Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1.1 Probleme mit der Unendlichkeit

Man ist von der Schule gewöhnt mit Dezimalzahlen wie

$$x = 1,11111...$$

zu rechnen. In der Schule lernt man auch, dass $9 \cdot x = 9,99999...$ gleich 10 ist (Frage: wieso gilt dies eigentlich?) und zeigt damit $x = \frac{10}{9}$. Ohne an dieser Stelle dieser Frage nachzugehen wollen wir uns im Moment nur daran erinnern, dass die obige genannte Zahl x eigentlich als eine unendliche Summe von Zahlen definiert ist

$$x = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... \,.$$

So weit so gut ....

... dass das Rechnen mit unendlichen Summen nicht ganz ohne Probleme vonstatten geht, ist vielleicht nicht so bekannt. Wir wollen an dieser Stelle die hier auftretenden Probleme an einem typischen Beispiel illustrieren:

Betrachte folgende Reihe

$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \,.$$

Durch Zusammenfassen von jeweils zwei aufeinander folgenden Termen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots > 0$$

lässt sich diese Zahl x leichter berechnen. Als Summe von positiven Zahlen ist insbesondere x positiv.

Was spricht dagegen die Berechnung von x durch andere geschickte Umordnungen zu vereinfachen? Ein Vorschlag wäre, die positiven und negativen Glieder getrennt zu summieren, um nur eine Subtraktion durchführen zu müssen

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

und obendrein einen Term einzuschieben, der gleichzeitig addiert und abgezogen wird

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\ldots\right)\ ,$$

um dann folgende Vereinfachung der Summation

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\ldots\right)\\ &=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)\\ &=0\end{aligned}$$

zu erhalten! Was ist passiert? Es folgt $x=0$ im Widerspruch zur ersten Überlegung, welche $x>0$ zeigt. Wir haben jetzt ein Problem, das offensichtlich daher rührt, dass wir zu unvorsichtig mit dem Hantieren von 'unendlich' vielen Grössen umgegangen sind. Wir haben insbesondere auch gar nicht genau genug gesagt, wie eigentlich eine 'unendliche' Summe zu erklären ist, in wie weit sie überhaupt allgemein existiert etc. Vielleicht war die Bildung der unendlichen Summe gar nicht sinnvoll?

Dieses Beispiel dient dazu zu verdeutlichen, warum wir bei allen nun folgenden Überlegungen, insbesondere bei den Definitionen und Begriffsbildungen, so vorsichtig wie möglich sein werden. In der Tat werden wir im Verlauf der Vorlesung sehen – nachdem wir uns genau überlegt haben wie unendliche Summen überhaupt zu definieren sind – dass der erste Ansatz sehr wohl sinnvoll war, und dass in überraschender Weise die dadurch definierte unendliche Summe den Wert $x=log(2)$ besitzt (natürlicher Logarithmus), was im übrigen – durch eine Modifikation des zweiten Ansatzes – auf die Formel $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{t}=log(2)$ zurückgeführt werden kann.

1.2 Mengen

Wir benutzen häufig die Sprache der Mengenlehre. Etwa folgende Bezeichnung für die Menge A, welche aus den Zahlen 1, 2 und 3 besteht

$$A\ =\ \{1,2,3\}=\{2,3,1,1\}$$

Dann bedeutet

$$1\ \in\ A$$

„1 ist Element der Menge M". In diesem Sinne gilt analog:

$$\begin{aligned}a\ &\in\ \{a,b\}\\ \{1,2\}\ &\in\ \left\{\{1,2\},\left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}\end{aligned}$$

Das zweite Beispiel ist eine Menge von Mengen, deren zwei Elemente aus der zweielementigen Menge $\{1,2\}$ und der Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ bestehen.

Zwei Teilmengen N_1 und N_2 einer Menge M heissen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt $N_1 \cap N_2$ die leere Menge $\emptyset$ ist.

Auch in der Mengenlehre wird man mit dem Problem der Unendlichkeit konfrontiert. Etwa wenn man versucht Mengen rekursiv zu definieren in dem man setzt

$$M_0 = \{a\}$$

$$M_1 = M_0 \cup \{M_0\} = \{a, \{a\}\}$$

(disjunkte Vereinigung)

$$M_2 = M_1 \cup \{M_1\} = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$$

und so weiter ... Iteriert man das unendlich oft, erhält man eine Menge

$$M \quad = \quad \Big\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}, \ \ldots\}$$

welche die Eigenschaft besitzt

$$M \in M \ .$$

Dass es mit derartigen Konstruktionen Probleme geben kann, zeigt das uns das folgende Paradoxon

Definition: Eine Menge M heisse gutartig, wenn $M \notin M$ gilt. Eine Menge heisse pathologisch, wenn $M \in M$ gilt.

Offensichtlich sollte eine Menge dann entweder gutartig oder pathologisch sein. Bilden wir jetzt aber die Menge aller guten Mengen, so erhalten wir einen Widerspruch

Definition: Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller gutartigen Mengen.

Es stellt sich dann die Frage, ob die so definierte Menge $\mathcal{M}$ selbst wieder gutartig ist?

Angenommen, dies wäre der Fall. Dann wäre $\mathcal{M}$ als gutartige Menge wegen der Definition von $\mathcal{M}$ selbst ein Element von $\mathcal{M}$, das heisst $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$. Das kann aber nicht eintreten, denn dann wäre wegen $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ die Menge $\mathcal{M}$ eine pathologische Menge, und nicht – wie angenommen – gutartig. Dies zeigt uns also, dass die Menge $\mathcal{M}$ aller gutartigen Mengen selbst nicht gutartig sein kann.

Dann bleibt anscheinend nur die Alternative, dass die Menge $\mathcal{M}$ aller gutartigen Mengen eine pathologische Menge ist (was uns vielleicht nicht so überraschend erscheinen mag). Als pathologische Menge erfüllt daher $\mathcal{M}$ die Eigenschaft

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M} \ .$$

Das war die Definition von pathologisch! Aber aus $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ folgt, dass $\mathcal{M}$ ein Element der Menge $\mathcal{M}$ aller gutartigen Mengen ist. Mit anderen Worten, es folgt: $\mathcal{M}$ ist eine gutartige Menge!

An dieser Stelle erinnern wir uns aber daran, dass dies nicht sein kann, da wir es bereits ausgeschlossen haben, dass die Menge $\mathcal{M}$ aller gutartigen Mengen gutartig sein kann. Ein Teufelskreis!

Offensichtlich kann man Mengen also nicht 'beliebig' definieren. Ein solides Fundament der Mengenlehre zu legen ist eine schwierige Aufgabe, und gehört eigentlich nicht zum Themenkreis der Analysisvorlesung. Wir wollen uns an dieser Stelle nur merken, dass man beim Umgang mit der Unendlichkeit Sorgfalt walten lassen sollte. Wir benutzen die Begriffe der Mengenlehre eigentlich in der Regel nur im Sinne von Notationen. Wichtige Bildungen in diesem Zusammenhang verbinden sich mit den Begriffen: Abbildung, kartesisches Produkt, Relationen, Quantoren. Diese sollen nun kurz vorgestellt werden:

1.3 Abbildungen

Eine Zuordnung zwischen nichtleeren Mengen M und N,

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ m \in M &\mapsto f(m) \in N \end{aligned}$$

welche jedem Element m aus M (dem sogenannten Definitionsbereich) ein eindeutig bestimmtes Element in N (im Wertebereich) zuweist, nennt man Abbildung oder Funktion. Die Teilmenge $\{f(m) \in N \mid m \in M\}$ von N nennt man das Bild von f, kurz $Bild(f)$. Die Abbildung heisst <u>surjektiv</u>, wenn gilt $Bild(f) = N$. Eine Abbildung heisst <u>injektiv</u>, wenn aus $f(m) = f(m')$ folgt $m = m'$. Eine Abbildung heisst <u>bijektiv</u>, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4 Kartesische Produkte

Das kartesische Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge aller Paare (m, n):

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M, n \in N)\}$$

Beachte, dass im Gegensatz zum Mengenbegriff bei der Bildung von Paaren (m, n), die Reihenfolge eine Rolle spielt. Das heisst im allgemeinen gilt, dass (m, n) von (n, m) verschiedenen ist, selbst wenn für die Mengen gilt $M = N$.

<u>Beispiel</u>: Ist $\mathbb{R}$ die reelle Zahlengerade, dann ist

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \text{Zahlenebene}$$

1.5 Relationen

Eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.

Schreibweise

$x, y \in X, x \overset{R}{\sim} y$ für $(x, y) \in R$, oder kurz $x \sim y$. Man sagt dann ,,... x steht in Relation zu y bezüglich der Relation R..."

1.6 Axiome der Äquivalenzrelation

Eine Relation auf X nennt man Äquivalenzrelation, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

1. Reflexivität: $x \sim x$ (für alle $x \in X$)
2. Symmetrie: Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$
3. Transivität: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$

Eine Aquivalenzrelationen auf X definiert eine Zerlegung von X in disjunkte Aquivalenzklassen. Umgekehrt definiert jede Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen eine Äquivalenzrelation auf X.

1.7 Quantoren

- $\forall$ bedeutet ,,für alle"
  Beispiel: $\forall x \in K$ bedeutet ,,für alle x aus K"
- $\exists$ bedeutet ,,es existiert (mindestens) ein"
  Beispiel: $\forall x \in K \quad \exists y \in K \quad (y + x = 0)$
- $\exists!$ bedeutet ,,es existiert **genau** ein".

Kapitel 2

Körper

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Abbildungen

$$K \times K \xrightarrow{+} K \qquad K \times K \xrightarrow{\cdot} K$$
$$(a, b) \longrightarrow a + b \qquad (a, b) \longrightarrow a \cdot b$$

(genannt Addition und Multiplikation) so, dass folgende Axiome erfüllt sind

K1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$ *(Assoziativgesetz)*
K2) Es existiert ein Element $0 \in K$ mit $0 + a = a$ für alle $a \in K$ *(neutrales Element)*
K3) Für jedes $a \in K$ gibt es ein Element $-a \in K$,
so dass gilt $-a + a = 0$ *(inverses Element)*
K4) Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$ *(Kommutativgesetz)*

Dies waren das Assoziativgesetz, die Existenz des neutralen Elements, die Existenz des inversen Elements, und das Kommutativgesetz der Addition. Analog fordert man für die Multiplikation

K1') $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$
K2') Es existiert ein Element $1 \in K$ mit $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$
K3') Für alle $a \in K \neq 0$ existiert ein Inverses a^{-1} in K mit $a^{-1} \cdot a = 1$
K4') $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$

Ausserdem wird gefordert

K5') $1 \neq 0$

sowie das Distributivgesetz

D) Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(Distributivgesetz)*

Die Assoziativgesetze erlauben es mehrfache Klammern bei der Addition wegzulassen. Man schreibt also kurz $a+b+c$ anstatt $(a+b)+c = a+(b+c)$. Analog für die Multiplikation. Ausserdem benutzt man die übliche Schreibkonvention $(a \cdot b) + (c \cdot d) = a \cdot b + c \cdot d$ oder auch $ab + cd$.

2.1 Folgerungen aus den Axiomen

Varianten des Distributivgesetzes Wendet man K4') auf beiden Seiten von D) an, erhält man auch die folgende Variante D') des Distributivgesetzes:

$$(b+c)\cdot a \quad = \quad b\cdot a + c\cdot a$$

Distributivgesetz mit 4 Variablen Es gilt:

$$(a+b)\cdot(c+d) \quad = \quad a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d$$

Beweis: $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) = a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d$ wegen der Distributivgesetze D' und D.

2.1.1 Lemma

Inverse und neutrale Elemente sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Aus $u+a = 0 = v+a$ und (K4) folgt $a+u = a+v$. Somit $-a+(a+u) = -a+(a+v)$ wegen (K3). Wegen (K1) also $(-a+a)+u = (-a+a)+v$, oder $0+u = 0+v$. Daher $u = v$ wegen (K2). Die zeigt die Eindeutigkeit des zu a inversen Elements. Analog zeigt man die Eindeutigkeit des neutralen Elements: $0+a = a = \tilde{0}+a$ impliziert $a+0 = a+\tilde{0}$ wegen (K4), und somit $0 = \tilde{0}$ (wie oben für $u = 0, v = \tilde{0}$). Der multiplikative Fall ist analog.

2.1.2 Lemma

Es gilt $x\cdot y = 0$ genau dann, wenn gilt: $x = 0$ oder $y = 0$.

Beweis: Wir zeigen zuerst $0\cdot x = 0 = x\cdot 0$. Nach (K4') genügt die rechte Gleichheit.

$$\begin{aligned}
0 &= 0+0 \quad (K2)\\
x\cdot 0 &= x\cdot 0 + x\cdot 0 \quad (D)\\
-x\cdot 0 + x\cdot 0 &= -x\cdot 0 + (x\cdot 0 + x\cdot 0)\\
0 &= (-x\cdot 0 + x\cdot 0) + x\cdot 0 \quad (K3),(K1)\\
0 &= 0 + x\cdot 0 \quad (K3)\\
0 &= x\cdot 0 \quad (K2)\ .
\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus $x\cdot y = 0$ entweder $y = 0$ oder $x = 0$. Ist nämlich $x \neq 0$, dann existiert x^{-1}. Wie bereits gezeigt gilt dann $x^{-1}\cdot 0 = 0$. Also $0 = x^{-1}\cdot 0 = x^{-1}\cdot(x\cdot y)(x^{-1}\cdot x)\cdot y = 1\cdot y = y$, das heisst $y = 0$.

2.1.3 Lemma

$-x = (-1) \cdot x$.

<u>Beweis</u>: $(-1) \cdot x + x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$ wegen (D'),(K3) und Lemma 2.1.2. Aus der Eindeutigkeit des Inversen (Lemma 2.1.1) und $(-1) \cdot x + x = 0$ folgt daher $-x = (-1) \cdot x$.

Wir benutzen nun folgende Schreibweise

$$x^2 := x \cdot x \ .$$

2.1.4 Lemma

$(-x)^2 = x^2$.

<u>Beweis</u>: Es gilt:

$$\begin{array}{rcl}
(-x) + x & = & 0 \\
(-x) \cdot ((-x) + x) & = & (-x) \cdot 0 \\
(-x)^2 + (-x) \cdot x & = & 0 \quad (D),\ (Lemma\ 2.1.2) \\
((-x)^2 + (-x) \cdot x) + x \cdot x & = & x \cdot x \quad (K2) \\
(-x)^2 + ((-x) + x) \cdot x & = & x^2 \quad (K1), (D') \\
(-x)^2 + 0 & = & x^2 \quad (Lemma\ 2.1.2) \\
(-x)^2 & = & x^2 \quad (K4), (K2)
\end{array}$$

2.2 Beispiel

Jeder Körper besitzt mindestens zwei verschiedene Elemente, nämlich 0 (Null) und 1 (Eins) nach Axiom (K5'). Wie man leicht nachprüft, definieren folgende Tabellen einen Körper $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen

+	0	1
0	0	1
1	1	**0**

·	0	1
0	**0**	0
1	0	1

Im übrigen sind diese Tabellen durch die Körperaxiome bereits eindeutig festgelegt! Beispielsweise ist $1 + 1 = 1$ ausgeschlossen, wegen $1 \neq 0$.

2.3 Notationen

- $x - y := x + (-y) = (-y) + x = -y + x$
- $x/y := \dfrac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$ für $y \neq 0$
- Die üblichen Bruchrechenregeln wie Kürzen ($\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ für $a \neq 0, c \neq 0$) oder Hauptnennerbildung ($\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ für $b \neq 0$, $d \neq 0$ also $bd \neq 0$!) folgert man leicht aus den Körperaxiomen.

[0]Jedes Element der Additionstabelle kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vor; warum?

Kapitel 3

Angeordnete Körper

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn es eine Relation $<$ auf K gibt, für die gilt:

O1) Für $x, y \in K$ gilt genau einer der drei Fälle (*Exklusitivität*)

$$x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x \ .$$

O2) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in K$ (*Translationsinvarianz*)

O3) Aus $0 < x$ und $0 < y$ folgt $0 < x \cdot y$ (*Multiplikativität*)

O4) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (*Transitivität*)

3.1 Notationen

- $x > y$ steht für $y < x$
- $x \geqslant y$ bedeutet $x > y$ oder $x = y$
- $x \leqslant y$ bedeutet $x < y$ oder $x = y$

3.2 Intervalle

In einem angeordneten Körper K sind Intervalle definiert

- $(a, b) := \{x \in K | a < x < b\}$
- $[a, b] := \{x \in K | a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a, b) := \{x \in K | a \leqslant x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in K | a < x \leqslant b\}$

3.3 Quadrate sind positiv

Aus den Axiomen eines geordneten Körpers folgt:

$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$, insbesondere gilt $1 > 0$

Beweis: Aus $x \neq 0$ folgt $x < 0$ oder $x > 0$ (Axiom O1). Für $x > 0$ gilt $x^2 = x \cdot x > 0$ nach (Axiom O3). Ist $x < 0$, so folgt durch Addition von $z = -x$ aus Axiom O2

$$0 < -x \ .$$

Nach Axiom O3 daher $0 < (-x) \cdot (-x) = (-x)^2$. Wegen $(-x)^2 = x^2$ (Lemma 2.1.4) folgt also auch in diesem Fall $x^2 > 0$.

