

Zwischen Flexibilität und Starrheit Gruppenhomomorphismen und geometrische Strukturen

von Anna Wienhard

In seiner Antrittsvorlesung im Jahre 1872 formulierte Felix Klein mit dem „Erlanger Programm“ die wesentliche Bedeutung der Gruppentheorie zum Studium geometrischer Räume. Überschneidungen der bis heute durchaus verschiedenen Forschungsgebiete Geometrie und Gruppentheorie ergeben sich dort, wo sich geometrische Probleme in die Sprache von Gruppenhomomorphismen übersetzen lassen. Ein Beispiel hierfür soll im folgenden vorgestellt werden.

In der geometrischen Gruppentheorie werden Gruppen mittels geometrischer Methoden untersucht. Eine grundlegende Idee dabei ist, nicht nur die Gruppe, sondern auch ihre Wirkungen auf Mannigfaltigkeiten oder metrischen Räumen zu betrachten. Diese Wirkungen sind gegeben durch Gruppenhomomorphismen. Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow G$ ist eine Abbildung zwischen zwei Gruppen Γ und G , welche die Gruppenmultiplikation respektiert: $\phi(h_1 \cdot h_2) = \phi(h_1)\phi(h_2)$. Die Wirkung einer Gruppe Γ mittels Isometrien auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit X ist beispielweise gegeben durch einen Homomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow G$ in die Isometriegruppe $G = \text{Isom}(X)^\circ$ von X . Wichtige geometrische Eigenschaften der durch ϕ definierten Wirkung lassen sich in Eigenschaften des Gruppenhomomorphismus übersetzen und umgekehrt. So sind beispielsweise die Eigenschaften, dass Γ mittels ϕ auf dem Raum X *frei* und *eigentlich diskontinuierlich* wirkt, d. h. dass nur die Identität einen Fixpunkt hat und dass jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ nur endlich viele ihrer Bilder unter Γ schneidet, oftmals äquivalent dazu, dass der Homomorphismus ϕ injektiv und das Bild $\phi(\Gamma)$ diskret ist.

Zahlreiche geometrische Strukturen Riemannscher Mannigfaltigkeiten lassen sich auf diese Weise durch Gruppenhomomorphismen kodieren. Im allgemeinen ist es jedoch sehr schwierig, einem gegebenen Gruppenhomomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow G$ anzusehen, welche

geometrischen Strukturen er beschreibt, und welche Informationen in ihm über die Strukturen der Gruppen Γ und G enthalten sind. Mittels Invarianten, die einem Homomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow G$ zugeordnet werden, lassen sich Klassen von Homomorphismen auszeichnen, die interessante geometrische Strukturen beschreiben, und Homomorphismen sogar eindeutig bestimmen.

Wichtige Beispiele für das Zusammenspiel von geometrischen Strukturen auf Mannigfaltigkeiten und Gruppenhomomorphismen sind Homomorphismen von Fundamentalgruppen Γ Riemannscher Mannigfaltigkeiten in halbeinfache Liegruppen G . Wesentliche Aspekte der Suche nach Invarianten werden in dem folgenden Beispiel der Homomorphismen von Flächengruppen $\phi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ deutlich.

Auf der Suche nach Invarianten für $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$

Einer Riemannschen Fläche Σ_g von Geschlecht g ist mit der Fundamentalgruppe $\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g)$ auf natürliche Weise eine endlich erzeugte Gruppe zugeordnet. Die Fundamentalgruppe ist die Menge der Homotopieklassen parametrisierter Schleifen durch einen fest gewählten Punkt $x \in \Sigma_g$. Die Gruppenoperation ist definiert indem man zwei Schleifen hintereinander durchläuft. Erzeuger der Fundamentalgruppe erhält man, indem man wie in der Abbildung 1 für jeden der

