Kapitel 1

Die komplexen Zahlen

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Sei $\mathbf{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $M_{2,2}(\mathbf{R})$ der Ring der 2x2-Matrizen mit reellen Einträgen. Wir definieren den Körper der komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ als den Teilring von $M_{2,2}(\mathbf{R})$, der aus den Matrizen $\binom{a\,-b}{b\;\,a}$ (für $a, b \in \mathbf{R}$) besteht.

Nachweis der Ringeigenschaft: Es genügt, daß $\mathbf{C}$ bei Multiplikation und Differenz abgeschlossen ist. Die Ringeigenschaft überträgt sich dann sofort vom Oberring $M_2(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & -b+b' \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix} \in \mathbf{C},$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-ba' \\ ba'+ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix} \in \mathbf{C}.$$

Das Element $\mathbf{0} = \binom{0\,0}{0\,0}$ ist das Nullelement und $\mathbf{1} = \binom{1\,0}{0\,1}$ ist das Einselement des Ringes. Offensichtlich ist die Multiplikation kommutativ. Zum Nachweis der Körpereigenschaft genügt daher das

Körperaxiom: *Ist $z \in \mathbf{C}$ mit $z \neq \mathbf{0}$, so existiert ein z^{-1} mit $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.*

Beweis: Sei $z = \binom{a,-b}{b,a}$ und a, b nicht beide Null. Setze dann $z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\binom{a,b}{-b,a}$.

Bezeichnung: Setze $i := \binom{0\;-1}{1\;\,0}$. Dann gilt: $\mathbf{C}$ ist ein Körper (kommutativ), in dem jedes Element z sich in eindeutiger Form als

$$z = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot i \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

schreibt, so daß gilt $i^2 = -1$.

Bemerkung: Indem wir $\mathbf{R}$ mit dem Unterkörper der Elemente $\mathbf{1} \cdot a$ ($a \in \mathbf{R}$) identifizieren, schreiben wir im folgenden auch nur $z = a + bi$ anstatt $z = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot i$.

Der Körper $\mathbf{C}$ ist bis auf Isomorphie durch diese Eigenschaften bestimmt. Durch Anwenden der Distributivgesetze und $i^2 = -1$ folgt nmlich

Multiplikationsregel: $(a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + ba')i$;

Additionsregel: $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.

Man erhält dadurch die ursprüngliche Multiplikations- und Additionsregel, welche sich aus der Matrizenmultiplikation ergibt.

Bezeichnungsweise: Ist $z = a + bi$ aus $\mathbf{C}$, dann nennt man a den **Realteil** und b den **Imaginärteil** von z. Man nennt $\mathbf{C}$ den **Körper der komplexen Zahlen**.

1.2 Ein Automorphismus

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\to \mathbf{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$$

durch $\overline{z} = a - bi$ für $z = a + bi$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{1}} &= \mathbf{1} \\ \overline{\mathbf{0}} &= \mathbf{0} \\ \overline{z \pm w} &= \overline{z} \pm \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

Somit erhält $z \to \overline{z}$ auch Division: $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ für $w \neq 0$. Man nennt diesen Körperautomorphismus die **komplexe Konjugation**.

Definition: Für $z \in \mathbf{C}$ setze $|z| = {}_{+}\sqrt{z \cdot \overline{z}} \in \mathbf{R}$. Beachte, daß die Wurzel wohldefiniert ist wegen $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$.

Per Definition gilt:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \geq 0$$

mit $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

Eigenschaften der Norm $|\cdot|$ **:**

(i) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(ii) $|z| > 0$ für $z \neq 0$

(iii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(iv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis: (i), (ii) sind offensichtlich.
(iii) $|z \cdot w| = \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{zw}} = |z| \cdot |w|$.
(iv) Wegen (iii) kann oBdA $z = 1$ angenommen werden. Dann gilt $|1+w|^2 = (1+w)(\overline{1+w}) = 1 + w + \overline{w} + w \cdot \overline{w} = 1 + 2\left(\frac{w+\overline{w}}{2}\right) + |w|^2 \leq 1 + 2|w| + |w|^2 = (1+|w|)^2$. Beachte (mit $w = a + bi$): $\frac{w+\overline{w}}{2} \in \mathbf{R}$ und $\frac{w+\overline{w}}{2} \leq |w| \iff a \leq {}_+\sqrt{a^2+b^2} \iff 0 \leq b^2$. Somit folgt $|1+w|^2 \leq (1+|w|)^2$ und durch Wurzelziehen, da beide Seiten positiv sind, folgt (iv).