3.4 Natürliche Zahlen

In einem angeordneten Körper K gilt $0 < 1$ nach Folgerung (a). Aus der Translationsinvarianz (O2) folgt dann

$$1 < 1 + 1$$

und induktiv

$$1 + 1 < 1 + 1 + 1$$

und so weiter. Die so definierten Elemente $0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots$ des angeordneten Körpers K sind paarweise verschieden wegen des Transitivitätsaxioms (O4) und der Exklusivität (O1). Man bezeichnet die so definierten Zahlen mit $0, 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1$ usw. Die so definierten Zahlen in K definieren eine Teilmenge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

des Körpers K, die so genannte „Menge der natürlichen Zahlen".

Folgerung: *Ein angeordneter Körper K besitzt unendlich viele Elemente.*

3.5 Lemma

Es gilt

(a) $x < y \iff 0 < y - x$

(b) $x < 0 \iff -x > 0$

(c) $x > 0 \iff -x < 0$

(d) $x < y \iff -y < -x$

(e) $x < y$ und $0 < z \Longrightarrow xz < yz$.

Insbesondere vertauscht $x \mapsto -x$ 'positive' und 'negative' Zahlen.

Beweise: Für (a) addiere $-x$ und benutze (O2). (b) ist der Spezialfall $y = 0$ von (a). Auch (c) ist ein Spezialfall von (a) wegen $-(-x) = x$ (siehe Übungsblatt). Zu (d): $x < y \iff 0 < y - x \iff 0 > -(y - x) \iff 0 > -y + x \iff -x > -y$ wegen Axiom (O2) und (b) und (c). Zu (e): $x < y$ impliziert $0 < y - x$ und daher wegen (O3) $0 < (y - x)z = yz - xz$. Aus (O2) folgt $xz < yz$.

3.6 Bemerkung

Ein Spezialfall von (e) ist

$$(O5) \quad 0 < x, 0 < y \Longrightarrow 0 < x + y \ .$$

Beachte: (O1),(O2),(O3),(O4) sind äquivalent zu (O1),(O2),(O3),(O5), denn Transitivität schliesst man wie folgt: $a < b \Longleftrightarrow 0 < b - a$ und $b < c \Longleftrightarrow 0 < c - b$ nach (O2). Gilt (O5), folgt daher aus $a < b$, $b < c$ die Aussage $0 < (b-a) + (c-b) = c - a$. Also wegen Axiom (O2) durch Addition von a die Aussage $a < c$ von Axiom (O4).

3.7 Folgerung

$$x \cdot y > 0 \Longleftrightarrow x > 0, y > 0 \text{ oder } x < 0, y < 0$$

$$x \cdot y < 0 \Longleftrightarrow x > 0, y < 0 \text{ oder } x < 0, y > 0$$

<u>Beweis</u> 1. Schritt. Aus $x > 0, y > 0$ folgt $xy > 0$ nach (O3). Aus $x < 0, y < 0$ folgt $0 < -x, 0 < -y$ wegen Lemma 3.5b. Also $0 < (-x) \cdot (-y) = (-1)^2 xy = xy$ nach (O3) und Lemma 2.1.3 und 2.1.4.

2. Schritt. Aus $x > 0, y < 0$ folgt $0 < x(-y)$ nach (O3), wegen $0 < -y$ (Lemma 3.5b). Wegen $x(-y) = x \cdot (-1) \cdot y = (-1) \cdot (xy) = -xy$ (Lemma 2.1.3) gilt also $0 < -xy$ oder $xy < 0$ (Lemma 3.5c). Im Fall $y > 0, x < 0$ zeigt man analog $xy < 0$.

3. Schritt. Da $xy = 0$ genau dann gilt, wenn entweder $x = 0$ ist oder $y = 0$ ist, haben wir eine vollständige Liste aller Fälle aufgestellt. Daraus folgt die Behauptung.

3.8 Lemma

$x > 0 \Longleftrightarrow x^{-1} > 0$

<u>Beweis</u>: Wegen $x^{-1} \cdot x = 1 > 0$ folgt aus $x > 0$ die Behauptung $x^{-1} > 0$ aus dem letzten Lemma.

3.9 Lemma

$x > y > 0 \Longrightarrow 0 < x^{-1} < y^{-1}$

<u>Beweis</u>: Aus der Annahme und dem letzten Lemma folgt $0 < x^{-1}$ und $0 < y^{-1}$, also $0 < x^{-1}y^{-1}$. Aus Lemma 3.5e folgt die Behauptung.

3.10 Lemma

Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis: Aus der Annahme folgt $0 < b - a$ und $0 < d - c$ (Axiom O2). Also folgt $0 < d - c + b - a$, oder durch Addition von $a + c$ (Axiom O2) wie behauptet $a + c < b + d$.

Kapitel 4

Die Betragsfunktion

K sei ein angeordneter Körper. Wir setzen

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition folgt sofort $x \leqslant |x|$ sowie $-x \leqslant |x|$ sowie $|-x| = |x|$ durch Betrachtung der einzelnen Fälle.

4.1 Lemma

Es gilt

$$|x| \quad \geqslant \quad 0$$

für alle $x \in K$ *und* $|x| = 0$ *gilt genau dann, wenn* $x = 0$ *ist. Weiterhin gilt für alle* $x, y \in K$

1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2. [1] $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

<u>Beweis</u>: Die Eigenschaft $|x| \geqslant 0$ folgt durch Fallunterscheidungen aus dem Lemma 3.5b.

Eigenschaft 1. folgt durch Fallunterscheidung (9 Fälle). Ist $x = 0$ oder $y = 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.1.2. Wenn nicht benutzt man Folgerung 3.7. Im wesentlichen muss man dann die drei Fälle $0 < x, 0 < y$ und $x < 0, y < 0$ und oBdA $x < 0, 0 < y$ unterscheiden. Im ersten Fall ist $|xy| = xy = |x||y|$, da $xy > 0$ ist. Im zweiten Fall ist $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$, wegen $(-1)^2 = 1$ (Lemma 2.1.4). Im dritten Fall ist $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$ wegen $-xy = (-1) \cdot (x \cdot y) = ((-1) \cdot x) \cdot y = (-x)y$ (Lemma 2.1.3).

[1] Diese Ungleichung wird ,,Dreiecksgleichung” genannt.

Eigenschaft 2. Wie wir bereits gesehen haben gilt $x \leqslant |x|$ und $y \leqslant |y|$. Also gilt $x + y \leqslant |x| + |y|$ nach Lemma 3.10. Ditto $-x \leqslant |x|$ und $-y \leqslant |y|$, also $-x - y \leqslant |x| + |y|$. Wegen

$$|x + y| \quad = \quad \begin{cases} x + y & x + y \geqslant 0 \\ -x - y & x + y < 0 \end{cases}$$

folgt daher wie behauptet $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

4.2 Definition der Distanzfunktion

Wir betrachten neben dem Betrag $| \quad |$ häufig auch die Distanzfunktion $d(x, y)$

$$d : \ K \times K \to K$$

definiert durch

$$d(x, y) = |x - y| \ .$$

Offensichtlich gelten die folgenden <u>metrischen</u> Eigenschaften:

- $d(x, y) \geqslant 0$ für alle $x, y \in K$, und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in K$

Die erste Eigenschaft folgt aus der ersten Aussage des letzten Lemmas. Die zweite Aussage folgt aus $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$. Die letzte Aussage folgt aus der Dreiecksungleichung des letzten Lemmas

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y) \ .$$

Kapitel 5

Der Körper der komplexen Zahlen

Sei K ein angeordneter Körper. Wir betrachten das kartesische Produkt $L = K \times K = \{(x,y)|x,y \in K\}$ und definieren

Addition: $L \times L \xrightarrow{+} L$
$((x,y),(x',y')) \to (x+x', y+y')$

Multiplikation: $L \times L \xrightarrow{\cdot} L$
$((x,y),(x',y')) \to (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$

5.1 Satz

$(L,+,\cdot)$ *ist ein Körper.*

Dabei ist $0 = (0,0)$ das Nullelement und $1 = (1,0)$ das Einselement. Wir beschränken uns darauf, die Existenz der multiplikativ inversen Elemente zu zeigen. Die anderen Eigenschaften überlassen wir als Übungsaufgabe.

5.2 Inverses Element der Multiplikation

Sei $z = (x,y) \neq 0$. Dann gilt $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Wir benutzen nun Abschnitt 3.3

Fallunterscheidung	$x^2 + y^2$
$x = 0, y \neq 0$	$x^2 + y^2 = y^2 > 0$
$y \neq 0, x = 0$	$x^2 + y^2 = x^2 > 0$
$y \neq 0, x \neq 0$	$x^2 + y^2 > 0$, denn $x^2 > 0$ und $y^2 > 0$

Also folgt in allen Fällen: $x^2 + y^2 \neq 0$

Ansatz: Somit ist das folgende Element definiert

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

Dann gilt $z \cdot z^{-1} = \left(\frac{x \cdot x - y \cdot (-y)}{x^2 + y^2}, \frac{x \cdot (-y) + y \cdot x}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{0}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0) = 1$ unter Benutzung von $-y = (-1) \cdot y$. Das heisst $z^{-1} \cdot z = 1$.

5.3 Die Einbettung von K

Betrachte die Einbettung $i : K \hookrightarrow L$, welche der Zahl $x \in K$ die Zahl $(x, 0) \in L$ zuordnet. Dann gilt $i(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = i(x) + i(y)$ und $i(x \cdot y) = (xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = i(x) \cdot i(y)$. Wir können also K als Teilkörper von L auffassen und schreiben kurz x anstatt $i(x)$.

5.4 Die Zahl i

Wir definieren $i \in L$ durch

$$i = (0, 1) \ .$$

Dann gilt $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$

$$i^2 = -1 \ .$$

In K besitzt die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung, da in einem angeordneten Körper Quadrate immer positiv sind. In L haben wir eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ gefunden. Insbesondere ist daher L ein Körper, der keine Anordnung besitzt.

Beachte $(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, y)$. Mit unseren Kurzschreibweise $x = (x, 0)$ erhalten wir somit

$$(x, y) = x + y \cdot i \ .$$

5.5 Hinweis

Im später relevanten Fall, wenn K der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist, nennt man oben konstruierten Körper L den Körper $\mathbb{C}$ der <u>komplexen</u> Zahlen.

Kapitel 6

Archimedisches Axiom

Ein angeordneter Körper K heisst archimedisch, falls[1] gilt

$$\forall x \in K \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ x < n \ .$$

6.1 Folgerung (Satz des Eudoxos)

In einem archimedischen Körper K gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ aus K existiert eine natürliche Zahl $0 \neq n \in \mathbb{N}$ aus K, so dass gilt

$$0 < 1/n < \varepsilon \ .$$

Beweis: Aus $0 < \varepsilon$ folgt $0 < \varepsilon^{-1}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon < n$ (archimedisches Axiom). Dann folgt $0 < n^{-1} < \varepsilon$ wie behauptet.

In einem angeordneten Körper K hat man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subseteq K$ sowie die inversen Elemente $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Aus Lemma 3.5 folgt $\mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$. Die Vereinung $\mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ nennt man die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Diese Menge ist unter Addition und Subtraktion abgeschlossen, wie man leicht sieht. Aus den Bruchrechenregeln sieht man dann sofort, dass die rationalen Zahlen in K

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \in K \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

einen Teilkörper von K definieren.

6.2 Dichtigkeitssatz

Die rationalen Zahlen liegen in einem archimedischen Körper K dicht. Damit ist folgendes gemeint: $\forall x \in K, \ \forall \varepsilon > 0$ aus K $\exists y \in \mathbb{Q}$ mit

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \ .$$

[1] Dies ist keine Folgerung aus den bisherigen Axiomen, wie es vielleicht den Anschein haben könnte, sondern ein unabhängiges Axiom

Beweis 1. Schritt. ObdA $x \geqslant 0$. [Denn anderenfalls ist $-x \geqslant 0$. Hat man $y \in \mathbb{Q}$ gefunden mit $(-x) - \varepsilon < y < (-x) + \varepsilon$, so folgt durch Multiplikation mit -1 daraus $x - \varepsilon < -y < x + \varepsilon$. Wegen $y \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow -y \in \mathbb{Q}$ folgt die Behauptung.]

2. Schritt. ObdA $\varepsilon = \frac{1}{n}$ für ein $0 < n \in \mathbb{N}$. [Für beliebiges $0 < \varepsilon$ existiert nach Eudoxos ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Hat man ein $y \in \mathbb{Q}$ gefunden mit $x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n}$ dann gilt auch $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$ wegen $x - \varepsilon < x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon$.]

3. Schritt. ObdA kann man annehmen $\varepsilon = 1$ und $x \geqslant 0$. [Offensichtlich ist $x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n}$ äquivalent zu $\tilde{x} - 1 < \tilde{y} < \tilde{x} + 1$ für $\tilde{x} = n \cdot x \geqslant 0$ und $\tilde{y} = n \cdot y$ (multipliziere mit n). Beachte $y \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \tilde{y} \in \mathbb{Q}$.]

4. Schritt. Der Fall $x \geqslant 0$ und $\varepsilon = 1$. Betrachte $M = \{y \in \mathbb{N} \mid x - 1 < y\}$. Nach dem archimedischen Axiom ist diese Menge M nicht leer. Sei m die kleinste natürliche Zahl aus M. Dann gilt per Definition von M

$$x - 1 < m \ .$$

Behauptung: Es gilt auch $m < x + 1$ ($m \in \mathbb{N}$ ist also die gesuchte Zahl aus $\mathbb{Q}$).

Beweis der Behauptung: Der Fall $m = 0$ ist klar, denn $0 < x + 1$ wegen $x \geqslant 0$. Im Fall $m \geqslant 1$ ist $m - 1$ wieder eine Zahl in $\mathbb{N}$. Angenommen $m < x + 1$ wäre nicht richtig, dann gilt $x < x + 1 \leqslant m$, also $x - 1 < m - 1$. Somit wäre $m - 1$ auch eine natürliche Zahl $< m$ aus M im Widerspruch zur Minimalität von m. Also gilt wie behauptet $m < x + 1$.

6.3 Bernoulli Ungleichung

Sei $n \geqslant 2$ aus $\mathbb{N}$ und sei $x > -1$ eine von Null verschiedene Zahl aus einem angeordneten Körper K. Dann gilt

$$(1 + x)^n > 1 + nx \ .$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Der Induktionsanfang $n = 2$: Für n=2 folgt die Aussage aus $x^2 > 0$ und der binomischen Formel

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \ ,$$

welche aus dem Distributivgesetz folgt.

Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$: Angenommen es gilt $(1 + x)^n > 1 + nx$. Dann folgt durch Multiplikation mit der Zahl $1 + x > 0$ (benutze Lemma 3.5e)

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x) \cdot (1 + x)^n > (1 + x) \cdot (1 + nx)$$

$$= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$$

wegen $nx^2 > 0$. Beachte $n > 0$ und $x^2 > 0$.

Kapitel 7

Folgen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Folgen und studieren die Begriffe der Konvergenz und der Cauchyfolge in einem archimedischen Körper K. Wir zeigen später, daß sich einige dieser Begriffe und Ergebnisse übertragen lassen auf metrische Räume. In der Tat benötigen 7.1 bis 7.7 keine weiteren Eigenschaften als die Axiome einer Metrik und übertragen sich später Wort für Wort (siehe Kapitel 11, Seite 59).

7.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Folge in X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ n & \mapsto & x_n \end{array}$$

von den natürlichen Zahlen nach X. Man schreibt häufig $x_0, x_1, x_2, x_3, ... \in X$.

7.2 Annahme

Im weiteren sei K ein angeordneter Körper K.

Beispiele: Die in der Einleitung definierten Folgen

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 - \frac{1}{2},\ x_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ x_3 = \dots$$

oder

$$x_0 = 0,\quad x_1 = 10^{-1},\ x_2 = 0.11 = x_1 + 10^{-2}\ , x_3 = 0.111 = x_2 + 10^{-3}\ , \dots$$

sind in jedem angeordneten Körper erklärt.

7.3 Definition Cauchyfolge

Eine Folge x_n mit Werten in K heißt Cauchyfolge, wenn folgende Aussage richtig ist:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad \Big(n, m \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon\Big)} \, .$$

Oder etwas weniger formal: Für alle $\varepsilon > 0$ aus K gibt es eine natürliche Zahl N, so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt für alle $n, m \geqslant N$.