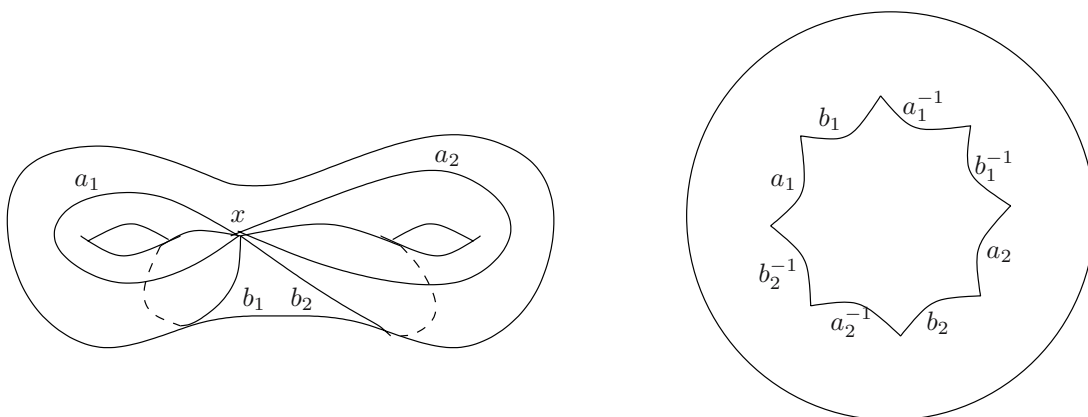


Abbildung 1. Aufgeschnittene Fläche von Geschlecht $g = 2$

g Henkel der Fläche Σ_g zwei Schleifen a_i, b_i wählt. Die Überlagerungen von Σ_g sind durch normale Untergruppen der Fundamentalgruppe bestimmt. Auf der einfach zusammenhängenden universellen Überlagerung wirkt Γ_g eigentlich diskontinuierlich durch Decktransformationen. Die Fundamentalgruppen Γ_g geschlossener orientierter Riemannscher Flächen Σ_g von Geschlecht $g \geq 2$ haben viele Gruppenhomomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow G$ in halbeinfache Liegruppen G . Man sagt deshalb auch, dass die Gruppen Γ_g flexibel sind.

Für Homomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ ist der Zusammenhang zwischen geometrischen Strukturen und Gruppenhomomorphismen wohl bekannt. Die entsprechenden geometrischen Strukturen auf Σ_g sind hierbei hyperbolische Metriken, das sind Metriken konstanter Krümmung $\equiv -1$. Eine solche Metrik kann durch die Wahl spezieller $4g$ -Ecke in der hyperbolischen Ebene beschrieben werden.

Die Fundamentalgruppe Γ_g einer geschlossenen orientierten Riemannsche Fläche Σ_g von Geschlecht g ist von $2g$ Elementen $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ erzeugt, die die Relation

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = \text{Id}$$

erfüllen. Dies sieht man, indem man einen Punkt $x \in \Sigma_g$ und $2g$ geschlossene Kurven wählt, die Σ_g in ein Polygon zerschneiden. Die Erzeuger der Gruppe entsprechen den einzelnen Seiten des Polygons, und die Relation $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = \text{Id}$ liest man entlang des Randes ab.

Versieht man Σ_g mit einer hyperbolischen Metrik, so wird die universelle Überlagerung von Σ_g mit der hyperbolischen Ebene \mathbf{H}^2 , dem Modellraum konstanter Krümmung $\equiv -1$, identifiziert. Die hyperbolische Ebene kann im Poincaré-Modell als Kreisscheibe $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, versehen mit der Metrik

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

betrachtet werden. Die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von \mathbf{H}^2 ist $\text{PSL}(2, \mathbf{R}) = \text{SL}(2, \mathbf{R})/\{\pm \text{Id}\}$, wobei $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ auf \mathbf{D} mittels gebrochenen linearen Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

wirkt.

