Prof. Dr. K. Wingberg, PD Dr. A. Schmidt Dr. O. Venjakob

Die Regulatoren von Borel und Beilinson

Seminar

Beginn: 14.10.03 **Raum:** M HS 4 **Zeit:** Di. 11-13 Uhr

Das Ziel dieses Seminars besteht darin, zu verstehen, warum Borels (neu normalisierte) Regulatorabbildung r_{Bo} sich genau oder vielmehr lediglich um den Faktor 2 von Beilinsons Regulatorabbildung r_{Be} unterscheidet:

$$r_{\mathrm{Bo}} = 2r_{\mathrm{Be}}.$$

Borels Regulator R'_{Bo} (das Kovolumen des Bildes der Regulatorabbildung) stellt eine direkte Verallgemeinerung des Dirichlet Regulators R_{D} eines Zahlkörpers k auf höhere K-Gruppen $K_{2n-1}(\mathcal{O})$ des Ganzheitsringes $\mathcal{O}$ von k für $n \geq 2$ dar; aus der Klassenzahlformel für die Zeta-Funktion ζ_k eines Zahlkörpers k an der Stelle $s = 0$ (dies ist der Fall $K_1(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^\times$)

$$R_{\mathrm{D}} = -\frac{\#\mu(k)}{\#Cl(k)}\,\zeta_k^*(0),$$

wobei $\zeta^*(s)$ den Leitkoeffizienten an der Stelle s bezeichnet, wird Lichtenbaums Vermutung

$$R'_{\mathrm{Bo}} = \pm\frac{\#K_{2p-1}(\mathcal{O})_{\mathrm{tor}}}{\#K_{2p-2}(\mathcal{O})}\,\zeta_k^*(-p+1)$$

für alle natürliche Zahlen $p \geq 2$ (d.h. p ist hier i.a. *keine* Primzahl!). Allerdings hatte schon Lichtenbaum eingeräumt, dass diese Formel eventuell um eine Potenz von π korrigiert werden müsse. Tatsächlich konnte Borel zeigen, dass der $\mathbb{Z}$-Rang $d_p := \mathrm{rk}K_{2p-1}(\mathcal{O})$ die genaue Nullstellenordnung von ζ_k bei $1-p$ ist und dass R'_{Bo} sich höchstens um einen rationalen Faktor ungleich 0 von

$$\pi^{d_p}\,\zeta_k^*(1-p)$$

unterscheidet. Beilinson verallgemeinerte den Begriff des Regulators und stellte allgemeine Vermutungen über die Beziehungen dieser Regulatoren zu speziellen Werten von L-Funktionen im Kontext von Motiven auf. Der angestrebte Vergleich beider Regulatoren führt dann zu einem Beweis von Beilinson's Vermutung im Zahlkörperfall, d.h.

$$R_{\mathrm{Be}}^{-1}\zeta_k^*(1-p) \text{ liegt in } \mathbb{Q}^\times.$$

Das Seminar folgt weitestgehend dem Buch [2], alle Referenzen beziehen sich - soweit nicht anders vermerkt - darauf. Ein Blick in [4], [5] oder die jeweilige Originalliteratur ist sicherlich hilfreich/notwendig.

1. Vortrag: **Einführung ins Thema und Vortragsvergabe**

Teil A - Der Borel Regulator

2. Vortrag: **1. Definition des Borel Regulators**

Zuerst soll die Definition von primitiven und unzerlegbaren Elementen von Hopf-Algebren in Erinnerung gerufen werden [2, Definition 3.6 + Ex. 3.7], dann soll Theorem 3.17 loc. cit. angewendet werden, um zu sehen, dass die rationale Hurewicz Abbildung einen Isomorphismus der rationalen K-Theorie $K_m(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}$ in den Vektorraum der primitiven Elemente $P_m(GL(\mathcal{O}),\mathbb{Q})$ von $H_m(GL(\mathcal{O}),\mathbb{Q})$ induziert, wobei $\mathcal{O}$ wie oben den Ganzheitsring des Zahlkörpers k bezeichne. Nun soll § 9.2 vollständig präsentiert werden; die Definition des Borel-Regulators benutzt (stetige) Gruppenkohomologie, daher müssen zur Vorbereitung aus §6.2 und §6.3 der van Est Isomorphismus (einschließlich der Definition. relativer Lie-Algebren-Kohomologie 5.38 mit Beispiel 5.39) und die Abbildung (6.2) erläutert werden (für letztere Konstruktion könnte der Struktursatz (Theorem 5.3) über komplexe reduktive Gruppen hilfreich sein). Schließlich zitiere man Theorem 6.5, um Definition 9.4 zu rechtfertigen, bevor die Ergebnisse über arithmetische Gruppen 9.5-9.8 besprochen werden.