7.4 Definition Konvergenz

Eine Folge x_n aus K heißt konvergent mit Grenzwert $x \in K$, falls gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad \Big(n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon\Big)} \, .$$

Weniger formal: Für alle $\varepsilon > 0$ in K gibt es eine natürliche Zahl N so, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ gilt für alle $n \geqslant N$.

Oder alternativ auch: 'Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Fast alle[1] Folgenglieder liegen im Intervall $(-\varepsilon + x, x + \varepsilon)$.

Bemerkung: Da die Zahl N von ε abhängt, schreibt man häufig auch $N = N(\varepsilon)$.

Bemerkung: Ist x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in K$, dann schreibt dann häufig auch $x_n \to x$ oder $lim_{n\to\infty} x_n = x$ und spricht vom Limes x. Diese Notation wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

7.5 Eindeutigkeit des Grenzwerts

Der Grenzwert x einer konvergenten Folge x_n ist eindeutig durch die Folge bestimmt.

Beweis: Seien x,y Grenzwerte derselben Folge x_n aus K. Wir zeigen $d(x, y) = 0$, was nach 4.2 zur Folge hat: $x = y$. Wegen $d(x, y) \leqslant 0$ genügt es $d(x, y) > 0$ auszuschliessen.

Wir führen einen so genannten

Widerspruchsbeweis: Wäre $d(x, y) > 0$, dann existiert für $\varepsilon = d(x, y)$ wegen der Konvergenz der Folge x_n ein N aus $\mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2})$, beziehungsweise ein M aus $\mathbb{N}$ mit $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqslant M(\frac{\varepsilon}{2})$. Aus der Dreiecksungleichung $d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y)$ und der Symmetrie $d(x, x_n) = d(x, x_n)$ folgt daraus

$$d(x, y) < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant max(N, M)$. Ein Widerspruch zu $\varepsilon = d(x, y)$! Also kann $d(x, y) > 0$ nicht gelten.

[1] alle bis auf endlich viele

7.6 Konvergenz impliziert Cauchykonvergenz

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

<u>Beweis</u>: Sei x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Dann gilt $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant N = N(\frac{\varepsilon}{2})$. Aus der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

folgt $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, also $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geqslant N$. x_n ist daher eine Cauchyfolge.

7.7 Cauchyfolgen sind beschränkt

Für eine Cauchyfolge x_n existiert ein $y \in K$ und ein $C \in K$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(x_n, y) \leqslant C$.

<u>Beweis</u>: Für $\varepsilon = 1$ gilt $d(x_n, x_m) < 1$ für alle $n, m \geqslant N = N(1)$ (Cauchykonvergenz). Setze $y = x_N$. Dann gilt $d(x_n, y) = d(x_n, x_N) < 1$ für alle $n \geqslant N$. Also $d(x_n, y) \leqslant C$ für

$$C = max\big(d(x_0, y), \cdots, d(x_{n-1}, y), 1\big) \ .$$

7.8 Permanenzeigenschaften

Sind $(x_n)_{n\geqslant 0}$ und $(y_n)_{n\geqslant 0}$ Cauchyfolgen in K, dann auch die Summen-,Differenz- und Produktfolge:

- $(z_n)_{n\geqslant 0} = (x_n \pm y_n)_{n\geqslant 0}$ *ist eine Cauchyfolge*
- $(z_n)_{n\geqslant 0} = (x_n \cdot y_n)_{n\geqslant 0}$ *ist eine Cauchyfolge*

7.8.1 Zusatz:

Falls $(x_n)_{n\geqslant 0}, (y_n)_{n\geqslant 0}$ konvergieren, dann konvergieren auch die Summenfolgen, Differenzfolgen und Produktfolgen z_n, und es gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) \pm (\lim_{n\to\infty} y_n)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)}$$

Weiterhin gilt (siehe Übungsblatt). Sei y_n eine konvergente Folge mit Grenzwert $y \neq 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gilt

1. *$y_n \neq 0$ für alle $n \geqslant N$*

2. Die Folge $z_n := \begin{cases} z_n \text{ beliebig für } n < N \\ y_n^{-1} \text{ für } n \geqslant N \end{cases}$
konvergiert, und hat den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} z_n = y^{-1}$$

Beweis: oBdA nur im Fall $z_n = x_n \cdot y_n$ für Cauchyfolgen x_n, y_n.

$$\begin{aligned} d(z_n, z_m) &= |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \\ &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_m + x_n \cdot y_m - x_m \cdot y_m| \\ &\leqslant |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_m| + |x_n \cdot y_m - x_m \cdot y_m| \\ &\leqslant |x_n \cdot (y_n - y_m)| + |(x_n - x_m) \cdot y_m| \\ &\leqslant |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |x_n - x_m| \cdot |y_n| \end{aligned}$$

Es gibt $C, C' \neq 0$ in K, so dass gilt

- $|x_n| \leqslant C$ (Beschränktheit der Cauchyfolge x_n)
- $|y_n - y_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\cdot C}$ (Cauchyfolge)
- $|y_n| \leqslant C'$ (Beschränktheit der Cauchyfolge y_n)
- $|x_n - x_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\cdot C'}$ (Cauchyfolge)

falls $n, m \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2\cdot C})$ und $n, m \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2\cdot C'})$.

Somit ist z_n eine Cauchyfolge, denn

$$|z_n - z_m| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + C' \cdot \frac{\varepsilon}{2C'} = \varepsilon$$

gilt für alle

$$n, m \geqslant N = \max\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot C}\right), N'\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot C'}\right)\right) .$$

Bemerkung: Sind x_n, y_n konvergent mit Grenzwerten x, y, dann zeigt man wie oben $d(z_n, xy) \leqslant |x| d(y_n, y) + d(x_n, x)|y|$, was $z_n \to xy$ zur Folge hat.

7.9 Nullfolgen

Hat eine konvergente Folge aus K den Grenzwert Null, dann nennt man x_n eine Nullfolge.

7.10 Das Archimedische Axiom

Von nun an sei K ein archimedischer Körper.

Dann gilt

7.11 Die Leibnizfolge

Die Leibnizfolge

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{3},\ \cdots .$$

oder allgemeiner (für $x > 0$)

$$x_n = \frac{1}{1 + xn}$$

definiert eine Nullfolge.

Wir zeigen ganz allgemein das folgende

Kriterium: *Sei x_n eine Folge, der Folgenglieder von Null verschieden sind, so dass $y_n = x_n^{-1}$ definiert ist. Gilt (*)*

$$\forall C \in K\ \exists N \in \mathbb{N} \left(n \geqslant N \Longrightarrow |y_n| > C \right) ,$$

dann ist x_n eine Nullfolge.

(*) gilt offensichtlich für $y_n = 1 + nx$, denn $|y_n| > C$ für alle $n \geqslant x^{-1} \cdot C$. Beachte, dass es nach dem Archimedischen Axiom mindestens ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit dieser Eigenschaft, und dass dieses Eigenschaft dann erst recht gilt für alle $n \geqslant N$.

Beweis des Kriteriums: Gegeben $\varepsilon > 0$. Für $C = \varepsilon^{-1}$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $C \leqslant |y_n|$ für alle $n \geqslant N$. Also gilt

$$d(x_n, 0) = |y_n|^{-1} < \varepsilon$$

für $n \geqslant N$.

7.12 Die geometrische Folge

Für $q \in K$ nennt man die Folge $x_n = q^n$ eine geometrische Folge. Die durch q definierte geometrische Folge konvergiert genau dann, wenn gilt $|q| < 1$ oder $q = 1$. Im Falle $|q| < 1$ ist der Grenzwert gleich 0.

Beweis: Der Fall $|q| = 1$. Für $q = 1$ konvergiert die Folge gegen 1 (trivial). Für $q = -1$ gilt $d(x_n, x_{n+1}) = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist x_n nicht einmal eine Cauchyfolge.

Der Fall $|q| > 1$. Wir behaupten, x_n ist unbeschränkt im Sinne von (*)

$$\forall C\ \exists N \in \mathbb{N}(n \geqslant N \Longrightarrow |x_n| > C)\ ,$$

also ist x_n keine Cauchyfolge. Benutze $|q| = 1 + x$ für geeignetes $x > 0$. Dann ist $|x_n| = |q|^n$, und aus der Bernoulli Ungleichung folgt

$$|x_n| = (1+x)^n > 1 + nx > C$$

für alle $n \geqslant N > x^{-1}C$ (ein solches $N \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Archimedischen Axiom!).

Der Fall $|q| < 1$. Für $q \neq 0$ setze $\tilde{q} = q^{-1}$. Dann gilt $|\tilde{q}| > 1$, und die Behauptung des Lemmas folgt aus dem Kriterium 7.11 und der Unbeschränktheit (*) der geometrischen Folge $\tilde{q}^n$. [Es gilt $|q||\tilde{q}| = |q\tilde{q}| = |1| = 1$. Also $|\tilde{q}| = |q|^{-1}$, und $1 < |q|$ impliziert daher $|\tilde{q}| > 1$ (Lemma 3.9).] Der Fall $q = 0$ ist trivial.

7.13 Intervallteilung

Für $a \leqslant b$ definiert man das Intervall $I = [a, b]$ als die Menge $\{x \in K \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Man nennt $b - a$ die Länge $l(I)$ des Intervalls. Der 'Mittelpunkt' ist definiert als der Punkt

$$\frac{a+b}{2} = a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2}\ .$$

Aus $I =$ erhält man zwei Intervalle

$$I' = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad , \quad I'' = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

und es gilt $I = I' \cup I''$. Wie man leicht sieht, gilt $l(I') = l(I'') = \frac{1}{2}l(I)$.

Lemma: Für $x, y \in I$ gilt $d(x, y) \leqslant l(I)$,

denn oBdA $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, und somit $d(x, y) = y - x \leqslant b - a = l(I)$.

7.14 Teilfolgen beschränkter Folgen

In einem archimedischen Körper K besitzt jede beschränkte Folge x_n eine Teilfolge[2] X_n, welche eine Cauchyfolge ist.

7.14.1 Hinweis

Wie später zu sehen ist, sind beschränkte Intervalle $[a, b]$ folgenkompakte, metrische Räume (siehe auch 11.5, Seite 61).

[2]Teilfolgen entstehen per Definition durch Weglassen von Folgengliedern aus einer gegebenen Folge

7.14.2 Beweis Teil 1

Beschränktheit der Folge: Es existiert also ein Intervall I mit

$$x_n \in I = [a,b] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Wir zerteilen $I = I' \cup I''$ wie oben beschrieben. Dann gilt

$$\mathbb{N} \ = \ \underbrace{A}_{\{n \in N, x_n \in I'\}} \ \cup \ \underbrace{B}_{\{n \in N, x_n \in I''\}}$$

$\mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge. Daher ist entweder A unendlich; in diesem Fall setze $I_1 = I'$. Ist A endlich und somit B unendlich, setze $I_1 = I''$. Als Konsequenz: Die Folge x_n enthält eine Teilfolge y_n mit Werten in I_1, welche dadurch entsteht, alle Folgenglieder weggelassen werden, welche nicht in I_1 liegen.

Beispiel: Sei $x_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ und $I = [-1,1]$, also $x_0 = 1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, \cdots$. Dann ist $I_1 = [-1,0]$ und $y_0 = -\frac{1}{2}, y_1 = -\frac{1}{4}, y_2 = -\frac{1}{6} \cdots$.

7.14.3 Beweis Teil 2 (Intervallschachtelung)

Durch Iteration erhält man eine absteigende Kette von Intervallen

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

der Länge

$$l(I_n) = \frac{1}{2^n} \cdot l(I) \ .$$

mit einer Ketten von Teilfolgen

$$\begin{array}{cc} x_0, x_1, x_2, \dots & \in I_0 \\ y_0, y_1, y_2, \dots & \in I_1 \\ z_0, z_1, z_2, \dots & \in I_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

7.14.4 Beweis Teil 3 (Diagonaltrick)

Die Diagonalfolge $x_0, y_1, z_2, \dots$ ist eine Teilfolge (!) der ursprünglichen Folge. Nenne sie ξ_n.

Diese Diagonalfolge ξ_n ist eine Cauchyfolge. Zum Nachweis sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu finden ist eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ so daß gilt:

$$n, m \geqslant N \implies d(\xi_n, \xi_m) < \varepsilon \ .$$

Aus $n, m \geqslant N$ folgt:

$$\underbrace{\xi_n}_{\in I_n} , \underbrace{\xi_m}_{\in I_m} \ \in \ I_N$$

Somit gilt

$$d(\xi_n, \xi_m) \ \leqslant \ l(I_n) = \frac{(b-a)}{2^N} \ .$$

Wähle $N \geqslant 2$ so groß, daß $2^N = (1+1)^N > 1+N > \varepsilon^{-1}(b-a)$ (Bernoulli Ungleichung und Archimedisches Axiom!). Dann ist $\frac{(b-a)}{2^N} < \varepsilon$. Also ist $d(\xi_n, \xi_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geqslant N$. Also ist die Teilfolge ξ_n eine Cauchyfolge, was zu zeigen war.

Beispiel: Für $x_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ ist die oben konstruierte Teilfolge ξ_n gegeben durch

$$\xi_0 = -\frac{1}{2}, \ \xi_1 = -\frac{1}{4}, \ \xi_2 = -\frac{1}{8}, \ \xi_3 = -\frac{1}{16}, \dots \ .$$

7.15 Monotone beschränkte Folgen

In einem archimedischen Körper ist jede monoton wachsende Folge

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

welche nach oben beschränkt ist $x_n \leqslant C$, eine Cauchyfolge. (Ditto für monoton fallende nach unten beschränkte Folgen).

Beweis: Nach Annahme ist dann die Folge x_n beschränkt. Wegen 7.14 existiert eine Teilfolge $\tilde{x}_n$ der Folge, welche eine Cauchyfolge ist: $d(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) < \varepsilon$ für alle $i, j \geqslant \tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon)$. Es gibt ein $N \geqslant \tilde{N}$, so dass $\tilde{x}_{\tilde{N}} = x_N$ (Teilfolge !). Für $n, m \geqslant N$ (oBdA $n \leqslant m$) gilt dann

$$\tilde{x}_{\tilde{N}} \leqslant x_n \leqslant x_m \leqslant \tilde{x}_m$$

wegen der Monotonie der Folge x_n. Also $d(x_n, x_m) \leqslant d(\tilde{x}_{\tilde{N}}, \tilde{x}_m)$ und $\tilde{N}, m \geqslant \tilde{N}$. Dies zeigt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geqslant N$.

7.16 Abgeschlossenheit

Sei $I = [a, b]$ oder $I = [a, \infty)$ oder $I = (\infty, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist $x_n \in I$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x, dann gilt $x \in I$.

Beweis: Angenommen $a \leqslant x_n$ gilt für alle n. Wäre $x < a$, dann gibt es ein n mit $d(x_n, x) < \varepsilon$ für $\varepsilon = a - x > 0$. Also $x_n = x + (x_n - x) \leqslant x + d(x_n, x) < x + \varepsilon = a$ im Widerspruch zu $x_n \geqslant a$. Es folgt $x \geqslant a$.

Folgerung: Insbesondere gilt für monoton wachsende beschränkte Folgen: *Alle Folgenglieder x_n sind kleiner gleich dem Limes*

$$x_n \leqslant lim_{i \to \infty} x_i \ .$$

Kapitel 8

Der Körper der reellen Zahlen

Konvergente Folgen sind immer Cauchyfolgen, wie wir bereits gesehen haben. Die Umkehrung gilt im allgemeinen aber nicht. $K = \mathbb{Q}$ ist ein archimedischer Körper, aber $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig[1].

Ein archimedischer Körper K heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in K konvergiert

Wir fixieren im folgenden einen archimedischen vollständigen Körper[2], und bezeichnen diesen Körper als den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Folgen in $\mathbb{R}$ nennen wir reelle Folgen.

Für reelle Folgen gilt:

- x_n konvergiert genau dann, wenn x_n eine Cauchyfolge ist.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt, und besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert.
- Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.
- Ist x der Grenzwert einer Folge, die in einem abgeschlossenen Intervall I enthalten ist, dann gilt $x \in I$.
- Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.
- Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $sup(X)$.

Nur die letzte Aussage bedarf noch eines Beweises.

[1] siehe Übungsblatt
[2] Man kann aus den Peano-Axiomen ableiten, dass ein solcher Körper existiert

8.1 Obere Schranken

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine reelle Zahl y heisst obere Schranke von X, wenn gilt
$$x \leqslant y \quad , \quad \forall x \in X \ .$$
Die Menge Y aller oberen Schranken von X ist genau dann nicht leer, wenn X nach oben beschränkt ist.