Das $4g$ -Eck, eingebettet in die Kreisscheibe \mathbf{D} , definiert einen Fundamentalbereich für die isometrische

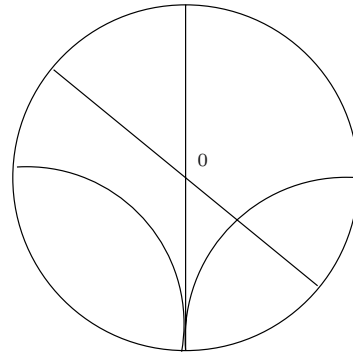


Abbildung 2. Geraden im Poincaré-Modell

Wirkung von Γ_g auf \mathbf{D} durch Decktransformationen. Diese Wirkung ist gegeben durch eine *Hyperbolisierung*, das ist ein injektiver Homomorphismus $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ mit diskretem Bild.

Die Wahl einer hyperbolischen Metrik definiert also eine Hyperbolisierung $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$. Ist umgekehrt $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ eine Hyperbolisierung, so ist die Fläche Σ_g diffeomorph zu $\mathbf{D}/\phi(\Gamma_g)$. Die hyperbolische Metrik ds^2 auf \mathbf{D} definiert eine hyperbolische Metrik auf dem Quotienten $\mathbf{D}/\phi(\Gamma_g)$ und somit auf Σ_g .

Der Modulraum aller hyperbolischen Metriken ist der Quotient des *Teichmüllerraums* der Riemannschen Fläche Σ_g modulo der Abbildungsklassengruppe von Σ_g . Der Teichmüllerraum läßt sich wie beschrieben mit dem Raum aller Hyperbolisierungen identifizieren und somit in den Raum aller Homomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ einbetten. Selbst wenn ein Homomorphismus ϕ explizit gegeben ist, läßt sich jedoch nicht ohne weiteres erkennen, ob ϕ eine Hyperbolisierung ist oder nicht, da kaum zu überprüfen ist, ob das Bild diskret ist. Mittels einer Invariante können Hyperbolisierungen allerdings auf einfache Weise ausgezeichnet werden.

Die Eulerzahl

Die Eulerzahl ordnet jedem Homomorphismus $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ eine ganze Zahl zu. Für einen Homomorphismus $\phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$, der die Erzeuger a_i, b_i auf Matrizen $A_i = \phi(a_i), B_i = \phi(b_i) \in \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ mit $\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = \text{Id}$ abbildet, berechnet man die Eulerzahl folgendermaßen. Man wählt beliebige Hochhebungen $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i \subset \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$ von A_i, B_i in der universellen Überlagerung von $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$. Das Produkt $\prod_{i=1}^g [\tilde{A}_i, \tilde{B}_i]$ liegt in derjenigen Untergruppe von $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$, die auf die Identität $\text{Id} \in \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ projiziert. Diese Untergruppe ist kanonisch isomorph zu \mathbf{Z} . Die Eulerzahl ist nun definiert als $e(\phi) := \prod_{i=1}^g [\tilde{A}_i, \tilde{B}_i] \in \mathbf{Z}$. Sie ist beschränkt durch $|e(\phi)| \leq 2g - 2$. Für Hyperbolisierungen gilt $|e(\phi)| = 2g - 2$.