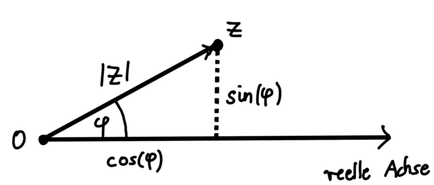
Bemerkung: Die Norm $|\cdot|$ hat alle Eigenschaften des reellen Absolutbetrages und stimmt auf dem Teilkörper $\mathbf{R}$ mit dem reellen Absolutbetrag überein.

Bezeichnungsweise: Die reelle Zahl $|z|$ nennt man den **Absolutbetrag** der komplexen Zahl $z \in \mathbf{C}$.

1.3 Polarkoordinaten

Wir setzen

$$e(\varphi) = \cos\varphi + i\sin(\varphi)$$



für $\varphi \in \mathbf{R}$. Es gilt dann

$$z = |z| \cdot e(\varphi) = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

für geeignetes φ. Dies ist die sogenannte **Polarkoordinatenzerlegung** der komplexen Zahl z. Man kann $-\pi < \varphi \leq \pi$ verlangen; dann heißt φ das *Argument* der komplexen Zahl z und man schreibt $\varphi = \arg(z)$.

Lemma: *Jede komplexe Zahl läßt sich in obiger Weise schreiben.*

Beweis: O.B.d.A. sei $|z| = 1$, also $z = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Dann existiert ein φ mit $a = \cos\varphi$, da Bild(cos) $= [-1, 1]$. Nun wähle $b = \pm\sqrt{1 - cos^2\varphi} = \pm\sin\varphi = \sin(\pm\varphi)$. Da $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$, folgt (nach eventuellem Vorzeichenwechsel von φ), daß $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ gilt.

Lemma: *Es gilt*

(i) $|e(\varphi)| = 1$;
(ii) $e(\varphi)e(\psi) = e(\varphi) + e(\psi)$;
(iii) $e(\varphi + 2\pi n) = e(\varphi) \Longleftrightarrow n \in \mathbf{Z}$;
(iv) $\overline{e(\varphi)} = e(-\varphi)$.

Beweis:

(i) ist klar wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$;
(ii) sieht man wie folgt:

$$e(\varphi)e(\psi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\varphi) = e(\varphi + \psi)$$

(der vorletzte Schritt verwendet das Additionstheorem).

(iii) folgt aus der verschobenen 2π-Periodizität der cos- und der sin-Funktion.

(iv) $\overline{cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = cos\varphi + i\ sin(-\varphi) = e(-\varphi)$.

Folgerung: Es gilt $\mathbf{C}^* \cong \mathbf{R} \times (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$. Die komplexen Zahlen können in der *Gaußschen Zahlenebene* (auch genannt die *komplexe Ebene*) geometrisch gedeutet werden.

Die Addition komplexer Zahlen ist dann einfach die vektorielle Addition. Die Multiplikation komplexer Zahlen erfährt hingegen durch die Polarkoordinaten ihre geometrische Deutung: die komplexen Absolutbeträge werden multipliziert und die Argumente addiert.

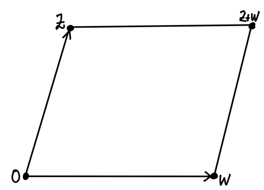


Abbildung 1.1: **Addition**

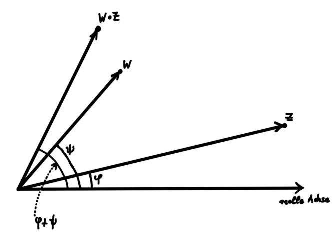


Abbildung 1.2: **Multiplikation**

1.4 Schatzsuche

Hier eine kleine, mit der Theorie komplexer Zahlen zusammenhängende Aufgabe: Auf der Insel ist ein kleiner Baum B_1 und ein großer Baum B_2 sowie ein Kreuz X. Gehe vom Kreuz nach B_1 und noch einmal genauso lang weiter und um dieselbe Strecke nach links um die Ecke. Markiere diese Stelle M_1. Geht man vom Baum B_2 zum Kreuz X und links um 90^o dieselbe Strecke verlängert, ergibt dies einen zweiten Punkt M_2. Der Schatz ist genau in der Mitte zwischen M_1 und M_2 vergraben.