<u>1.Bemerkung</u>: Die Menge Y ist unter Limesbildung abgeschlossen. Sei $y_n \in Y$ eine Folge mit Grenzwert y. Ist $x \in X$, dann gilt $x \leqslant y_n$ für alle n. Also gilt $x \leqslant y$ wegen 7.16. Da dies für alle $x \in X$ gilt, folgt $y \in Y$.

<u>2.Bemerkung</u>: Ist $a_n \notin Y$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a, dann gilt $a \leqslant y$ für alle $y \in Y$. Dies folgt wieder aus 7.16, denn für a_n existiert ein $x_n \in X$ mit $a_n < x_n$. Also wegen $x_n \leqslant y$ gilt daher $a_n \leqslant y$ für alle n.

<u>Nun zum Existenzbeweis des Supremums $sup(X)$</u>: Wähle $a_0 \notin Y$ und $b_0 \in Y$. Dann gilt $a_0 \leqslant b_0$ (Bemerkung 2). Zerlege $I = [a_0, b_0]$ in zwei Teilintervalle $I = I' \cup I''$ um den Mittelpunkt $\frac{a_0+b_0}{2}$. Setze $I_1 = I'$ beziehungsweise $I_1 = I''$, je nachdem ob $\frac{a_0+b_0}{2}$ in Y oder nicht in Y liegt. Dann gilt $I_1 = [a_1, b_1]$ mit $a_1 \notin Y$ und $b_1 \in Y$. Iteriert man dies, erhält man eine Intervallschachtelung, und damit eine Kette von Zahlen
$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \cdots \qquad \cdots b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \ .$$
Die reellen Folgen a_n und b_n sind monoton und beschränkt, und konvergieren daher. Der Grenzwert b der Folge $b_n \in Y$ liegt in Y (Bemerkung 1). Es gilt
$$b - a = \lim_{n\to\infty}(b - b_n + b_n - a_n + a_n - a)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(b - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 + 0 + 0 = 0 \ ,$$
denn $a_n - a$ und $b - b_n$ sind Nullfolgen, ebenso wie die 'geometrische' Folge $b_n - a_n = \frac{l(I)}{2^n}$. Es folgt $a = b$. Jedes $y \in Y$ ist eine obere Schranke für den Grenzwert a der Folge $a_n \notin Y$ (Bemerkung 2). Gäbe es ein $y \in Y$ mit $y < b$, würde daraus folgen $a \leqslant y < b$ im Widerspruch zu $a = b$. Also ist b das kleinste Element der Menge Y, und damit die gesuchte kleinste obere Schranke von X
$$sup(X) = a = b \ .$$

<u>Beispiel</u>: Für $X = (0,1)$ ist $Y = [1, \infty)$ und $sup(X) = 1$. Für $X = (0,1]$ ist wieder $Y = [1, \infty)$, und $sup(X) = 1$.

Ist das Supremum $sup(X)$ in X enthalten, nennt man die Zahl das das <u>Maximum</u> $max(X)$ von X. Analog definiert das <u>Infimum</u> $inf(X)$ einer nach unten beschränkten Menge X, respektive das <u>Minimum</u> $min(X)$.

Kapitel 9

Reihen

Wir sind nun in Lage zu präzisieren, was wir in den Vorbemerkungen bereits auf naive Weise getan haben, nämlich was unter einer unendlichen Summe zu verstehen ist. Dies führt uns auf den Begriff der Reihen. Eine Reihe ist eine Folge, welche aus einer Folge x_n reeller Zahlen entsteht durch sukzessive Addition $x_0, x_+x_1, x_0+x_1+x_2, \cdots$. Auf diese Weise entsteht eine neue Folge reeller Zahlen, die Folge s_n der Partialsummen. Diese ist rekursiv definiert durch $s_n = s_{n-1}+x_n$ und $s_0 = x_0$, und man schreibt auch

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^{n} x_i \\ &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \ . \end{aligned}$$

Man sagt 'die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert', wenn die zugeordnete Folge s_n der Partialsummen eine konvergente Folge ist. Ist dies der Fall, dann bezeichnet man gleichzeitig den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$. Ist die Folge der Partialsummen nicht konvergent, sagt man $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert nicht.

9.0.1 Dezimalzahlen

Etwa

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^{-i}$$

$$= a_0, a_1 a_2 .... a_n$$

für eine Ziffernfolge $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definiert eine Reihe. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass jede solche Reihe konvergiert (Majorantenkriterium, geometrische Reihe). Dies kann man natürlich auch aus der Konvergenz monotoner beschränkter Folgen ableiten. Der Grenzwert definiert die Dezimalzahl

$$a_0, a_1 a_2 a_3 .... = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i} \ .$$

9.1 Cauchykriterium für Reihen

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$, so dass gilt

$$m \geqslant n \geqslant N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right| < \varepsilon$$

Beweis: Die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$ konvergiert genau dann, wenn s_n eine Cauchyfolge ist. Letzteres bedeutet: $\forall \varepsilon\, \exists N$ so dass für alle $n, m \geqslant N$ gilt

$$d(s_n, s_m) = \left| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right| < \varepsilon \ .$$

9.1.1 Folgerung 1

Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, dann ist x_n notwendiger Weise eine Nullfolge.

Beweis: Konvergiert die Reihe, dann liefert im Fall $m = n + 1$ das Cauchykriterium die Aussage

$$m \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |x_m| < \varepsilon \ .$$

Also ist x_m eine Nullfolge.

9.1.2 Folgerung 2 Leibnizkriterium

Für eine monoton fallende Nullfolge x_n konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$.

Beweis: Wir benutzen $(x_i - x_{i+1}) \geqslant 0$ für alle $i \geqslant 0$ (Monotonie). Für ungerades $m - n \geqslant 1$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (x_n - x_{n+1}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m) \\ &= x_n - (x_{n+1} - x_{n+2})) - \cdots - (x_{m-2} - x_{m-1}) - x_m \\ &\leqslant x_n - x_m = d(x_n, x_m) \ , \end{aligned}$$

und da x_n eine Cauchyfolge ist:

$$\left| \sum_{i=n}^{m} (-1)^i \cdot x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } n, m \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2}) \ .$$

Ist $m - n \geqslant 0$ gerade, folgt aus dem eben Bewiesenen und der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{i=n}^{m} (-1)^i \cdot x_i \right| < |x_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ ,$$

da für eine Nullfolge $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für alle genügend grossen n. Damit ist das Cauchykriterium auf die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$ anwendbar!

9.1.3 Beispiel

- Die Leibnizsche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert (Leibnizkriterium). [1]

9.1.4 Majorantenkriterium

Seien a_n und C_n reelle Folgen derart, dass gilt $|a_n| \leqslant C_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ .$$

Definition: Falls dieser Fall vorliegt, nennt man $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

eine Majorantenreihe.

Wegen $a_n \leqslant |a_n| \leqslant C_n$ konvergiert eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beweis: Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ konvergiert, gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ mit $\sum_{i=n+1}^{m} C_n \leqslant \varepsilon$ für $N \leqslant n+1 \leqslant m$ nach 9.1 (die Beträge können hier weggelassen werden wegen $C_i \geqslant 0$). Nach 9.1 genügt für die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ mit $|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \varepsilon$ für alle $N \leqslant n+1 \leqslant m$. Dies folgt unmittelbar aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (welche durch Induktion aus der Dreiecksungleichung 4.1 folgt)

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \ \leqslant \ \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| \ \leqslant \ \sum_{i=n+1}^{m} C_i \ < \ \varepsilon$$

Die Ungleichung für die Grenzwerte: Da

$$\sum_{i=0}^{n} C_i - \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (C_i - a_i) \geqslant 0 \ ,$$

gilt auch im Limes $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_i - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_i \geqslant 0$ nach 7.16.

[1] gegen den Grenzwert log(2) wie wir sehen werden

9.2 Geometrische Reihen

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ konvergiert nicht (klar)
- Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert genau dann wenn $|q| < 1$ gilt, und hat in diesem Fall den Wert

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n \;=\; \tfrac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1)}\,.$$

Die letzte Aussage benutzt folgende Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe

9.2.1 Die geometrische Summe

Für $q \neq 1$ gilt

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}}$$

Beweis: Die Formel stimmt für $N = 0$. Gilt die Formel für N, dann auch für $N + 1$ wegen

$$\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} + q^{N+1} \;=\; \frac{1 - q^{N+1} + (q^{N+1} - q \cdot q^{N+1})}{1 - q} \;=\; \frac{1 - q^{N+2}}{1 - q}\;.$$

Der Limes $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$: Wie wir bereits wissen, konvergiert die Reihe nicht für $q = 1$. Ist $q \neq 1$ existiert wegen 7.8.1 der Limes

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \;=\; \frac{1}{1 - q} - \frac{q}{1 - q} \lim_{N \to \infty} q^N$$

genau dann, wenn $|q| < 1$ (siehe 7.12), und hat dann den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel: Die Dezimalreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$ hat als Majorante die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{9}{10^i}$, welche im Prinzip die geometrische Reihe für $q = 1/10$ ist. Daher konvergiert die Dezimalreihe und definiert eine Zahl $\leqslant \frac{9}{1-q} = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} = 10$.

9.2.2 Quotientenkriterium

Gilt $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leqslant q < 1$ und $x_n \neq 0$ (für fast alle n), dann konvergiert die Reihe.

Beweis: Dann gilt $|x_n| \leqslant C \cdot q^n$ für alle n für eine geeignete gewählte Konstante C (benutze dazu vollständige Induktion). Die Konvergenzaussage (absolute Konvergenz!) führt man nun mittels des Majorantenkriteriums auf den Fall der geometrischen Reihe zurück!

9.2.3 Verdichtung

Sei a_n eine monoton fallende Folge von Zahlen $a_n \geqslant 0$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert} \quad .$$

<u>Beweis</u>: Für $N = 2^M - 1$ gilt

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{M} 2^n a_{2^n}\right) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) \leqslant \left(\sum_{n=0}^{M-1} 2^n a_{2^n}\right)$$

wegen

$$\begin{array}{llll} a_2 & +2a_4 & +4a_8 + \ldots \\ a_1 & +(a_2 + a_3) & +(a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots \\ a_1 & +2a_2 & +4a_4 + \ldots \end{array}$$

$a_2 \leqslant a_1 \leqslant a_1$, $2a_4 \leqslant (a_2 + a_3) \leqslant 2a_2$, $4a_8 \leqslant (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \leqslant 4a_4$ und so weiter.

Da die Folgen der Partialsummen monoton wachsend sind wegen $a_n \geqslant 0$, ist Konvergenz gleichbedeutend mit der Beschränktheit der Partialsummen. Obige Abschätzung beschränkt die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ durch die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ und umgekehrt.

Verdichtung der Harmonischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Die Harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht, wegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$.

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert dagegen, denn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ konvergiert.

9.3 Exponentialreihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $x \in \mathbb{R}$ *absolut. Den Grenzwert nennt man*

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Wir definieren hierbei „n Fakultät" durch

$$\begin{aligned} n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= \prod_{i=1}^{n} i \end{aligned}$$

mit $0! := 1$. Beispiel: $5! = 120$.

Beweis: Folgt für $x \neq 0$ aus dem Quotientenkriterium, denn $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \frac{|x|}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ für alle $n \geqslant 2|x|$. Der Fall $x = 0$ ist trivial.

9.3.1 Die Eulersche Zahl

Für $x \geqslant 0$ *konvergiert die Folge*

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

und hat den Grenzwert

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Für $x = 1$ definiert dies die Eulersche Zahl e.

Beweis: Wir benutzen das

9.3.2 Binomialtheorem

Sei K ein archimedischer Körper. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$, so dass für $x, y \in K$ gilt:

$$\boxed{(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i}$$

Zusätzlich ist:

- $$\binom{n}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Der Beweis erfolgt auf einem der Übungsblätter.

Beispiel $n = 2$:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} y^2 x^0 .$$

9.3.3 Beschränktheit der Folge x_n

Es gilt:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (\frac{x}{n})^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot (\frac{x}{n})^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n+1-i)}{i!} \cdot (\frac{x}{n})^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \frac{n-\nu}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1-\frac{\nu}{n}\right)
\end{aligned}$$

Für $i=0$ ist das Produkt per Definition gleich 1. Für $0 \leqslant \nu \leqslant i-1 < n$ gilt

$$0 < \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1-\frac{\nu}{n}\right) \leqslant 1 \ ,$$

also wegen $x \geqslant 0$

$$x_n \leqslant \sum_{i=0}^{n} \tfrac{x^i}{i!} \quad \leqslant exp(x) \ .$$

Die rechte Ungleichung folgt aus 7.16.

9.3.4 Monotonie der Folge

Für $n \geqslant m$ gilt $x_n \geqslant x_m$ wegen

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1-\frac{\nu}{n}\right) \\
\geqslant y_{n,m} &:= \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1-\frac{\nu}{n}\right) \\
\geqslant x_m &= \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1-\frac{\nu}{m}\right)
\end{aligned}$$

denn $1-\frac{\nu}{n} \geqslant 1-\frac{\nu}{m} \Leftrightarrow \frac{\nu}{m} \geqslant \frac{\nu}{n} \Leftrightarrow n \geqslant m$ (für $\nu \neq 0$).

9.3.5 Konvergenz der Folge

Da x_n monoton wächst, und $x_n \leqslant exp(x)$ gilt, konvergiert die Folge (7.15), und aus 7.16 folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant exp(x) \ .$$

9.3.6 Untere Schranke

Aus $(x_n - y_{n,m}) \geqslant 0$ für $n \geqslant m$ (Schritt 9.3.4) folgt (wegen 7.16)

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_{n,m}) \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_{n,m} \;\geqslant\; 0\;,$$

denn der Limes

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_{n,m} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\prod_{\nu=0}^{i-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\prod_{\nu=0}^{i-1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\end{aligned}$$

existiert. Also

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;\geqslant\; \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}$$

und damit im Limes $m \to \infty$ wegen 7.16

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;\geqslant\; exp(x)$$

Übungsaufgabe: Zeige $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ existiert, sowie

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1\;.$$

9.4 Umordnen

Eine Umordnung einer Reihe oder Folge wird definiert durch eine bijektive Abbildung

$$\alpha : \mathbb{N} \;\tilde{\to}\; \mathbb{N}\,.$$

Aus der Bijektivität folgt insbesondere: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass gilt

$$\alpha(\{0,1,2,\ldots,M\}) \;\supseteq\; \{0,1,2,\ldots,N\}$$

9.4.1 Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent. Sei $\alpha : \mathbb{N}\tilde{\to}\mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, und

$$y_n \;:=\; x_{\alpha(n)}$$

die umgeordnete Folge. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

Beweis Umordnungssatz: Die Partialsummen $s_m = \sum\limits_{n=0}^{m} x_n$ konvergieren.

Teil 1:

Nach dem Cauchykriterium gilt weiterhin $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit[2]

$$N \leqslant n \leqslant m \implies \left|\sum_{i=n}^{m} |x_i|\right| < \varepsilon$$

Teil 2:

Es existiert dann ein $M = M(\varepsilon, N)$, so dass gilt

$$\alpha(\{0,1,\ldots,M\}) \;\supseteq\; \{0,1,\ldots,N\}$$

insbesondere daher wegen $y_i = x_{\alpha(i)}$

$$x_0, x_1, \ldots, x_N \quad \text{eine Teilfolge von} \quad y_0, \ldots, y_M$$

[2]aufgrund der absoluten Konvergenz

Teil 3:

Sei nun $m \geqslant M = M(N,\varepsilon)$ beliebig. Bezeichne $\tilde{s}_m = \sum_{n=0}^{m} y_n$ die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe. Dann gilt[3]

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_m - s_m| &= \left|\sum_{n=0}^{m} y_n - \sum_{n=0}^{m} x_n\right| \\ &\stackrel{!}{=} \left|\sum_{i=N+1}^{K} \varepsilon_i x_i\right| \end{aligned}$$

Hierbei sind $\varepsilon_i \in \{-1,0,1\}$ geeignete Zahlen und $K = K(\varepsilon, N, m) \geqslant N+1$ ist eine geeignete natürliche Zahl.

Teil 4:

Aus der Dreiecksungleichung folgt daher

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_m - s_m| &\leqslant \sum_{i=N+1}^{K} \underbrace{|\varepsilon_i|}_{\in\{1,0\}} |x_i| \\ &\leqslant \sum_{i=N+1}^{K} |x_i| \qquad < \varepsilon \end{aligned}$$

wegen $K \geqslant N+1 \geqslant N = N(\varepsilon)$ und Schritt 1. Also ist $\tilde{s}_m - s_m$ eine Nullfolge.