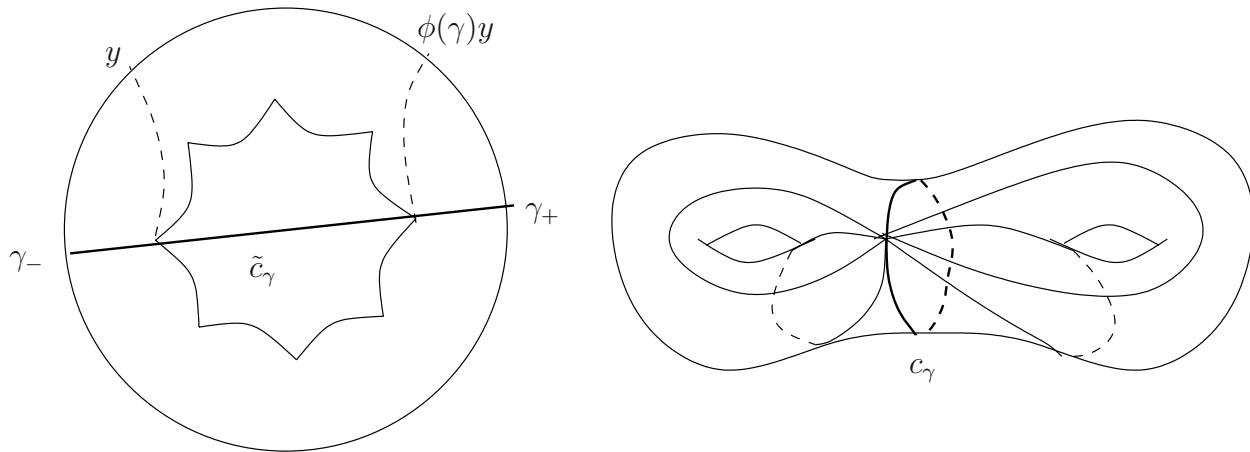


Abbildung 3. Perioden des Elements $\phi(\gamma)$ bestimmen die Länge der Geodätischen c_γ

Goldman [6] hat bewiesen, dass umgekehrt ein Homomorphismus $\phi : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ mit Eulerzahl $2g - 2$ injektiv ist und diskretes Bild hat. Die Gleichung $|e(\phi)| = 2g - 2$ zeichnet somit auf einfache Weise die Homomorphismen ϕ aus, die eine bestimmte geometrische Struktur – eine hyperbolische Metrik – auf Σ_g definieren.

Um eine Hyperbolisierung eindeutig zu bestimmen, und die dadurch definierte hyperbolische Metrik auf Σ_g zu rekonstruieren, bedarf es einer weiteren Invariante.

Das Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis ist eine $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ -invariante Funktion auf Tupeln von vier paarweise verschiedenen Punkten auf der projektiven Gerade $\mathbf{RP}^1 = S^1 \cong \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Es ist definiert durch $[x, y, z, w] := \frac{x-y}{x-w} \frac{z-w}{z-y}$, insbesondere gilt $[0, y, 1, \infty] = y$. Da vier paarweise verschiedene Punkte in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ mittels der Wirkung von $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ immer in die Form $(0, y, 1, \infty)$ gebracht werden können, bestimmt es (modulo der Wirkung von $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$) eindeutig die Lage dieser vier Punkte. Wenn $\phi : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ eine Hyperbolisierung ist, so hat die Wirkung von $\phi(\gamma)$ auf dem Rand der Kreisscheibe $S^1 = \partial \mathbf{D}$ für jedes $\gamma \in \Gamma_g \setminus \{\mathrm{id}\}$ einen anziehenden Fixpunkt $\gamma^+ \in S^1$ und einen abstoßenden Fixpunkt $\gamma^- \in S^1$. Mit Hilfe dieser Fixpunkte und eines weiteren beliebigen Punktes $y \in S^1$ lassen sich mittels des Doppelverhältnisses die Perioden $l_\phi(\gamma) := [\gamma^-, y, \phi(\gamma)y, \gamma^+]$ definieren, die unabhängig von der Wahl des Punktes $y \in S^1$ sind. Die Perioden definieren somit eine Invariante des Homomorphismus ϕ . Jedes Element $\gamma \in \Gamma_g \setminus \{\mathrm{id}\}$ läßt sich durch eine geschlossene Geodätische c_γ auf der Fläche Σ_g realisieren. Die Länge dieser Geodätischen c_γ , gemessen in der durch ϕ definierten hyperbolischen Metrik, berechnet sich als $L(c_\gamma) = \frac{1}{2} \log |l_\phi(\gamma)|$ (siehe Abbildung 3).

Die Perioden von ϕ bestimmen daher eine Hyperbolisierung $\phi : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ eindeutig.