Behauptung: Der Schatz läßt sich finden, selbst wenn das Kreuz nicht mehr vorhanden ist.

Lösung: Man lege den Ursprung der Ebene in den Punkt B_1. Sei Y der Punkt B_2. Es ist dann

$$M_1 = -X(1+i), \qquad M_2 = Y + (X-Y)(1+i)$$

und daher

$$S = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) = \frac{1}{2}\left[Y + (X-Y)(1+i) - X(1+i)\right] = -\frac{i}{2}Y.$$

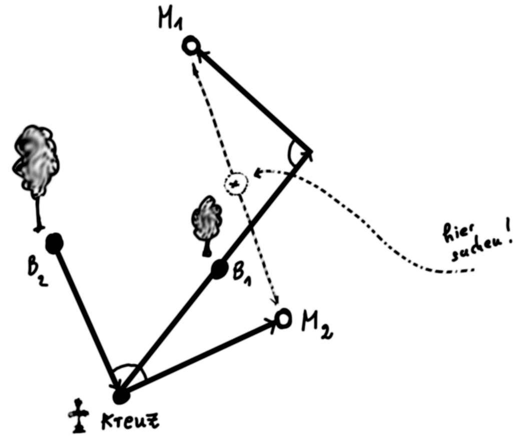


Abbildung 1.3: **Schatzsuche**

1.5 Möbius-Transformationen

Wir betrachten die Menge $\hat{\mathbf{C}}$, welche aus $\mathbf{C}$ und einem unendlich fernen Punkt ∞ besteht. Seien $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Die gebrochen rationale Abbildung $z \mapsto M\langle z \rangle$

$$z \mapsto M\langle z \rangle := \frac{az+b}{cz+d}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C}).$$

nennt man Möbius Transformationen. Man setzt formal $M\langle\infty\rangle = \frac{a}{c}$ und $M\langle -d/c \rangle = \infty$. (Beachte: a, c bzw. d, c können nicht gleichzeitig null sein!) Insbesondere $M\langle\infty\rangle = \infty$ falls $c = 0$ ist. Wie man sich leicht überlegt erhält man eine wohldefinierte Abbildung

$$M : \hat{\mathbf{C}} \mapsto \hat{\mathbf{C}}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

Fr $M_1, M_2 \in Gl(2, \mathbf{C})$ gilt

$$\frac{a_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)+b_1}{c_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)+d_1} = \frac{a_1a_2z + a_1b_2 + b_1c_2z + d_2b_1}{c_1a_2z + c_1b_2 + d_1c_2z + d_2d_1}$$

$$= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + d_2b_1)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_2d_1)}.$$

Dies gilt zumindestens in den Fällen, in denen $z, M_2\langle z\rangle, (M_1M_2)\langle z\rangle$ ungleich ∞ sind. In den verbleibenden Fällen schließt man analog und zeigt damit

Folgerung: *Die Möbiustransformationen bilden bezüglich der Komposition eine Gruppe. Es gilt*

$$M_1\langle M_2\langle z\rangle\rangle = (M_1M_2)\langle z\rangle,$$

d.h. Komposition entspricht Matrizenmultiplikation. Da für $M = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ die zugehörige Möbiustransformation $M\langle z\rangle = z$ die Identität ist, folgt

Korollar: *Möbiustransformationen sind bijektive Selbstabbildungen von $\hat{\mathbf{C}}$.*

Bemerkung: Zwei Matrizen M_1, M_2 mit $M_1 = \lambda M_2$ $(\lambda \in \mathbf{C}^*)$ definieren die selbe Möbiustransformation. Aus dem Beweis des nächsten Satzes folgt auch die Umkehrung. Man kann daher die Gruppe der Möbiustransformationen mit der Quotientengruppe $Gl(2, \mathbf{C})/\mathbf{C}^*$ identifizieren.