Teil 5: Schluß des Beweises

Da s_m konvergiert, und da $\tilde{s}_m - s_m$ eine Nullfolge ist (Schritt 4), liefert $\tilde{s}_m = (\tilde{s}_m - s_m) + s_m$ im Limes $m \to \infty$ die Konvergenz von $\tilde{s}_m$ mit dem Limes

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} \tilde{s}_m = \lim_{m\to\infty} s_m} \quad .$$

9.4.2 Zerlegungssatz

Gegeben sei eine Folge x_n. Sei $\mathbb{N} = I_1 \sqcup I_2$ eine disjunkte Zerlegung in zwei unendliche Teilmengen. Dann existieren Bijektionen $\nu : \mathbb{N} \cong I_1$ und $\mu : \mathbb{N} \cong I_2$. Jede Wahl von ν und μ definiert eine Umordnung $y_{2i} = x_{\nu(i)}$ und $y_{2i+1} = x_{\mu(i)}$ der Folge x_n.

Ist $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent, dann kann man auf Grund des Umordnungssatzes anstelle von $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$ auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ schreiben. Die umgeordnete Reihe konvergiert gegen

$$\sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{j\in I_2} x_j$$

[3] Hier benutzen wir, dass der Umordnungssatz für endliche Summen in jedem Körper gilt. Dies zeigt man durch Induktion nach der Zahl der Summanden mit Hilfe des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes. Übungsaufgabe!

(beide Reihen konvergieren absolut) und dies ist wegen dem Umordnungssatz gleich
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \ .$$
Ohne die Annahme der absoluten Konvergenz ist diese Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig. Siehe Abschnitt 1.1.

9.5 Die Faltungsreihe

Die Folge $c_n := \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$ nennt man die Cauchyfaltung der Folgen a_n und b_n und schreibt

$$c_n = (a * b)_n \ .$$

Konvergieren $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a * b)_n$ absolut, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n \quad = \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Beweis des Doppelreihensatzes: Aus den Folgen a_i und b_i definiert man eine Doppelfolge

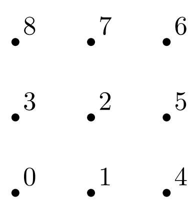
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$(i, j) \mapsto a_i \cdot b_j \ .$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann man mit den ganzzahligen Punkten im rechten oberen Quadranten in der Ebene identifizieren. Wählt man irgend eine Bijektion $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dann erhält man durch die Zusammensetzung eine Folge

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\tilde{\xi}"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

1.Wahl: Eine mögliche Wahl für ξ ist gegeben durch den ‘Quadratweg’



Für diese Wahl von ξ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ absolut. Dazu genügt die Beschränktheit von $\sum_{k=0}^{N} |\tilde{\xi}_k|$. Dies lässt dich nach oben abschätzen durch

$$\sum_{(i,j)\,\in\,\text{genügend großes Quadrat}} |a_i||b_j|$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\text{Oberkante des Quadrats}} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\text{Oberkante des Quadrats}} |b_j| \right)$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \; .$$

Ihr Grenzwert $\sum_{k=0}^{N} \tilde{\xi}_k$ ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen. Dieser Grenzwert stimmt überein mit dem Grenzwert der Teilfolge

$$\sum_{k=0}^{N} d_k$$

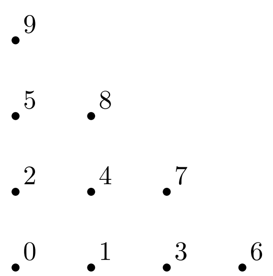
für

$$\begin{aligned} d_0 &= a_0 b_0 \\ d_1 &= a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1 \\ d_2 &= a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_0 b_2 \end{aligned}$$

usw. Diesen Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k$ kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} d_k \right) &\overset{!}{=} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{(i,j)\in[0,\ldots,N]^2} a_i \cdot b_j \right) \\ &\overset{\text{Distributivgesetz}}{=} \lim_{N\to\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^{N} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j \end{aligned}$$

2.Wahl: Analog definiert man eine Bijektion $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit Hilfe des 'Dreieckswegs'



sowie eine zugeordete Folge $\tilde{\eta} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}_k$ <u>konvergiert</u> also nach dem Umordnungsatz, und hat denselben Grenzwert wie $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$. Die Umordnungsabbildung ist $\alpha = \eta^{-1} \circ \xi$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} & \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[u] \arrow[dr, "\eta^{-1}"] & \\
\mathbb{N} \arrow[uur, "\tilde{\xi}"] \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & \mathbb{N} \arrow[uul, "\tilde{\eta}"']
\end{tikzcd}$$

Andererseits gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$, da die Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^{n} c_k$ eine Teilfolge der konvergenten Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^{n} \tilde{\eta}_k$ ist. Es folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

wie behauptet.

Beispiel: Für $a_i = \frac{x^i}{i!}$ und $b_j := \frac{y^j}{j!}$ gilt nach dem Binomialtheorem

$$c_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \, \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{(x+y)^n}{n!} \; .$$

Daraus folgt wegen 9.5 die

9.5.1 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\boxed{\exp(x+y) \;=\; \exp(x) \cdot \exp(y)}$$

Kapitel 10

Exkurs in die Lineare Algebra

10.1 Der n-dimensionale R-Vektorraum

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, .., n\} \ .$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ erklärt

$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda(x_1, \ldots, x_n) \\ &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \ . \end{aligned}$$

Sei $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Summe erklärt durch

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

10.2 Das Skalarprodukt

Sei $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Skalarprodukt (x, y) eine reelle Zahl erklärt durch

$$(x, y) \ = \ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \in \mathbb{R} \ .$$

10.3 Definition der Norm

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die Norm von x:

$$\boxed{||x|| \ = \ {}_{+}\sqrt{(x, x)}} \ .$$

Anmerkung: In einer der Übungsaufgaben haben wir gesehen, dass für jede reelle Zahl $\kappa \geqslant 0$ eine reelle Zahl $\eta \geqslant 0$ existiert, mit $\eta^2 = \kappa$. Die einzigen Lösungen der Gleichung $x^2 = \kappa$ sind dann $x = \pm\eta$. Man nennt $\eta =_+ \sqrt{\kappa}$ die positive Wurzel aus κ, und $-\eta =_- \sqrt{\kappa}$ die negative Wurzel aus κ. Für $\kappa = 0$ stimmen beide Wurzeln überein.

Wegen

$$(x,x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \;\geqslant 0$$

ist also $||x||$ wohldefiniert und

10.3.1

Es gilt $||x|| \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $||x|| = 0$ genau dann wenn $x = 0$.

Anschaulich ist $||x||$ die Länge des Vektors x, was man sich leicht mit Hilfe des Satzes von Phythagoras klar machen kann.

10.4 Schwartz'sche Ungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{|(x,y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||}\;.$$

Beweisskizze: Entweder gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x = t \cdot y$ (Proportionalität!), dann ist die Aussage trivial wegen

$$||t \cdot x|| = |t| \cdot ||x|| \quad , \quad t \in \mathbb{R}\;.$$

Oder x ist nicht proportional zu y. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$0 < ||x - t \cdot y||^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n}(x_i - ty_i)^2 \;=\; ||x||^2 - 2t(x,y) + t^2||y||^2$$

wegen $(x_i - ty_i)^2 = x_i^2 - 2tx_iy_i + t^2y_i^2$. Sei nun obdA $y \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
t^2 - \frac{2t(x,y)}{||y||^2} + \frac{||x||^2}{||y||^2} &> 0 \\
t^2 - \frac{2t(x,y)}{||y||^2} + \left(\frac{x \cdot y}{||y||^2}\right)^2 &> \frac{(x,y)^2}{||y||^4} - \frac{||x||^2}{||y||^2} \\
\left(t - \frac{(x,y)}{||y||^2}\right)^2 &> \frac{(x,y)^2 - ||x||^2 \cdot ||y||^2}{||y||^4}
\end{aligned}$$

Setzt man $t = \frac{(x,y)}{||y||^2}$, dann folgt $(x,y)^2 - ||x||^2 \cdot ||y||^2 < 0$.

10.4.1 Verschärfung

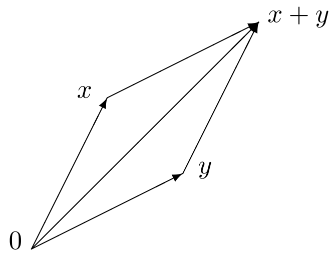
Dies zeigt sogar $|(x,y)| < ||x|| \cdot ||y||$, wenn x, y nicht proportional zueinander sind.

10.4.2 Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||} \ .$$

10.4.3 Bild



10.4.4 Beweis der letzten Folgerung

Es genügt $||x+y||^2 \leqslant (||x+y||)^2$ zu zeigen, da beide Seiten der Dreiecksungleichung positiv sind. Also genügt zu zeigen

$$||x+y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 \ .$$

Die linke Seite ist $||x||^2 + 2 \cdot (x, y) + ||y||^2$ (siehe oben für $t = -1$). Also folgt die gesuchte Dreiecksungleichung aus der Schwartz'schen Ungleichung

$$2 \cdot (x, y) \quad \leqslant \quad 2 \cdot ||x|| \cdot ||y||$$

Kapitel 11

Metrische Räume

Es sei X eine Menge und

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

Ein solches Paar (X, d) heißt metrischer Raum, wenn gilt

1. $d(x, y) \geqslant 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)

11.0.5 Beispiel

Der Euklidsche Raum $X = \mathbb{R}^n$ ist eine metrischer Raum bezüglich der Euklidschen Metrik $d(x, y) = ||x - y||$.

Beweis: Die Symmetrie folgt aus $|| - z|| = ||z||$. Die Dreiecksungleichung folgt aus 10.4.2, die erste Eigenschaft aus 10.3.1.

Konvention: Wir werden im folgenden oft von dem metrischen Raum $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ sprechen, ohne d explizit zu nennen. In diesen Fällen ist stillschweigend immer die Euklidsche Metrik gemeint.

11.0.6 Einschränken einer Metrik

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist (Y, d) wieder ein metrischer Raum.

11.1 Cauchyfolgen

Eine Folge $x_n \in X$ heißt Cauchyfolge im metrischen Raum (X, d), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad (n, m \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \; .$$

11.2 Konvergente Folgen

Eine Folge $x_n \in X$ heißt konvergent im metrischen Raum (X, d) falls gilt:

$$\exists x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow d(x, x_n) < \varepsilon)\ .$$

Wie im reellen Fall zeigt man nun

- *Der Grenzwert x einer in (X, d) konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt, und man schreibt*
$$x = \lim_{n\to\infty} x_n\ ,$$
und $d(x_n, x)$ ist eine reelle Nullfolge.
- *Jede in (X, d) konvergente Folge ist eine Cauchyfolge in (X, d).*
- *Jede Cauchyfolge in (X, d) ist beschränkt in (X, d), das heisst: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $d(x_n, x_0) < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Die Beweise übertragen sich wörtlich.

11.3 Vollständige metrische Räume

Ein metrische Raum (X, d) heisst vollständig, wenn jede Cauchyfolge in (X, d) in (X, d) konvergiert.

Beispiel: Der Euklidsche Raum $\mathbb{R}^n$ ist vollständig. Dies folgt leicht aus der folgenden

Übungsaufgabe: Eine Folge von Punkten konvergiert im $\mathbb{R}^n$ (ist eine Cauchyfolge im $\mathbb{R}^n$) genau dann wenn die n Koordinatenfolgen in $\mathbb{R}$ konvergieren (bzw. Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind).

11.4 Abgeschlossene Teilmengen

Eine Teilmenge

$$A \ \subseteq\ X$$

eines metrischen Raumes (X, d) heisst abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge x_n in (X, d), deren Folgenglieder x_n in A liegen, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

Beispiel: Ein abgeschlossenes Intervall $A = [a, b]$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes $\mathbb{R}$. Siehe 7.16.

11.4.1

Ist $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen, metrischen Raum (X, d), dann definiert die Einschränkung der Metrik d auf A einen vollständigen metrischen Raum (A, d).

Beweis: Ist x_n eine Cauchyfolge in (A, d), dann ist x_n auch eine Cauchyfolge in (X, d). In (X, d) konvergiert daher die Folge x_n gegen einen Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, da (X, d) vollständig ist. Da A abgeschlossen in (X, d) ist, gilt $x \in A$. Man sieht dann sofort aus der Definition: x_n konvergiert gegen x in (A, d).

11.5 Folgenkompaktheit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $x_n \in X$ eine in (X, d) konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiele:

- $X = [a, b]$ mit der Euklidschen Metrik. (Siehe 7.14).
- Jeder Quader $X = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ im $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidschen Metrik.

Offensichtlich ist jede abgeschlossene Teilmenge eines folgenkompakten metrischen Raumes wieder folgenkompakt (mit der eingeschränkten Metrik).

11.5.1 Hinweis

Offene Intervalle in $\mathbb{R}$ mit der Euklidschen Metrik sind nicht folgenkompakt, ebensowenig wie $\mathbb{R}$ selbst, denn die Folge $x_n = n$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

11.6 Der Banachsche Fixpunktsatz

Eine kontraktive Selbstabbildung f eines vollständigen metrischen Raums (X, d) in sich, besitzt einen eindeutig bestimmten Punkt[1] $\xi \in X$ *mit der Eigenschaft*

$$f(\xi) = \xi \ .$$

Zur Bezeichnung: Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen heisst kontraktiv, wenn es eine reelle Zahl

$$\kappa < 1$$

gibt mit der Eigenschaft

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \kappa \cdot d_X\big(x, x'\big)$$

für alle $x, x' \in X$.

11.6.1 Beweis der Eindeutigkeit

Wären $\xi \neq \xi' \in X$ Fixpunkte. Dann folgt aus $d(\xi, \xi') > 0$ und

$$d(\xi, \xi') \ = \ d(f(\xi), f(\xi')) \ \leqslant \ \kappa \cdot d(\xi, \xi')$$

ein Widerspruch.

11.6.2 Beweis der Existenz

Wir wählen $x_0 \in X$ beliebig und setzen

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f(x_0) \\ x_2 & = & f(x_1) \\ \vdots & & \end{array}$$

Beschränktheit der Folge

Aus der Dreiecksungleichung folgt durch vollständige Induktion

$$d(x_0, x_n) \leqslant d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{n-1}, x_n) \ .$$

Also

$$d(x_0, x_n) \leqslant d(x_0, x_1) + \kappa d(x_0, x_1) + \kappa^2 d(x_0, x_1) + ... + \kappa^{n-1} d(x_0, x_1) \ ,$$

wegen der Kontraktivität. Z.B.

$$\begin{array}{rcl} d(x_2, x_3) & = & d(f(x_1), f(x_2)) \\ & \leqslant & \kappa \cdot d(x_1, x_2) \\ & = & \kappa \cdot d(f(x_0), f(x_1)) \leqslant \kappa^2 \cdot d(x_0, x_1) \end{array}$$

[1] genannt Fixpunkt

Wegen $|\kappa| < 1$ und $\dfrac{1}{1-\kappa} = 1 + \kappa + \kappa^2 + ...,$ [2] erhält man

$$\boxed{d(x_0, x_n) \leqslant \frac{d(x_0, x_1)}{1-\kappa}}$$

Cauchykonvergenz

Die Folge x_n ist eine Cauchyfolge in (X, d): Sei oBdA $n, m \geqslant 1$ und wegen der Symmetrie von $d(.,.)$ obdA $n \leqslant m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \\ &\leqslant \kappa \cdot d(x_{n-1}), x_{m-1}) \ , \end{aligned}$$

und durch Iteration:

$$d(x_n, x_m) \leqslant \kappa^n \cdot d(x_0, x_{m-n})$$

Aus der oben gefunden Schranke folgt daher

$$d(x_n, x_m) \leqslant \kappa^n \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{1-\kappa} \ .$$

Da für eine beliebige Konstante C die geometrische Folge $\kappa^n \cdot C$ eine Nullfolge ist, gilt daher

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \Big(N \leqslant n \leqslant m \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon \Big) \ .$$

Also ist x_n eine Cauchyfolge in (X, d).

Konvergenz

Da X vollständig ist, konvergiert die Folge x_n in (X, d). Sei

$$\boxed{\xi = \lim_{n \to \infty} x_n}$$

der Limes der Folge x_n.

Fixpunkteigenschaft

Aus der Dreiecksungleichung und der Kontraktivität folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant d(\xi, f(\xi)) \leqslant d(\xi, x_n) + d(x_n, f(\xi)) \leqslant d(\xi, x_n) + \kappa \cdot d(x_{n-1}, \xi) \ .$$

Bildet man auf der rechten Seite den Limes $n \to \infty$, so folgt

$$0 \leqslant d(\xi, f(\xi)) \leqslant 0 + \kappa \cdot 0 = 0 \ .$$

Also $d(\xi, f(\xi)) = 0$. Das heisst $f(\xi) = \xi$.