Mittels Eulerzahl und Doppelverhältnis können so unter allen Homomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ diejenigen ausgesondert werden, die eine bestimmte geometrische Struktur, nämlich eine hyperbolische Metrik auf der Fläche Σ_g , definieren. Zudem kann diese geometrische Struktur aus den Invarianten rekonstruiert werden. Dabei ist nicht nur das Ergebnis eine Brücke zwischen Gruppentheorie und Differentialgeometrie. Die Definition der Perioden mittels des Doppelverhältnis – und noch mehr die hier nicht dargestellten Beweise – beruhen auf dem Zusammenspiel von (Differential-)Geometrie und Gruppentheorie.

Der Teichmüllerraum und die Wirkung der Abbildungsklassengruppe auf ihm führen zu weiteren interessanten Strukturen, die hier nicht diskutiert werden können.

Ein Ausblick auf andere Homomorphismen

Während Homomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ bereits sehr gut verstanden sind, gibt es für andere Homomorphismen $\phi : \Gamma \rightarrow G$ diskreter Gruppen in halbeinfache Liegruppen noch viele offene Fragen. Die meisten Resultate sind bekannt für den Fall dass Γ keine beliebige diskrete Untergruppe, sondern wie $\Gamma_g \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ ein Gitter $\Gamma \subset H$ in einer halbeinfachen Liegruppe H ist. Ein Gitter $\Gamma \subset H$, wie z. B. $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$, ist eine diskrete Untergruppe, die in „alle Richtungen“ von H verteilt ist, so dass das Volumen des Quotienten H/Γ endlich ist. Im Gegensatz zur illustrierten Flexibilität von Gittern in $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sind Gitter in Liegruppen von höheren Rang, z. B. in $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ mit $n \geq 3$, nach einem berühmten Satz von Margulis starr [13]. Das heißt, jeder Homomorphismus ist im wesentlichen die Verknüpfung der Einbettung $\Gamma \subset H$ mit einem Homomorphismus von H

nach G . Eine Konsequenz dieser Starrheit ist, dass alle Gitter in Liegruppen von höherem Rang arithmetisch sind, d. h. dass sie alle ungefähr wie Untergruppen von endlichem Index in $SL(n, \mathbf{Z}) \subset SL(n, \mathbf{R})$ aussehen.

Man vermutet, dass diese Gitter noch stärkere Starrheitseigenschaften besitzen. Ihre Wirkungen auf niedrig-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sollten durch endliche Gruppen faktorisiert werden. Diese Vermutung ist für zahlreiche ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten bewiesen. Interessanterweise wurden diese Resultate mit sehr unterschiedlichen Methoden, z. B. aus der Gruppentheorie, der beschränkten Kohomologie oder der symplektischen Geometrie, gewonnen. Ähnliche Starrheitsphänomene sind auch auf der differentialgeometrischen Seite für nicht-positiv gekrümmte Mannigfaltigkeiten von „höherem Rang“ bekannt [1].

Ein wichtiges offenes Problem ist die Untersuchung der Eigenschaften von Fundamentalgruppen komplex-hyperbolischer Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens. Diese Gruppen sind Gitter in $SU(1, n)$ und damit nicht starr im Sinne von Margulis. Andererseits konnten für diese Gruppen bereits verschiedenste schwächere Starrheitsresultate bewiesen werden. Von einem umfassenden Verständnis ist man allerdings noch weit entfernt.

Für das Zusammenspiel von Geometrie und Gruppentheorie sind die „flexiblen Situationen“ von besonderem Interesse, da in diesem Fall, wie im dargestellten Beispiel, Modulräume geometrischer Strukturen durch Gruppenhomomorphismen beschrieben werden können. Die allgemeine Beziehung zwischen geometrischen Strukturen und Gruppenhomomorphismen ist recht gut verstanden [5]. Eine präzise Beschreibung, welche geometrischen Strukturen durch welche Homomorphismen definiert werden, hat man bisher allerdings erst in wenigen Fällen geben können. Zum Beispiel werden *komplex-projektive Strukturen* auf Σ_g durch so genannte *quasifuchsische* Homomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow SL(2, \mathbf{C})$ beschrieben. Diese Homomorphismen stehen in enger Beziehung zu hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten. *Konvexe reell-projektive Strukturen* auf Σ_g werden durch so genannte „Hitchin“-Homomorphismen $\phi : \Gamma_g \rightarrow PSL(3, \mathbf{R})$ definiert.