3. Vortrag: **Die Kohomologie der GL_n**, [2, §4.1-4.4]

Die (singuläre) Kohomologie $H^*(GL_n(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \cong H^*(U_n),\mathbb{Z})$ der Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ (U_n bezeichnet die unitäre Gruppe) sowie $H^*(B.GL(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ ihres klassifizierenden Raumes $B.GL(\mathbb{C})$ spielt mittels der Hurewicz-Abbildung eine wichtige Rolle für den Borel-Regulator, [2, §4.1,§4.2] (Ergebnisse aus §3.3/3.4 über Hopfalgebren müssen nach Bedarf hinzugezogen werden). Die Beziehung untereinander wird durch die Suspensions-Abbildung $\mathfrak{s}$ beschrieben, deren genaues Verständnis für den Vergleich der beiden Regulatoren unverzichtbar ist (§4.3). Es wird sich später herausstellen, dass sich beide Regulatoren eindeutig mittels (universeller) Chern-Klassen/-Charaktere beschreiben lassen, §4.4.

4. Vortrag: **Bott-Periodizität, Borel's Theorem über den Rang von $K_m(\mathcal{O})$ und Werte von Zeta-Funktionen**

Die Folgerungen aus Botts Periodizitäts-Satz bzgl. der stabilen Homotopie der $GL(\mathbb{C})$ (§4.5,§4.6) ermöglicht die Bestimmung der Ränge von $K_m(\mathcal{O})$ (Borel, Theorem 9.9, siehe auch [1, ex. 3.4.1, prop. 3.4.2 sowie Theorem 4.3.2]). Der Zusammenhang zwischen Borel-Regulator und Leitkoeffizienten der Dedekindschen Zeta-Funktion von k an den negativen ganzen Zahlen (Lichtenbaum-Vermutung) soll kurz diskutiert werden, §4.5 (vielleicht mit einer Erinnerung an die Klassenzahlformel). Damit der Borel-Regulator über die K-Theorie von $\mathbb{C}$ faktorisiert, muß er umnormalisiert werden, § 9.5.

5. Vortrag: **Borel Elemente**

In diesem Vortrag ist zu zeigen, dass der Borel-Regulator eindeutig (§9.6) und explizit (§9.7) durch die Borel-Elemente Bo_p, d.h. die Bilder der Komponenten ch_p des Chern-Charakters in der stetigen Kohomologie $H^{2p-1}_{cont}(GL(\mathbb{C}),\mathbb{R}(p-1))$, bestimmt ist. Dazu wird letztere Gruppe in die Lie-Algebren-Kohomolgiegruppe

$H^{2p-1}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}(p-1))$ eingebettet und ein Repräsentant von Bo_p in $E^{2p-1}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}(p-1))$, der Gruppe der linksinvarianten reellwertigen $(2p-1)$-Differentialformen auf $GL_n(\mathbb{C})$, konstruiert. Hierzu sind Vorarbeiten (oder Nacharbeiten) (§5.3-§5.4) erforderlich, insbesondere wird der Chern-Weil Homomorphismus (5.19, Theorem 5.23, 5.30) benötigt sowie charakteristische Klassen in der de Rham Kohomologie (prop. 5.27), um die Suspension aus Vortrag 3 mit Hilfe der Weil-Algebra auszurechnen, 5.32/5.34. Letztlich konzentriert sich alles auf Beispiel 5.37.