Satz: *Seien z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte in $\hat{\mathbf{C}}$ und w_1, w_2, w_3 drei weitere verschiedene Punkte in $\hat{\mathbf{C}}$. Dann gibt es genau eine Möbiustransformation M mit*

$$M\langle z_i\rangle = w_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Eindeutigkeit: Gibt es zwei M, M' mit dieser Eigenschaft, dann hat die zu $T := M' \cdot M_1^{-1}$ gehörende Möbiustransformation drei voneinander verschiedene Fixpunkte. Wir zeigen, daß dann T ein skalares Vielfaches der identischen Matrix ist. Dazu genügt zu wissen, daß für $T \neq \left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ die zugehörige Möbiustransformation höchstens zwei Fixpunkte besitzt. Dies folgt aber sofort aus der Fixpunktgleichung

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Für $T \neq \left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ ist dies eine Gleichung mit höchstens zwei Lösungen in $\mathbf{C}^*$. Der Punkt $z = \infty$ is genau dann ein Fixpunkt, wenn $a/c = \infty$ oder $c = 0$. In diesem Fall entartet obige quadratische Gleichung zu einer linearen Gleichung, so daß wiederum in $\hat{\mathbf{C}}$ höchstens zwei Fixpunkte existieren.

Existenz: Seien z_0, z_1, z_2, z_3 verschiedene Punkte in $\hat{\mathbf{C}}$. Wir betrachten das zugehörige *Doppelverhältnis*

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} / \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

Falls $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ ist dies offensichtlich defineirt, und falls einer der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3 gleich ∞ ist, defineirt man das Doppelverhltnis wie bei den Möbiustranformationen. Beispiel:

$$(z_0, z_1, z_2, \infty) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Bemerkung: Als Funktion von $z = z_0$ ist dann das Doppelverhältnis eine Möbiustransformation $M = M_{z_1,z_2,z_3}$. Diese ist eindeutig dadurch gekennzeichnet, daß gilt

$$\begin{aligned} M\langle z_1\rangle &= 1 \\ M\langle z_2\rangle &= 0 \\ M\langle z_3\rangle &= \infty \ . \end{aligned}$$

Die gesuchte Möbiustransformation ist daher

$$(M_{w_1,w_2,w_3})^{-1} \circ M_{z_1,z_2,z_3}.$$

Satz: *Seien z_1, z_2, z_3 verschiedene Punkte in $\hat{\mathbf{C}}$. Dann gilt*

$$(M\langle z_0\rangle, M\langle z_1\rangle, M\langle z_2\rangle, M\langle z_3\rangle) = (z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Beweis: Als Funktion von $z_0 = z$ ist jede Seite eine Möbiustransformation. Offensichtlich gilt rechts: $z_1, z_2, z_3 \mapsto 1, 0, \infty$; und links: $z_1, z_2, z_3 \mapsto 1, 0, \infty$. Die Gleichheit beider Sriten folgt daher aus dem letzten Satz.

Wir betrachten nun **Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$**. Dies sind die üblichen Kreise in $\mathbf{C}$ sowie Kreise durch ∞. Per definitionem ist dabei ein Kreise durch ∞ gegeben durch eine Geraden in $\mathbf{C}$ zusammen mit dem unendlich fernen Punkt ∞.

Satz: *Möbiustransformationen bilden Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$ auf Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$ ab.*

Diese Aussage wird evident durch eine neue Beschreibung für Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$, welche die „entarteten“ Kreise durch ∞ mitbeschreibt.

Die übliche Kreisgleichung eines Kreises in $\mathbf{C}$ lautet: $|z+u| = r$, also $|z+u|^2 = r^2$ mit $u \in \mathbf{C}$ und $r > 0$ in $\mathbf{R}$.

Wir studieren nun folgende verallgemeinerte Kreisgleichung in $\hat{\mathbf{C}}$:

$$\boxed{\alpha z\overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z + \beta = 0 \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \mathrm{u} \in \mathbf{C},\ \mathrm{u}\overline{\mathrm{u}} - \alpha\beta > 0}$$

1. Fall: $\alpha \neq 0$ (dann oBdA $\alpha = 1$) ergibt die übliche Kreisgleichung in $\mathbf{C}$ mit $\beta = u\overline{u} - r^2$.