Die Untersuchung spezieller Gruppenhomomorphismen von Flächengruppen in halbeinfache Liegruppen ist ein zur Zeit sehr aktives Forschungsgebiet. In den letzten Jahren wurden viele Fortschritte beim Verständnis von Homomorphismen von $\phi : \Gamma_g \rightarrow G$ erzielt, z. B. für $G = SL(n, \mathbf{R})$, $Sp(2n, \mathbf{R})$ oder $SU(n, m)$ [9, 10, 8, 11, 7, 2, 3, 4, 12]. Dabei spielen auch Verallgemeinerungen der Eulerzahl und verallgemeinerte Doppelverhältnisse eine Rolle. Zur Be-

schreibung der geometrischen Strukturen auf Σ_g , die durch diese neu gefundenen besonderen Klassen von Homomorphismen gegeben sind, gibt es erste Teilergebnisse. Da teils ähnliche, teils komplementäre Resultate mit sehr verschiedenen Methoden wie harmonischen Abbildungen, Higgs-Bündeln, beschränkter Kohomologie und klassischer Riemannscher Geometrie erzielt wurden, ist es nun eine Herausforderung, den Zusammenhang zwischen diesen unterschiedlichen Methoden besser zu verstehen.

Literatur

- [1] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Seminar, Birkhäuser 1995, Kapitel 4.
- [2] S.B. Bradlow, O. García-Prada, P.B. Gothen, *Surface group representations and $U(p, q)$ -Higgs bundles*, *J. Differential Geom.* **64** (2003), no. 1, 111–170.
- [3] M. Burger, A. Iozzi, A. Wienhard, *Surface group representations with maximal Toledo invariant*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), no. 5, 387–390.
- [4] M. Burger, A. Iozzi, A. Wienhard, *Representations with maximal Toledo invariant*, in Vorbereitung.
- [5] W.M. Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, in: *Geometry of group representations* (Boulder, CO, 1987), *Contemp. Math.* **74**, AMS 1988, 169–198.
- [6] W. M. Goldman, *Discontinuous groups and the Euler class*, Thesis, University of California at Berkeley, 1980.
- [7] V.V. Fock, A.B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, *math.AG/0311149*.
- [8] O. Guichard, *Déformations des sous-groupes discrets de groupes de rang un*, Doktorarbeit Université Paris 7, 2004.
- [9] N.J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, *Topology* **31** (1992), no. 3, 449–473.
- [10] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, *math.DG/0401230*, 2003.
- [11] F. Labourie, *Crossratios, Surface Groups, $SL(n, \mathbf{R})$ and $C^1(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$* , *math.DG/0502441*, 2005.
- [12] V. Koziarz, J. Maubon, *Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of $PU(m, 1)$* , *math.DG/0309193*, 2003.
- [13] G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **17**, Berlin 1991.

Adresse der Autorin

Dr. Anna Wienhard
 Mathematisches Institut der Universität Basel
 Rheinsprung 21
 CH 4051 Basel
 anna.wienhard@unibas.ch

Anna Wienhard ist 1977 geboren, hat in Bonn Mathematik und Evangelische Theologie studiert und 2004 ihre Promotion bei Prof. Werner Ballmann (Bonn) und Prof. Marc Burger (ETH Zürich) abgeschlossen. Seit Oktober 2004 arbeitet sie als Post-Doc an der Universität Basel. Ab September 2005 wird sie für ein Jahr am Institute for Advanced Study in Princeton und ab September 2006 als Dickson-Instructor an der University of Chicago arbeiten.

Anna Wienhard ist Sektionspreisträgerin der Sektion Topologie auf der DMV-Jahrestagung 2004. Dieser Artikel ist Teil der Serie von Preisträger-Arbeiten.