[2] siehe geometrische Reihe

11.7 Das Newton Verfahren

Es gilt

$$exp(0) = 1 \ .$$

Sei $\eta \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen dann eine Lösung ξ der Gleichung

$$exp(\xi) = 1 + \eta \ .$$

Wir wollen zeigen, dass für alle $|\eta| < 0.18$ eine solche Lösung ξ existiert.

Eine Hilfsfunktion: Betrachte dazu die reellwertige Hilfsfunktion

$$f(x) = 1 + x - exp(x) + \eta$$

auf dem Intervall $X = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subseteq \mathbb{R}$. Das Intervall X ist ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der Euklidschen Metrik. Die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ ist eine kontraktive Abbildung von (X, d) nach $\mathbb{R}$

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \kappa \cdot d(x, y) \quad , \quad x, y \in X$$

für $\kappa = exp(\frac{1}{2}) - 1 = 0.64... < 0.65$. Dies folgt aus der Monotonie von exp (siehe Übungsaufgaben) und der nachfolgenden Hilfsrechnung 11.7.1.

Behauptung:

- f bildet X in sich ab, für $|\eta| < \frac{1-\kappa}{2}$.
- $f : (X, d) \to (X, d)$ ist kontraktiv

Die zweite Bedingung folgt aus $d(f(x), 0) \leqslant d(f(x), f(0)) + d(f(0), 0) \leqslant \kappa \cdot d(x, 0) + d(\eta, 0) \leqslant \frac{\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} = \frac{1}{2}$.

Fixpunktgleichung:

$$\xi = f(\xi) \iff \xi = 1 + \xi - \exp(\xi) + \eta \iff \exp(\xi) = 1 + \eta \ .$$

Somit zeigt der Fixpunktsatz im vorliegenden Fall:

$$[0.82, 1.18] \quad \subseteq \quad \exp\left([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\right)$$

Der Beweis des Fixpunktsatzes war konstruktiv, und liefert ein schnell konvergierendes, und leicht zu programmierendes Computerprogramm zur Bestimmung des Logarithmus $\xi = log(1 + \eta)$.

11.7.1 Hilfsrechnung

Für die reelle Funktion $f(x) = 1 + x - exp(x) + \eta$, definiert auf ganz $\mathbb{R}$, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-x^n + y^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (y - x) \cdot \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}}{n!} \\
&= (y - x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}}{n!}
\end{aligned}$$

Also wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &\leqslant |y - x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}}{n!} \right| \\
&\leqslant |y - x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \max(|x|, |y|)^{n-1}}{n!} \\
&= |y - x| \cdot \Big(-1 + \exp(\max(|x|, |y|))\Big) \\
&= d(x, y) \cdot \Big(-1 + \exp(\max(|x|, |y|))\Big)
\end{aligned}$$

Kapitel 12

Stetige Abbildungen

Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen heisst stetig auf (X, d_X), wenn die Abbildung f mit beliebiger Limesbildung[1] ,,vertauscht"

$$\boxed{f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)}$$

12.0.2 Variante: Stetigkeit im Punkt ξ

Die Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heisst stetig im Punkt $\xi \in X$, falls für alle Folgen $x_n \in X$ gilt

$$\boxed{x_n \to \xi \text{ impliziert } f(x_n) \to f(\xi)}$$

<u>Anders formuliert</u>: $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist stetig im Punkt $\xi \in X$, falls gilt

$$\lim_{x_n \to \xi} f(x_n) \quad = \quad f(\lim_{x_n \to \xi} x_n)$$

Offensichtlich ist $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig genau dann, wenn f stetig in allen Punkten ξ von X ist.

12.0.3 Beispiele

Die folgenden Abbildungen sind stetig:

1. Die identische Abbildung $id_X : (X, d_X) \to (X, d_X)$ definiert durch

$$id_X(x) = x\ .$$

2. Die konstante Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, definiert durch $f(x) = y_0$ (für einen festen Punkt y_0 von Y).

[1] Insbesondere führt f konvergente Folgen in konvergente Folgen über. Erinnert an die Eigenschaft linearer Abbildungen mit Addition und Skalarmultiplikation zu vertauschen.

3. Die Projektion $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf die i-te Koordinate
$$(x(1), x(2), \ldots, x(n)) \mapsto x(i) \ .$$
4. Kontraktive Abbildungen sind stetig.
5. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann ist
$$f(x) = d(x, x_0)$$
stetig auf (X, d) mit Werten in $\mathbb{R}$.

(Also für $X = \mathbb{R}, x_0 = 0$ ist die Abbildung $f(x) = |x|$ stetig auf $\mathbb{R}$).

Beweis: 1) Für die Identität ist die Aussage trivial. 2) Für die konstante Abbildung ebenfalls, da die konstante Folge immer konvergiert. 3) Nur zur Projektionsabbildung: Nach einer Übungsaufgabe konvergiert eine Folge von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn ihre n Koordinatenfolgen konvergieren. Dies impliziert die Stetigkeit der Koordiantenprojektionen. 4) Ist f kontraktiv, dann folgt aus $x_n \to \xi$ insbesondere $0 \leqslant d(f(x_n), f(\xi)) \leqslant \kappa \cdot d(x_n, \xi) \to 0$. Also $f(x_n) \to f(\xi)$. (Für das Argument wird $\kappa < 1$ nicht benötigt). 5) Es genügt für $f(x) = d_X(x, x')$ zu zeigen $d_Y(f(x), f(x')) \leqslant d_X(x, x')$ wegen 4) mit $\kappa = 1$. Dies folgt aber aus der unteren Dreiecksungleichung

12.0.4 Untere Dreiecksungleichung

In einem metrischen Raum (X, d_X) gilt für alle $x, x', z \in X$
$$\boxed{|d_X(x, z) - d_X(x', z)| \leqslant d_X(x, x')} \ .$$

Beweis: Es gilt $d_X(x, z) \leqslant d_X(x, x') + d_X(x', z)$, also $d_X(x, z) - d_X(x', z) \leqslant d_X(x, x')$. Da die rechte Seite symmetrisch in x, x' ist und positiv, folgt durch vertauschen von x und x' daher $|d_X(x, z) - d_X(x', z)| \leqslant d_X(x, x')$.

12.1 Komposition

Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig: Ist f stetig im Punkt ξ und ist g stetig im Punkt $f(\xi)$, dann ist $g \circ f$ stetig im Punkt ξ.

Beweis: Seien $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ und $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ stetig. Dann gilt für jede in (X, d_X) konvergente Folge $x_n \to \xi$
$$y_n = f(x_n) \to \eta = f(\xi) \ .$$
Da g stetig ist, gilt wegen $y_n \to \eta$ in (Y, d_Y)
$$g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \to g(\eta) = (g \circ f)(\xi) \ .$$
Also folgt $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(\xi)$ aus $x_n \to \xi$. Somit ist $g \circ f$ stetig.

12.2 Weitere Permanenzeigenschaften

Für stetige, reellwertige Funktionen

$$f, g : (X, d_X) \quad \to \quad \mathbb{R}$$

und $\xi \in X$ *ist*

- $f \pm g$ *stetig*
- $f \cdot g$ *stetig*
- $\frac{f}{g}$ *stetig in* ξ*, falls gilt* $g(\xi) \neq 0$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den ersten Fall. Die anderen Beweise sind ähnlich. Für $x_n \to \xi$ ist zu zeigen

$$(f + g)(x_n) \to (f + g)(\xi) \ ,$$

das heisst $f(x_n) + g(x_n) \to f(\xi) + g(\xi)$. Dies folgt aber sofort aus 7.8.1

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

12.2.1 Polynome sind stetig

Jedes Polynom

$$P(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *definiert eine stetige Funktion* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis: Satz 12.1 + 12.2

12.2.2 Gebrochen rationale Funktionen

Seien $P(x), Q(x)$ Polynome, und $Q(x)$ habe keine Nullstelle im Intervall $[a, b]$. Dann ist die gebrochen rationale Funktion

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig auf $[a, b]$.

12.2.3 Die Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig (ebenso die Funktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$*).*

Beweis: Wegen $\exp(x) = \exp(x - \xi) \cdot \exp(\xi)$ ist $exp = g \circ f$ für $f(x) = x - \xi$ und $g(y) = c \cdot \exp(y)$ für die Konstante $c = exp(\xi)$. Um die Stetigkeit von exp im Punkt $x = \xi$ zu zeigen, genügt es daher die Stetigkeit von g im Punkt $y = 0$ zu zeigen (benutze 12.1). Es genügt daher die Stetigkeit von exp im Punkt Null zu zeigen.

Auf $I = [-0.5, 0.5]$ gilt $exp(x) = 1 + x - f(x)$ für eine kontraktive Funktion (11.7). f ist daher stetig auf I (12.0.3), also auch $\exp(x)$ (12.2). Somit ist $\exp(x)$ stetig im Punkt Null.

12.3 Der Nullstellensatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$f(a) \leqslant 0 \quad , \quad f(b) \geqslant 0 \ ,$$

(oder umgekehrt). Dann existiert eine Nullstelle ξ von f im Intervall $[a, b]$.

Beweis: Die Menge

$$X_f = \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$$

ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt durch den Punkt b. Somit existiert das Supremum

$$\xi = \sup(X_f) \ .$$

Wegen $f(b) > 0$ gilt $b \notin X_f$. Also $\xi < b$.

Suprema: Nach Konstruktion des Supremums (siehe 8.1) existieren dann Folgen a_n, b_n, so dass gilt

- $a_n \nearrow \xi \qquad a_n \in X_f$
- $b_n \searrow \xi \qquad \xi < b_n \notin X_f$.

Stetigkeitsbetrachtung: Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) \ .$$

Wegen $f(a_n) \leqslant 0$ folgt daraus $f(\xi) \leqslant 0$. Ebenso gilt

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

und wegen $f(b_n) \geqslant 0$ folgt daraus $f(\xi) \geqslant 0$. Also gilt $f(\xi) = 0$, d.h. $\xi \in [a, b]$ ist eine Nullstelle von f.

12.3.1 Zwischenwertsatz

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Funktionswert η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Dies folgt, in dem man den Nullstellensatz auf die stetige Funktion $f(x) - \eta$ anwendet.

12.3.2 Folgerung

Die Exponentialfunktion definiert eine bijektive stetige Abbildung

$$\boxed{\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^*_{>0}, \cdot)} \ .$$

Dies induziert wegen der Funktionalgleichung einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe[2] $(\mathbb{R}.+)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}^*_{>0}, \cdot)$. Die Umkehrfunktion ist die Logarithmus Funktion

$$\boxed{log:\ \mathbb{R}^*_{>0} \to \mathbb{R}}\ .$$

Beweis: Die Exponentialfunktion ist streng monoton: $\exp(x) < \exp(y)$ für $x < y$ (siehe Übungsblatt). Also ist die Abbildung exp injektiv. Für $x \geqslant 0$ ist nach Definition $exp(x) = \sum_n \frac{x^n}{n!} \geqslant 1+x > 0$. Somit ist auch $exp(-x) = exp(x)^{-1} > 0$ (Funktionalgleichung). Also liegen die Werte in $\mathbb{R}_{>0}$. Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}_{>0}$ das Bild ist, genügt es (wegen demselben Argument) zu zeigen $\exp([0,\infty)) = \{y \in \mathbb{R}\ |y \geqslant 1\}$. Wegen $exp(0) = 1$ folgt dies aus dem Zwischenwertsatz, denn $exp(x) \geqslant 1 + x$ nimmt beliebig grosse Werte an für $x \geqslant 0$.

12.3.3 Information

Wegen $exp(z)\exp(-z) = exp(0) = 1$ nimmt die Exponentialabbildung nie den Wert Null an. Wie wir später sehen werden, ist die Abbildung

$$\exp:\ \mathbb{C} \quad \to \quad \mathbb{C}^*$$

surjektiv, aber nicht injektiv!

12.3.4 Bemerkung

Genauso wie in Abschnitt 12.3.2 zeigt man mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung, dass die streng monotone Funktion $x \mapsto x^n$ (für natürliches $n \geqslant 1$) eine Bijektion definiert von $[0,\infty)$ auf $[0,\infty)$. Die Umkehrfunktion nennt man $\sqrt[n]{x}$.

Übungsaufgabe: $\sqrt[n]{x} = exp(\frac{1}{n}log(x))$ für alle $x > 0$.

12.3.5 Bemerkung

Genauso wie in Abschnitt 12.3.2 zeigt man:

Eine streng monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert eine bijektive Abbildung $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$, welche eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ besitzt.

[2]Für den Begriff der Gruppe siehe die Vorlesung LA

12.4 Das Epsilon-Delta-Kriterium

Eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist stetig im Punkt $\xi \in X$ genau dann[3]*, wenn gilt:*

$$(*) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \Big(d_X(x, \xi) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon \Big)} \ .$$

<u>Man kann dies geometrisch interpretieren</u>: Die offene Kugel

$$K_\delta(\xi) = \{x \in X \mid d_X(x, \xi) < \delta\}$$

vom Radius δ um den Mittelpunkt ξ wird in die Kugel $K_\varepsilon(f(\xi))$ abgebildet:

$$f : K_\delta(\xi) \to K_\varepsilon(f(\xi)) \ .$$

<u>Beweis</u> (*) impliziert Stetigkeit in ξ: Es gelte $(*)$. Für eine konvergente Folge $x_n \to \xi$ müssen wir zeigen $f(x_n) \to f(\xi)$. Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \delta(\varepsilon)$ wie in $(*)$. Wegen $x_n \to \xi$ existiert ein $N = N(\delta)$ mit $d_X(x_n, \xi) < \delta$ für $n \geqslant N(\delta)$. Dann gilt wegen $(*)$

$$d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon \qquad \text{falls } n \geqslant N(\delta(\varepsilon)) \ .$$

Das heisst $f(x_n) \to f(\xi)$. Somit ist f stetig im Punkt ξ.

<u>Beweis</u> Stetigkeit im Punkt ξ impliziert $(*)$: Sei f stetig in ξ. Wir führen einen indirekten Beweis, um $(*)$ zu zeigen. Wäre $(*)$ falsch, dann gilt

$$\exists \varepsilon = \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \quad \Big(d_X(x_\delta, \xi) < \delta \text{ und } d_Y(f(x_\delta), f(\xi)) \geqslant \varepsilon_0 \Big) \ .$$

Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$ und schreiben dann x_n anstelle von x_δ. Wegen $d_X(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$ folgt dann die Konvergenz $x_n \to \xi$. Wegen der der Stetigkeit von f im Punkt ξ folgt daraus dann

$$f(x_n) \to f(\xi)$$

im Widerspruch zu $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ für das feste $\varepsilon_0 > 0$.

12.4.1 Folgerung

Eine unmittelbare Folgerung aus 12.4 ist: *Die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

einer <u>strikt monotonen stetigen</u> Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

[3]Dieses Kriterium ist oft nützlich, um die Stetigkeit einer gegebenen Funktion nachzuweisen

12.5 Gleichmässige Stetigkeit

Eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heisst <u>gleichmässig stetig</u>, wenn gilt

$$(**) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \xi \in X \quad \Big(d_X(x, \xi) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon \Big)} \ .$$

Eine gleichmässig stetige Funktion ist offensichtlich stetig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Jedoch gilt für folgenkompakte Räume die folgende Aussage

12.6 Stetig versus gleichmäßig stetig

Ist (X, d_X) <u>folgenkompakt</u>, dann ist jede stetige Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ gleichmässig stetig.

<u>Beweis</u>: Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis. Wäre die Aussage falsch (wäre f also nicht gleichmäßig stetig), dann würde gelten

$$\exists \varepsilon = \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta\ \exists \xi_\delta\ \exists x_\delta \quad \Big(d_X(x_\delta, \xi_\delta) < \delta \text{ und } d_Y(f(x_\delta), f(\xi_\delta)) \geqslant \varepsilon_0 \Big) \ .$$

ObdA setzten wir wieder $\delta = \frac{1}{n}$ und benennen x_δ und ξ_δ um in x_n und ξ_n. Da (X, d_X) folgenkompakt ist, kann man durch (zweimaligen) Übergang zu einer Teilfolge die Konvergenz in (X, d_X) annehmen

$$x_n \to x \quad , \quad \xi_n \to \xi \ .$$

Daraus folgt wegen der Stetigkeit von f dann in (Y, d_Y)

$$f(x_n) \to f(x) \quad , \quad f(\xi_n) \to f(\xi) \ .$$

Nun gilt wegen $d_X(x_n, \xi_n) < \frac{1}{n}$ (dies gilt auch für die Teilfolgen!) und der Dreiecksungleichung $0 \leqslant d_X(x, \xi) \leqslant d_X(x, x_n) + d_X(x_n, \xi_n) + d_X(\xi_n, \xi)$ im Limes $n \to \infty$ dann $d_X(x, \xi) = 0$. Also

$$x = \xi \ .$$

Daraus folgt $f(x) = f(\xi)$, und wegen der Dreiecksungleichung

$$d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) \leqslant d_Y(f(x_n), f(x)) + d_Y(f(\xi), f(\xi_n)) \ .$$

Im Limes $n \to \infty$ ist die rechte Seite als Summe von zwei Nullfolgen eine Nullfolge. Also

$$\lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) = 0 \ .$$

Dies steht im Widerspruch zu $d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

12.7 Maxima und Minima

Jede stetige reellwertige Funktion

$$f : (X, d) \quad \to \quad \mathbb{R}$$

auf einem folgenkompakten metrischen Raum (X, d) *ist*

1. *gleichmäßig stetig*
2. f *beschränkt*
3. *und nimmt ihr Maximum und Minimum an.*

Im wichtigsten Fall ist später $X = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall.