2. Fall: $\alpha = 0$ (und $z = x+iy,\ u = a+bi$) erhält man die Geradengleichung $ax + by + \frac{1}{2}\beta = 0$.

Folgerung: Die allgemeine Kreisgleichung ist vom Typ

$$\boxed{H\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} \overline{z} \\ 1 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = 0}$$

wobei $H = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & u \\ \overline{u} & \beta \end{smallmatrix}\right)$ eine beliebige indefinite komplex hermitesche Matrix ist, d.h.

$$\boxed{H' = \overline{H}\ ,\ \det H \ < 0}$$

mit negativer (automatisch reeller) Determinante. Der unendlich ferne Punkt liegt genau dann auf dem verallgemeinerten Kreis, wenn $H\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$.

Beachte: Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbf{C})$ gilt

$$|cz+d|^2 \begin{pmatrix} \overline{M < z >} \\ 1 \end{pmatrix}' H \begin{pmatrix} M\langle z\rangle \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z} \\ 1 \end{pmatrix}' M\langle H\rangle \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

wenn man $M\langle H\rangle := \overline{M}' \cdot H \cdot M$ setzt. Offensichtlich gilt wieder

$$M\langle H\rangle' = \overline{M\langle H\rangle} \text{ und } \det M\langle H\rangle < 0.$$

Damit bildet eine Möbiustransformation Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$ auf Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$ ab. QED

Satz: *Die Gruppe der Möbiustransformationen operiert transitiv auf der Menge der Kreise in* $\hat{\mathbf{C}}$.

Beweis: Dies folgt aus der 3-fach-transitiviten Operation auf den Punkten von $\hat{\mathbf{C}}$ und der Tatsache, daß ein Kreis in $\hat{\mathbf{C}}$ durch 3 seiner Punkte festgelegt ist.

Satz: *Seien z_0, z_1, z_2, z_3 verschiedene Punkte in $\hat{\mathbf{C}}$. Dann sind äquivalent:*

(i) (z_0, z_1, z_2, z_3) ist reell oder ∞.

(ii) z_0, z_1, z_2, z_3 liegen auf einem Kreis.

Beweis: Wegen der zwei vorhergehenden Sätze kann man $z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = \infty$ setzen. Dann ist wegen

$$z \stackrel{!}{=} (z, 1, 0, \infty) \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

die Behauptung offensichtlich.

1.6 Halbebene und Einheitskreis

Betrachte folgende spezielle Kreise in $\hat{\mathbf{C}}$ definiert durch

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \qquad z\overline{z} = 1 \qquad \text{Einheitskreis}$$

und

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} : \qquad y = 0 \qquad \text{x-Achse}$$

Wir haben die sogenannte **Cayley-Transformation** [1]

$$\overline{\mathbf{E}} = \{z : z\overline{z} \leq 1\} \quad \stackrel{\cong}{\rightarrow} \quad \overline{\mathbf{H}} = \{z : Im(z) \geq 0\}$$
$$z \mapsto \frac{-iz + 1}{z - i}$$

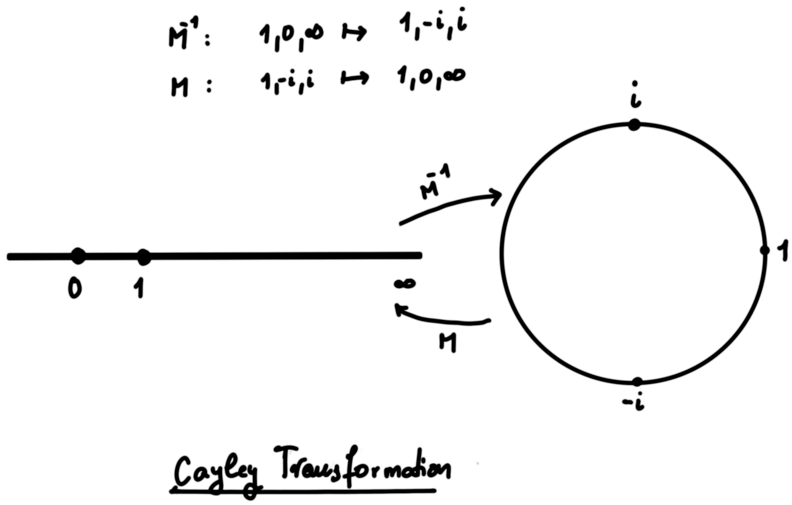
Daß diese Transformation wirklich $\overline{\mathbf{E}}$ auf $\overline{\mathbf{H}}$ abbildet, sieht man wie folgt: $M = M_{1,-i,+i} = \frac{z+i}{z-i} / \frac{1+i}{1-i} = \frac{z-z_2}{z-z_3} / \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ bildet 1 auf $\frac{1-i}{1+i} = -i$ ab mit $-i \mapsto 0$ und $i \mapsto \infty$ und $0 \mapsto i$.