Teil B - Der Beilinson Regulator

6. Vortrag: Der Beilinson Regulator als Chern Charakter in die Deligne-Kohomologie

Als erstes benötigen wir einen Crash-Kurs in Deligne-Beilinson (kurz: Deligne-) Kohomologie gemäß §10.1 und für simpliziale Schemata §10.2, siehe auch [4] §3.2, insbesondere zur Motivation der Zusammenhang mit L-Funktionen prop. 3.2.1/3.2.3 sowie Ex. 3.2.9. Danach erhalten wir mittels Gillets Theorie (Theorem 2.2 in [3], [4, §4.6 bis Definition 4.6.2] Chern-Charaktere aus der höheren K-Theorie (in unserem Fall von $X = spec\mathcal{O}$) in die Deligne-Kohomologie. Über die Adams-Operation ([4, §4.2]) wird die *absolute* oder *motivische* Kohomologie von X aus der rationalen K-Theorie von X extrahiert ([4, Definition 4.7.1]). Gemäß Soulés Theorem 4.5.1 loc. cit. sowie Gillet's Theorem gibt es auch einen Chern-Charakter in die motivische Kohomologie (der nach Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ die Zerlegung von $K(X)_{\mathbb{Q}}$ in die Adams-Eigenräume darstellt). Der Beilinson-Regulator ist nun die Realisierungsabbildung von motivischer Kohomologie in die *absolute Hodge Kohomologie*, auf dessen Definition wir hier verzichten können, da Hodge- und Deligne-Kohomologie für unser Schema X gleichbedeutend sind. Im wesentlichen stimmt der Regulator also mit dem Chern-Charakter überein. Im Falle unseres Zahlkörpers läßt sich diese Abbildung durch Spezialisierung explizit beschreiben: §10.3 bis Definition. 10.8 einschließlich, vgl. auch §5.2 in [4], sowie Schneiders Artikel im Beilinson-Band [5] oder Soulés Bourbaki-Artikel [6] (die Rechtschreibprüfung wollte daraus "Barbarei-Artikel" machen).

Teil C - Der Vergleich

7. Vortrag: Höhere Diagonalen und Differentialformen

Ziel ist der Beweis von Theorem 8.4, welches eine Beschreibung der Differentialgarbe $\Omega^{\bullet}_{X/k}$ für reguläre Schemata X über einem Körper k liefert, und zwar als Strukturgarbe eines gewissen simplizialen Schemas modulo einer Idealgarbe (dies verallgemeinert die Beschreibung der 1-Formen als Ideal der Diagonalen modulo seinem Quadrat). Diese Beschreibung ist die Hauptidee/zutat für den angestrebten Vergleich. Vorab ist Kapitel 7, insbesondere Lemma 7.5 und Prop. 7.7 zu behandeln, dann §8.1.

8. Vortrag: **Beilinson Elemente versus Borel Elemente**

In Fortführung von Vortrag 7 wird zuerst gezeigt, dass die gewonnene Beschreibung der Differentialformen eine neue, gemeinsame und für den anstehenden Vergleich entscheidende Interpretation des Chern-Weil Morphismus (§8.2) sowie des van Est Isomorphismus (§8.3) liefert, die nah an der Konstruktion der Deligne-Kohomologie dran ist. Dann werden Beilinson Elemente Be_p (§10.3 nach Definition 10.8) eingeführt, wiederum als Bilder der Komponenten des Chern Charakters in derselben stetigen Kohomologiegruppe wie oben für den Borel Regulator. Diese legen den Beilinson Regulator eindeutig fest. Um nun zu zeigen, dass $Bo_p = 2Be_p$ (Theorem 10.9) gilt, kommt die soeben entwickelte Maschinerie zum Einsatz.

References

[1] S. J. Bloch, *Higher Regulators, Algebraic K-theory, and Zeta Functions of Elliptic Curves*, CRM monograph series, vol. 11, AMS, 2000.

[2] J. I. Burgos Gil, *The Regulators of Beilinson and Borel*, CRM monograph series, vol. 15, AMS, 2002.

[3] H. Gillet, *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. Math. 40 (1981), 203-289.

[4] W. W. J. Hulsbergen, *Conjectures in Arithmetic Algebraic Geometry* , Aspects of Mathematics , vol. E 18, Vieweg, 1994.

[5] M. Rapoport, N. Schappacher, P. Schneider (eds.), *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Academic Press (1988)

[6] C. Soulé, *Regulateurs*, Seminaire Bourbaki 644 (fevrier 1986), Asterique 133-134, SMF(1986), 237-253.