Beweis: Teil 1. Wurde in 12.6 gezeigt. Teil 2. Wäre die Funktion f nicht nach oben beschränkt, würde eine Folge $x_n \in X$ existieren mit

$$f(x_n) \geqslant n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da (X, d) folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\tilde{x}_n \to x$. Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) \quad = \quad f(x) \ .$$

Aber $f(\tilde{x}_n) \geqslant n$ wächst über alle Schranken. Ein Widerspruch!

Teil 3. Da f nach Teil 2 nach oben beschränkt ist, existiert das Supremum

$$y \ := \ \sup(f(X)) \quad , \quad f(X) = \big\{ f(x) \mid x \in X \big\}$$

der Menge $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Nach unserer Konstruktion des Supremums einer beschränkten Menge existiert eine Folge $x_n \in X$ mit

$$f(x_n) = y_n \quad \nearrow \quad y \ .$$

Da f stetig, erhält man nach Übergang zu einer konvergenten Teilfolge $\tilde{x}_n \to x$ (Folgenkompaktheit)

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = f(\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n) = f(x) \ .$$

Also liegt $y = f(x)$ im Bild von f. Somit ist y das Maximum der Funktion f.

Bilder von abgeschlossenen Intervallen

Kombiniert man den letzten Satz mit dem Mittelwertsatz, so erhält man

Korollar: *Das Bild eines abgeschlossenen Intervalls* $[a, b]$ *unter einer stetigen Abbildung* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist ein abgeschlossenes Intervall.*

Kapitel 13

Integration

Wir fixieren ein Intervall $I = [a, b]$ und eine beschränkte Funktion

$$f : [a, b] \quad \to \quad \mathbb{R}$$

Eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_r\}$ des Intervall ist gegeben durch Punkte

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_r = b \ ,$$

welche Teilintervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ der Länge $l(I_i) = x_i - x_{i-1}$ definieren.

Verfeinerungen: Eine Zerlegung Z' heisst Verfeinerung von Z, wenn gilt $Z \subseteq Z'$. Offensichtlich gibt es zu je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 eine gemeinsame Verfeinerung Z, zum Beispiel

$$Z \quad = \quad Z_1 \cup Z_2$$

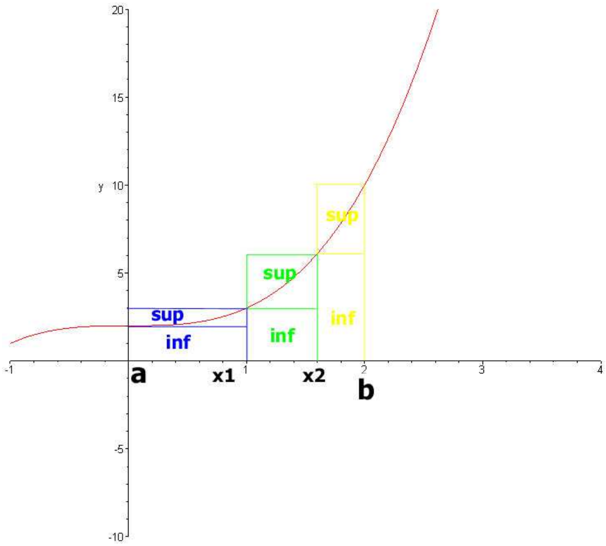
13.0.1 Ober/Untersummen

Wir definieren Obersummen $O(Z, f)$ und Untersummen $U(Z, f)$ bezüglich der Zerlegung Z

$$\begin{aligned} O(Z, f) &= \sum_{i=1}^{r} |I_i| \cdot \sup_{x \in I_i} f(x) \\ U(Z, f) &= \sum_{i=1}^{r} |I_i| \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) \ . \end{aligned}$$

Da f nach Annahme eine auf I beschränkte Funktion ist, existieren die Suprema $\sup\limits_{x \in I_i} f(x)$ und Infima $\inf\limits_{x \in I_i} f(x)$.

13.1 Visualisierung der Ober/Untersummen



Das Integral soll die Fläche 'unter einer Funktion' beschreiben. Dazu approximiert man die Funktion f durch Treppenfunktionen f_1, f_2 mit der Eigenschaft $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$ für $x \in I$. Die Sprungstellen definieren eine Zerlegung Z. Fixiert man Z, visualisieren die Treppenfunktionen f_1 bzw. f_2 im Bild die 'bestmögliche' Approximation durch Treppenfunktionen mit Sprungstellen in Z. Die Werte dieser Approximationen werden durch die Suprema und Infima von f auf den Teilintervallen der Zerlegung Z definiert. Die zugehörigen Flächen definieren die Untersumme beziehungsweise Obersumme.

13.2 Offensichtliche Eigenschaften

1. $U(Z,f) \leqslant O(Z,f)$
2. $U(Z,f) \leqslant U(Z',f)$ falls $Z \subseteq Z'$
3. $O(Z',f) \leqslant O(Z,f)$ falls $Z \subseteq Z'$
4. Für beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt $U(Z_1,f) \leqslant O(Z_2,f)$.

<u>Beweis</u>: Die ersten drei Aussagen sind evident. Die vierte Aussage folgt aus den ersten drei Aussagen. Wähle dazu eine gemeinsame Verfeinerung $Z' = Z_1 \cup Z_2$.

$$U(Z_1,f) \overset{(2)}{\leqslant} U(Z',f) \overset{(1)}{\leqslant} O(Z',f) \overset{(3)}{\leqslant} O(Z_2,f) \ .$$

Bei fester Wahl von Z_2 erhält man eine nach oben hin beschränkte Menge von Untersummen.

13.2.1 Beachte

Aus Rechenregel (4) folgt die Existenz des Supremums $\sup\limits_{Z_1} U(Z_1,f)$ mit der Schranke $\sup\limits_{Z_1} U(Z_1,f) \leqslant O(Z_2,f)$ für beliebiges Z_2. Analog folgt die Existenz von $\inf\limits_{Z_2} O(Z_2,f)$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{Z_1} U(Z_1,f) \quad \leqslant \quad \inf_{Z_2} O(Z_2,f)$$

13.3 Integrierbare Funktionen

Eine beschränkte Funktionen

$$f : [a, b] \quad \to \quad \mathbb{R}$$

heisst integrierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$, falls gilt:

$$\sup_{Z_1} U(Z_1, f) \quad = \quad \inf_{Z_2} O(Z_2, f)$$

Diesen Wert nennt man das Integral der integrierbaren Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx} \quad .$$

Das Epsilon-Kriterium:

Eine beschränkte Funktion f auf $[a, b]$ ist genau dann integrierbar, wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z so, dass gilt

$$O(Z, f) - U(Z, f) \quad < \quad \epsilon \; .$$

Der Beweis dieses Kriteriums ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition.

Beispiel: Die konstante Funktion $f(x) = 1$ ist integrierbar auf $[a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = (b - a)$, denn $U(Z, f) = O(Z, f) = (b - a)$ gilt in diesem Fall für alle Z.

13.3.1 Triviale Abschätzungen

Offensichtlich folgt aus (2) und (3) bei Wahl von $Z = \{a, b\}$

$$(b - a) \cdot \inf_{x \in [a,b]} f(x) \overset{(2)}{\leqslant} \int_a^b f(x)dx \overset{(3)}{\leqslant} (b - a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} f(x) \; .$$

Also

- (Monotonie) Gilt $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$.
- $\left| \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant |b - a| \cdot \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$

13.4 Stetige Funktionen sind integrierbar

Jede auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f ist integrierbar auf $[a, b]$.

Beweis: Schritt 1. Jede stetige Funktion f ist beschränkt auf $[a, b]$ nach Satz 12.7. Damit ist diese notwendige Voraussetzung für die Integrierbarkeit bereits erfüllt.

Schritt 2. Für die Integrierbarkeit von f genügt es nach dem ε-Kriterium zu zeigen, dass für $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung zu finden mit

$$O(Z, f) - U(Z, f) \ < \ \varepsilon \ .$$

Wegen

$$\begin{aligned} O(Z, f) - U(Z, f) &= \sum_{i=0}^{r} \ l(I_i) \cdot \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{r} \ l(I_i) \cdot \max_{i=1,\dots,r} \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \\ &= (b - a) \cdot \max_{i=1,\dots,r} \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \end{aligned}$$

genügt es für alle $i = 0, .., r$ zu zeigen

$$\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \ < \ \frac{\varepsilon}{a - b} \ .$$

Der Einfachheit halber nehmen wir jetzt $a - b = 1$ an.

Schritt 3. Wir benutzen nun, dass jede stetige Funktion auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist (wiederum Satz 12.7). Sei Z irgend (!) eine Zerlegung mit $|I_i| < \delta$ für alle i. Ist dann $\delta > 0$ gewählt wie in 12.5 $(**)$, so folgt

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \ .$$

Dies Voraussetzung $|x - x'| < \delta$ ist nach Wahl von Z für alle $x, x' \in I_i$ (und alle i) erfüllt. Es folgt

$$\left| \sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right| \ < \ \varepsilon$$

Also ist f integrierbar.

13.5 Linearität des Integrals

Seien f, g beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$, seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstant. Dann ist

$$h(x) \quad := \quad \alpha f(x) + \beta g(x)$$

beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx \quad = \quad \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

Beweis: Schritt 1. Für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad \alpha U(Z, f) + \beta U(Z, g) \quad &\leqslant \quad U(Z, \alpha f + \beta g) \\ &\leqslant \quad O(Z, \alpha f + \beta g) \\ &\leqslant \quad \alpha O(Z, f) + \beta O(Z, g) \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt dabei aus folgendem Hilfssatz (ohne Beweis)

$$\alpha \inf_{x \in I_\nu} f(x) + \beta \inf_{x \in I_\nu} g(x) \;\leqslant\; \inf_{x \in I_\nu} (\alpha f + \beta g)(x) \;.$$

Die zweite Ungleichung folgt aus 13.2, die dritte ist analog zur ersten.

Schritt 2. Wähle nun Folgen von Zerlegungen Z resp. $\tilde{Z}$ mit

$$U(Z, f) \nearrow \int_a^b f(t)dt \qquad , \qquad U(\tilde{Z}, g) \nearrow \int_a^b g(t)dt$$

und

$$O(Z, f) \searrow \int_a^b f(t)dt \qquad , \qquad O(\tilde{Z}, f) \searrow \int_a^b g(t)dt \;.$$

Schritt 3.

- Man überlege sich, daß man obdA $Z = \tilde{Z}$ gewählt werden kann (gemeinsame Verfeinerung!)
- Die Ungleichungskette $(*)$ verifiziert das ε-Kriterium, und liefert im Limes

$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt \quad &\leqslant \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\, dt \\ &\leqslant \quad \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

13.6 Intervalladditivität

Sei $\xi \in [a, b]$ ein Punkt und

$$f : [a, b] \quad \to \quad \mathbb{R}$$

beschränkt. Dann sind äquivalent:

1. *f ist integrierbar $I_1 = [a, \xi]$ und $I_2[\xi, b]$*
2. *f ist integrierbar auf ganz $I = [a, b]$*

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, gilt die Additivität:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx$$

Zusatz: Setzt man formal $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, dann gilt dies für alle a, b, ξ.

13.6.1 Beweis

Schritt 1. Für den Nachweis der Integrierbarkeit von f auf I, kann man sich darauf beschränken Zerlegungen Z von I zu betrachten, die den Punkt ξ enthalten (mittels Verfeinerung !). Ist Z eine solche Zerlegung von I, dann gehört dazu eine Zerlegung Z_1 von I_1 und eine Zerlegung Z_2 von I_2, und die Umkehrung davon gilt auch. Unmittelbar aus den Definitionen folgt weiterhin

$$U(Z, f) = U(Z_1, f) + U(Z_2, f) \quad , \quad O(Z, f) = O(Z_1, f) + O(Z_2, f) \ .$$

Schritt 2. Aus (1) folgt (2). Nach Annahme existieren nach dem ε-Kriterium dann Zerlegungen Z_1 und Z_2 von I_1 und I_2 mit

$$O(Z_i, f) - U(Z_i, f) < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Ist Z die zugehörige Zerlegung auf $[a, b]$, folgt daraus wegen Schritt 1

$$O(Z, f) - U(Z, f) = O(Z_1, f) + O(Z_2, f) - U(Z_1, f) - U(Z_2, f) < \varepsilon \ .$$

Dies impliziert auf Grund des ε-Kriteriums die Integrierbarkeit von f auf I.

Schritt 3. Aus (2) folgt (1). Sei Z eine Zerlegung von I mit

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon \ .$$

Wegen Schritt 1 gilt dann $O(Z_1, f) - U(Z_1, f) + O(Z_2, f) - U(Z_1, f) < \varepsilon$, und wegen $O(Z_i, f) - U(Z_i, f) \geqslant 0$ dann

$$O(Z_i, f) - U(Z_i, f) < \varepsilon$$

für $i = 1, 2$. Also ist f integrierbar auf I_1 und I_2 (ε-Kriterium). Aus der Formel in Schritt 1 für die Untersummen folgt daraus die Additivität des Integrals durch Limesbildung über Z.

13.7 Definition - Differenzierbarkeit

Eine Funktion

$$F : [a, b] \quad \to \quad \mathbb{R} \quad , \quad a < b$$

heißt differenzierbar[1] im Punkt $\xi \in [a, b]$, falls für jede Folge $x_n \to \xi$ aus $[a, b]$ die Folge der reellen Zahlen

$$a_n \quad = \quad \frac{F(\xi) - F(x_n)}{\xi - x_n}$$

konvergiert, wobei nur angenommen wird:

- $x_n \neq \xi$ für alle n.

Es ist dann klar (Mischen der Folgen), dass der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge x_n abhängt. Den somit wohldefinierten Grenzwert nennt man die Ableitung $F'(\xi)$ der differenzierbaren Funktion F im Punkt ξ

$$(*) \quad F'(\xi) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x_n}$$

F heißt diffbar auf $[a, b]$, falls F in allen Punkte $\xi \in [a, b]$ diffbar ist.

13.8 Der Hauptsatz (1. Version)

Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} F : [a, b] \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad \int_a^x f(t)\, dt \end{aligned}$$

eine diffbare Funktion auf $[a, b]$, und es gilt

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Hinweis

Dies ist eine nicht ganz vollständige Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Die vollständige Formulierung des Hauptsatzes findet sich in 14.8 (Seite 88) und besagt, dass die sogenannte Stammfunktion $F(x)$ auf $[a, b]$ durch die Gleichung $F'(x) = f(x)$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

[1] nachfolgend wird dieses Wort mit „diffbar" abgekürzt

13.8.1 Beweis

Wähle eine konvergente Folge $x_n \to \xi$ mit $x_n \neq \xi$ für alle n. Dann ist

$$\frac{F(\xi)-F(x_n)}{\xi - x_n} = \frac{\int_a^\xi f(t)\,dt - \int_a^{x_n} f(t)\,dt}{\xi - x_n} = \frac{\int_a^\xi f(t)\,dt + \int_{x_n}^{a} f(t)\,dt}{\xi - x_n} \overset{(13.6)}{=} \frac{\int_{x_n}^\xi f(t)\,dt}{\xi - x_n} \ .$$

Zu zeigen ist nun im Limes $n \to \infty$

$$\frac{\int_{x_n}^\xi f(t)\,dt}{\xi - f(\xi)} - f(\xi) \quad \longrightarrow \quad 0 \ .$$

Kleine Umformung

$$\int_{x_n}^\xi \underbrace{f(\xi)}_{\text{konst. Funktion}} dt \ = \ f(\xi)\int_{x_n}^\xi dt \ = \ f(\xi)\cdot(\xi - x_n) \ .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{x_n}^\xi f(t)\,dt}{\xi - f(\xi)} - f(\xi) \quad &= \quad \frac{\int_{x_n}^\xi f(t)\,dt - \int_{x_n}^\xi f(\xi)\,dt}{\xi - x_n} \\
&\overset{\text{Linearität}}{=} \quad \frac{\int_{x_n}^\xi \big(f(t)-f(\xi)\big)\,dt}{\xi - x_n}
\end{aligned}$$

Dies liefert die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\int_{x_n}^\xi \big(f(t)-f(\xi)\big)\,dt}{\xi - x_n} \right| \quad &\overset{13.3.1}{\leqslant} \quad \frac{|\xi - x_n| \cdot \sup\limits_{y\in[x_n,\xi]} |f(y)-f(\xi)|}{|\xi - x_n|} \\
&= \quad \sup_{y\in[x_n,\xi]} |f(y)-f(\xi)| \\
&\overset{n\to\infty}{\to} \quad 0 \ ,
\end{aligned}$$

denn f ist <u>gleichmäßig stetig</u> auf I (Satz 12.7): Es gilt also

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon)\ \forall y, \xi\ \Big(|y-\xi| < \delta \Longrightarrow |f(y)-f(\xi)| < \epsilon\Big) \ .$$

Aus $n \geqslant N(\delta)$ folgt daher $|x_n - \xi| < \delta$, und somit $\sup\limits_{y\in[x_n,\xi]} |f(y)-f(\xi)| < \varepsilon$.

