
INF 288, Raum 109
witte@mathi.uni-heidelberg.de,
Tel. +49-6221-54-5642

VORTRAGSVERGABE

Für Vorträge 2 und 3 kann man sich schon im Vorfeld bei mir bewerben. Der Rest wird beim ersten Veranstaltungstermin am Dienstag, 16.10.2012, verteilt.

VORTRÄGE

Vortrag 1: Vorstellung des Themas

(16.10.12)

Formulierung der Hauptresultate, Überblick über den Beweis, Anwendung auf relative Chow-Gruppen [EK12, §1,2]. Anschließend Vortragsvergabe.

Vortrag 2: Weil-Garben

(23.10.12)

Eine knappe Wiederholung der Definition von $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garben und Weil-Garben, sowie von Gewichten und Reinheit in dem Umfang, den wir später brauchen [KW01, §I.1–I.3], [Del80, §1.1–1.3]; außerdem der Inhalt von [EK12, §4.1] und zumindest eine Beweisskizze für [EK12, Prop. 4.2, Prop. 4.3].

Vortrag 3: Verzweigungstheorie

(30.10.12)

Einführung des Swan-Führers und der Weil-Garben mit beschränkter Verzweigung [EK12, §3]. Der Abschnitt §3.1 ist recht knapp gehalten. Nähere Erläuterungen findet man in [Mil80, §V.2] und [Lau87, §2.2]. Der Beweis von [EK12, Lemma 3.8] sollte ergänzt werden. Den Zusammenhang mit der Verzweigungstheorie von Abbes-Saito lassen wir weg.

Vortrag 4: Folgerungen aus der Langlands-Korrespondenz

(06.11.12)

Wir akzeptieren ohne Beweis, dass aus der Langlands-Korrespondenz die Gültigkeit der Vermutung 1 und der Satz 2 im Kurvenfall folgt. Daraus erhalten wir Resultate für höherdimensionale Schemata [EK12, §4.2]. Dazu müssen wir die Existenz einer gewissen Kurve beweisen [EK12, Anhang B].

Vortrag 5: Frobenii auf Kurven

(13.11.12)

Ziel ist es, eine effektive Schranke N anzugeben, so dass eine Weil-Garbe mit vorgegebenen Rang und beschränkter Verzweigung schon durch die lokalen charakteristischen Polynome für Punkte vom Grad kleiner als N eindeutig bestimmt ist [EK12, §5]. Wir brauchen dazu noch [EK12, Prop. 4.11, Prop. 4.12]. Bei Prop. 4.11 sollte zumindest erklärt werden, warum sie aus der angegebenen Referenz folgt. Prop. 4.12 folgt eigentlich schon durch eine elementare Rechnung.

Vortrag 6: Modulräume von Weil-Garben I

(20.11.12)

Wir brauchen zunächst einige Vorüberlegungen, wie man in einem großen affinen Schema affine Schemata vom endlichen Typ erkennt [EK12, Anhang A]. Dann soll der Modulraum im Kurvenfall konstruiert werden [EK12, §6.1–6.2].

Vortrag 7: Modulräume von Weil-Garben II

(27.11.12)

Konstruktion des Modulraums im allgemeinen Fall [EK12, §6.3]. Dazu brauchen wir das geometrische Resultat [Ked05, Thm. 1], das ebenfalls vorgestellt werden soll.

Vortrag 8: Endlichkeitssatz und ℓ' -Begleiter

(04.12.12)

Im ersten Teil des Vortrags soll der Beweis des Endlichkeitssatzes zuende geführt werden [EK12, §7]. Im zweiten Teil geht es um die ersten Reduktionsschritte des Beweises der Existenz von ℓ' -Begleitern [Dri12, §2.2 – 2.4]. Der wesentliche Schritt dabei ist, das Bild der $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garben im Raum der lokalen charakteristischen Polynome zu beschreiben [Dri12, Thm. 2.5]. Wir beschränken uns dabei auf glatte Schemata über endlichen Körpern. Die Beschreibung in [Dri12, §2.1] ist unnötig kompliziert. Stattdessen benutzen wir [EK12, §4.1]. In [Dri12, Thm. 2.5] und auch später bleibt etwas unklar, was man unter Morphismen $C \rightarrow X$ verstehen soll. Ich denke, gemeint ist eigentlich die Normalisierung einer Kurve auf X wie in [EK12, §4.1].

Vortrag 9: Hilbert-Irreduzibilität

(11.12.12)

Ziel ist der Beweis von einer Version von Hilbert-Irreduzibilität, siehe [Dri12, §2.5-2.6, Anhang A]. Wir können uns wieder auf den Fall glatter Schema über endlichen Körpern beschränken.

Vortrag 10: Das Bild der der $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garben I

(18.12.12)

Die Bedingungen aus [Dri12, Thm. 2.5] beschreiben eine $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe auf einem offenen dichten Teilschema von X [Dri12, §3-4]. Lemma 4.3 sollte sich auch als ein Spezialfall von [EK12, Thm. 5.1] auffassen lassen.

Vortrag 11: Das Bild der der $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garben II

(07.01.13)

Wenn lokale charakteristische Polynome auf jeder Kurve auf X und auf einem offenen dichten Teilschema von X von einer $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garbe kommen, dann auch auf ganz X [Dri12, §5]. Ferner sollen die Gegenbeispiele behandelt werden, die zeigen, dass Theorem 2.15 nicht gelten muss, wenn man nur annimmt, dass X normal ist [Dri12, §6].

LITERATUR

- [Del80] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 52, 137–252.
- [Dri12] V. Drinfeld, *On a conjecture of Deligne*, Moscow Math. J. **12** (2012), no. 3.
- [EK12] H. Esnault and M. Kerz, *A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne)*, Preprint, arXiv:1208.0128v1, 2012.
- [Ked05] K. Kedlaya, *More étale covers of affine spaces in positive characteristic*, J. Algebraic Geom. **14** (2005), no. 1, 199–214.
- [KW01] R. Kiehl and R. Weissauer, *Weil conjectures, perverse sheaves and l’adic Fourier transform*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 42, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Lau87] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d’équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1987), no. 65, 131–210.
- [Mil80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, no. 33, Princeton University Press, New Jersey, 1980.