Kapitel 14

Differenzierbare Funktionen

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein beliebige Funktion und sei $a < b$. Sei ξ ein Punkt in $[a, b]$ und n eine natürliche Zahl.

14.1 Definition - Ordnung

Wir schreiben $f(x) = o\big((x-\xi)^n\big)$ und sagen: f ist von der Ordnung klein n im Punkt ξ genau dann, wenn eine Funktion h existiert mit der Eigenschaft

$f(x) = (x-\xi)^n \cdot h(x)$ mit

$h(\xi) = 0$ und

h ist stetig im Punkt $x = \xi$

Beispiel: $f(x) = (x-\xi)^2$ ist $o(x-\xi)$ aber ist nicht $o((x-\xi)^2)$.

Beispiel: $f(x) = |x-\xi|^{\frac{3}{2}}$ ist $o(x-\xi)$ aber ist nicht $o((x-\xi)^2)$.

Bemerkung: Sind f, g von der Ordnung $o((x-\xi)^n)$, dann ist auch $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ von der Ordnung $o((x-\xi)^n)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Weiterhin: Aus $f(x) = o((x-\xi)^n)$ und $g(x) = o((x-\xi)^m)$ folgt

$$f(x) \cdot g(x) = o\Big((x-\xi)^{n+m}\Big)$$

Schliesslich gilt

$$f(x) \pm g(x) = o\Big((x-\xi)^{min(n,m)}\Big) .$$

14.1.1 Eine Äquivalenzrelation

$$f(x) \sim g(x) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} f(x) - g(x) = o((x-\xi)^n)$$

definiert eine Äquivalenzrelation. Uns interessiert nun vor allem der Spezialfall $n = 1$.

14.2 Tangenten

f heißt linear approximierbar im Punkt ξ, wenn reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt

$$f(x) \sim g(x) = a + b(x - \xi)$$

genauer:

$$f(x) - a - b(x - \xi) = o(x - \xi)$$

Bemerkung: Die Funktion $g(x) = a + b(x - \xi)$ definiert eine Gerade. Ist f linear approximierbar im Punkt ξ, dann sind a, b (das heisst die Geradengleichung) eindeutig durch f und ξ bestimmt. Man nennt dann die durch $g(x)$ definierte Gerade die Tangente von $f(x)$ im Punkt ξ.

14.3 Hinweis

Es wird empfohlen vor dem nächsten Lemma sich die Definition von 13.7 (siehe Seite 81) in Erinnerung zu rufen.

14.4 Differenzierbar versus linear approximierbar

Es sind äquivalent:

1. *$f(x)$ ist differenzierbar in ξ mit Ableitung $f'(x)$*
2. *Die Funktion* $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} & ; x \neq \xi \\ f'(\xi) & ; x = \xi \end{cases}$ *ist im Punkt ξ stetig.*
3. *$f(x)$ ist linear approximierbar im Punkt ξ durch die Gerade*

$$g(x) = a + b(x - \xi) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi)$$

d.h.

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi) + o(x - \xi)$$

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Wegen (a) gilt

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{f}(y_n) = f'(\xi)$$

für alle konvergenten Folgen $y_n \to \xi$ mit $y_n \neq \xi$ für alle n. Zu zeigen ist

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{f}(x_n) = f'(\xi)$$

für alle Folgen $x_n \to \xi$. Dies folgt aber sofort aus dem Hilfssatz und der Wahl $a = f'(\xi) = \tilde{f}(\xi)$.

Hilfssatz: *Sei x_n eine Folge und $y_n \to a$ eine konvergente Teilfolge mit Limes a. Sind alle Folgenglieder, welche nicht in der Teilfolge y_n liegen, gleich a, dann gilt $x_n \to a$.*

$(b) \Rightarrow (c)$: Aus der Definition von $\tilde{f}(x)$ folgt

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \underbrace{\overbrace{[\tilde{f}(x) - f'(\xi)]}^{h(x)} \cdot (x-\xi)}_{o(x-\xi)} \; .$$

Dann ist $h(x) := \tilde{f}(x) - f'(\xi)$ stetig in ξ ist, da $\tilde{f}$ nach Annahme stetig in ξ ist, und $h(\xi) = \tilde{f}(\xi) - f'(\xi) = 0$. Dies zeigt (c).

$(c) \Rightarrow (a)$. Aus (c) folgt für eine im Punkt ξ stige Funktion $h(x)$ mit $(\xi) = 0$

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = f'(\xi) + h(x_n)$$

und im Limes $x_n \to \xi, x_n \neq \xi$ ergibt sich Aussage (a)

$$lim_{x \to \xi} \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = f'(\xi)$$

wegen der Stetigkeit von $h(x)$ im Punkt ξ und der Eigenschaft $h(\xi) = 0$.

14.5 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Sei $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $\xi \in [a,b]$, dann ist f stetig im Punkt ξ.

Beweis: Sei $x_n \to \xi$ eine konvergente Folge mit $x_n \in [a,b]$. Dann konvergiert wegen der Implikation (a) $\Longrightarrow$ (c) von 14.4

$$f(x_n) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x_n - \xi) + h(x_n) \cdot (x_n - \xi)$$

gegen $f(\xi)$. Dies folgt aus den Permanenzsätzen für stetige Abbildungen, denn $h(x)$ ist stetig im Punkt ξ. Es folgt damit die Behauptung.

14.6 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

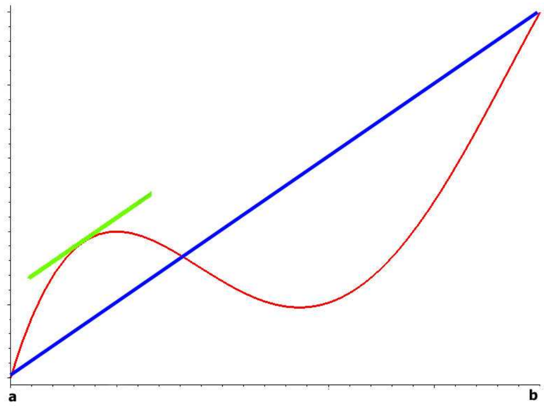
Sei f differenzierbar auf $[a, b]$. Sei $a < b$. Dann existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$, so dass gilt:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)}$$

Bemerkung: Wie der Beweis zeigen wird, genügt für die Schlussfolgerung bereits die etwas schwächere Voraussetzung, dass $f(x)$ stetig ist auf $[a, b]$ und differenzierbar ist in jedem Punkt $\xi \in (a, b)$.

14.6.1 Visualisierung des Mittelwertsatzes

Der Satz sagt aus, dass es mindestens einen Punkt im Intervall gibt, der die selbe Steigung hat, wie die Sekante durch die beiden Eckpunkte des Integrals.



Beweis im Spezialfall f(a) = f(b): Zu zeigen ist in diesem Fall $\exists \xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Aus den Annahmen folgt die Stetigkeit von f auf $[a, b]$. Also nimmt f sein Maximum und Minimum auf $[a, b]$ an, denn $[a, b]$ ist ein folgenkompakter metrischer Raum.
Wegen $f(a) = f(b)$ tritt dann einer der folgenden Fälle auf

- $f = const$, oder
- das Minimum wird in (a, b) angenommen
- das Maximum wird in (a, b) angenommen

Der Fall, wenn f konstant ist ist trivial. Wir können daher obdA annehmen, dass ein Extremwert von f in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ angenommen wird. ObdA (ersetze sonst f durch $-f$) sei $f(\xi)$ im folgenden ein Maximum. Dann gilt

Linksseitiger Limes: Für jede linksseitige Folge $x_n \to \xi$, d.h. mit der Eigenschaft $x_n < \xi$, gilt dann

$$f'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(\xi) - f(x_n)}^{\geqslant 0}}{\xi - x_n}$$

Da Zähler und Nenner positiv ist, gilt dann

$$\frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} > 0 \ .$$

Somit gilt für den Limes

$$f'(\xi) \geqslant 0$$

Rechtsseitiger Limes: Wähle nun $\tilde{x}_n \to \xi$ mit $x_n > \xi$. Dann gilt

$$\frac{f(\xi) - f(\tilde{x}_n)}{\xi - \tilde{x}_n} < 0 \ ,$$

denn der Zähler ist positiv und der Nenner ist negativ. Somit gilt dann für den Limes

$$f'(\xi) \quad \leqslant \quad 0$$

Vergleicht man beide Resultate, so folgt $f'(\xi) = 0$, also die Behauptung des Mittelwertsatzes in unserem Spezialfall, oder sogar etwas allgemeiner

Satz: *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $\xi \in (a, b)$ ein lokaler Extremwert von f bei ξ, dann gilt*

$$f'(\xi) \quad = \quad 0$$

Beweis im allgemeinen Wir wollen nun die Annahme $f(a) = f(b) = 0$ fallen lassen. Wir betrachten dann die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - \underbrace{f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}_{\text{linear in } x} \ .$$

Offensichtlich gilt dann

- g ist differenzierbar auf $[a, b]$
- $g(a) = 0$
- $g(b) = 0$.

Wegen dieser Bedingungen existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, wie wir bereits gezeigt haben. Wegen der üblichen Rechenregeln der Differentiation (siehe 14.10) gilt dann aber

$$0 = g'(\xi) \ = \ f'(\xi) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

wegen $(x - a)' = x' = 1$. Löst man dies nach $f'(\xi)$ auf, folgt daraus die Aussage des Mittelwertsatzes.

14.7 Korollar

Eine differenzierbare Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$), deren Ableitung in jedem Punkt des Intervalls verschwindet, ist eine konstante Funktion.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz, denn $f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0$ für jeden Punkt $x \neq a$ aus dem Intervall $[a, b]$. Also gilt $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$.

14.8 Vollständige Formulierung des Hauptsatzes der Analysis

Sei $a < b$ und sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Eine differenzierbare Funktion $F(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann ist wegen 14.10 auch

$$F(x) + C$$

für eine beliebige Konstante C eine Stammfunktion von $f(x)$. Aus dem letzten Korollar folgt umgekehrt:

Je zwei Stammfunktionen $F(x), \tilde{F}(x)$ einer stetigen Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ unterscheiden sich nur um eine Konstante C

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C \ .$$

Beweis: Für die Differenz $g(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ gilt die Gleichung

$$g'(x) = (\tilde{F}(x) - F(x))' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ .$$

Aus 14.7 folgt daher, dass $g(x) = C$ eine konstante Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ ist. Also

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C \ .$$

14.8.1 Folgerung

Ist $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf $[a, b]$, dann gilt

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt \quad = \quad F(t)|_a^x$$

wobei per Definition gelte $F(t)\,|_a^x := F(x) - F(a)$.

Beweis: Gilt dies für eine Stammfunktion, dann offensichtlich für alle Stammfunktionen, denn die Integrationskonstante hebt sich bei der Differenzbildung weg. Also folgt die Behauptung aus 13.8.

14.9 Schreibweise

Im folgenden vereinbaren wir stillschweigend folgende bequeme Schreibweise: Die folgenden beiden Schreibweisen[1] seien per Konvention äquivalent:

1. $x \to \xi$

2. $x_n \to \xi$ sei konvergent, so dass alle Folgenglieder x_n von ξ verschieden sind.

14.10 Ableitungsregeln

Seien f, g definiert auf $[a, b]$ und sei $a < b$. Sind f und g im Punkt $\xi \in [a, b]$ differenzierbar, dann sind auch $\alpha \cdot f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$ und f/g (falls $g(\xi) \neq 0$) differenzierbar im Punkt ξ, und es gilt:

1. $(\alpha \cdot f)' = \alpha f'$ *und Ableitungen von konstanten Funktionen sind Null.*

2. $(f + g)' = f' + g'$

3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

<u>Beweis</u>:

1. Trivial.

2. Sei $\xi \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) + g(x) - f(\xi) - g(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{n \to \xi} \left[\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} + \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right] \\
&\overset{!}{=} \lim_{n \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} + \lim_{n \to \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \\
&= f'(\xi) + g'(\xi)
\end{aligned}$$

Es folgt, dass der Limes (links) existiert und nicht von der Wahl der Folge $x_n \to \xi$ abhängt. Also ist $(f + g)$ differenzierbar im Punkt ξ. Ausserdem folgt

$$(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$$

3. Analog:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{n \to \xi} \left[\frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(x)}{x - \xi} + \frac{f(\xi) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi} \right] \\
&= \lim_{x \to \xi} \left(\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right) \cdot g(\xi) + \lim_{x \to \xi} \left(\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right) \cdot f(\xi)
\end{aligned}$$

[1]Manchmal bezeichnen wir mit $x \to \xi$ allerdings auch beliebige konvergente Folgen, welche gegen ξ konvergieren

Beachte $lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$, da g als differenzierbare Funktion stetig ist im Punkt ξ nach 14.5. Es folgt

$$(f \cdot g)'(\xi) \quad = \quad f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

4. Schließlich gilt im Spezialfall $f(x) = 1$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' \quad = \quad -\frac{g'}{g^2}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{x\to\xi} \frac{g(\xi) - g(x)}{(x-\xi) \cdot g(x) \cdot g(\xi)} \\
&\overset{\text{Prod.Satz}}{=} \lim_{x\to\xi} \frac{g(\xi) - g(x)}{x - \xi} \cdot \lim_{x\to\xi} \frac{1}{g(x) \cdot g(\xi)} \\
&= -g' \cdot \frac{1}{g^2(\xi)}
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt dann zusammen mit der Produktregel 3.

14.11 Lemma - Ableitungen von Monomen

Es gilt für natürliche Zahlen $n \geqslant 1$

$$(x^n)' \quad = \quad n \cdot x^{n-1} \ .$$

<u>Beweis mittels Induktion</u>: Im Fall $n = 1$ gilt

$$x'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x - \xi}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} 1 = 1 \ .$$

Die Behauptung gelte nun für festes n. Wir schliessen dann auf den Fall $n + 1$

$$\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \\
&= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' \\
&= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \\
&= (n+1) \cdot x^n
\end{aligned}$$

14.12 Folgerung - Ableitungen von Polynomen

Für $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ gilt $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} n \cdot a_n x^{n-1}$.

14.13 Definition - n-mal differenzierbar

Ist die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall mit $a < b$ differenzierbar, dann definiert die Ableitung $f'(x)$ wieder eine Funktion. Ist die die Ableitung selbst wieder differenzierbar, nennt man die Funktion $f(x)$ zweimal differenzierbar. Analog $n - mal$ differenzierbar, falls es differenzierbare Funktion $f(x) = f^{(0)}(x), f^{(1)}(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ gibt, derart dass gilt

$$f^{(i)}(x) = f^{(i-1}(x)' \quad , \quad \forall i < n \ .$$

Man nennt dann die Ableitung $f^{(n)}(x)$ der Funktion $f^{(n-1)}(x)$ die n-te Ableitung von $f(x)$.

14.14 Lemma - exp ist diffbar

Die Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x)$$

ist als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{f'(x) = f(x)}\ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x)-\exp(\xi)}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x-\xi+\xi)-\exp(\xi)}{x-\xi} \\
&= \lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x-\xi)\cdot\exp(\xi)-\exp(\xi)}{x-\xi} \\
&= \exp(\xi)\cdot\lim_{x\to\xi} \frac{\exp(x-\xi)-1}{x-\xi}
\end{aligned}$$

Dies ist gleich

$$= \exp(\xi)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} \ = \ \exp(\xi)\ ,$$

denn der folgende Ausdruck konvergiert gegen Null

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| &= \left|\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{(n+1)!}\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{(n+1)!} \\
&= |x|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{(n+2)!} \\
&\overset{\text{Majorante}}{\leqslant} |x|\cdot\exp(|x|) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $x \to 0$ wegen des Majorantenkriteriums und wegen 11.7 (Seite 64). Siehe auch Seite 64 für eine ähnliche Rechnung.