Insbesondere wird $\mathbf{E} = \{z : z\overline{z} < 1\}$ dann bijektiv auf die obere Halbebene $\mathbf{H} = \{z : Im(z) \geq 0\}$ abgebildet.

Bemerkung: H_1 und H_2 definieren genau dann denselben Kreis, wenn $H_1 = \mu H_2$ mit $\mu \neq 0$ reell (Übungsaufgabe).

Satz: *Eine Möbiustransformation $z \mapsto M\langle z \rangle$ erhält die reelle Achse genau dann, wenn M sich in der Form schreibt*

[1] $M = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ liefert die *inverse* Cayley-Transformation.



$$M = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbf{C}^*, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \ \textit{mit} \ \det = \pm 1.$$

Beweis: M erhält die reelle Achse genau dann, wenn gilt

$$\overline{M}' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} M = \mu \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbf{R}^*$ (benutze obige Bemerkung).

1) Möbiussubstitutionen mit dieser Eigenschaft bilden eine Gruppe.

2) Für reelle invertierbare Diagonalmatrizen M ist diese Bedingung erfüllt.

3) Durch Abändern mit $\lambda \in \mathbf{C}^*$ kann $\det M = 1$ angenommen werden durch Lösen der Gleichung $\lambda^2 \cdot detM = 1$. Dies ist immer möglich wegen

Hilfssatz: *Für jedes $z \in \mathbf{C}$ existiert ein ξ mit $\xi^2 = z$.*

Beweis: Polarkoordinaten!

4) Sei also $\det M = 1$. Dann ist $\mu = \pm 1$ und obige Gleichung ist äquivalent zu

$$\overline{M}' = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ wegen } \det M = 1$$

$$= \mu \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \mu M'$$

Ist $\mu = 1$, dann ist die obige Bedingung äquivalent zu $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ mit $ad - bc = 1$. Ist $\mu = -1$, kann man M durch $i \cdot M$ ersetzen und dadurch annehmen $\mu = 1$. Allerdings wird dann $det(M) = -1$. Durch Multiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist aber dann oBdA sowohl $\mu = 1$ als auch $det(M) = 1$. In allen Fällen kann also angenommen werden $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ mit $ab - bc = \pm 1$.

Folgerung: *Bildet die Möbiustransformation die x-Achse auf sich ab, dann kann sie durch eine Matrix M in $Gl(2, \mathbf{R})$ repräsentiert werden. Das heisst $M = \lambda \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\lambda \in \mathbf{C}^*$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbf{R})$.*

Die so bestimmten Möbiustransformationen bilden dann das Komplement des Kreises $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ in $\hat{\mathbf{C}}$, welches aus der disjunkten Vereinigung der oberen und der unteren komplexen Halbebene besteht, auf sich ab. Aus topologischen Gründen kann daher eine solche solche Möbiustransformation entweder die obere Halbebene $\mathbf{H}$ bijektiv auf sich abbilden, oder muss die obere Halbebene $\mathbf{H}$ bijektiv auf die untere Halbebene $-\mathbf{H}$ abbilden.

Behauptung: *Eine Möbiustransformation repräsentiert durch $M = \lambda \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\lambda \in \mathbf{C}^*$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbf{R})$ bildet die komplexe obere Halbebene $\mathbf{H}$ auf sich ab genau dann wenn gilt $ad - bc > 0$.*

Beweis: OBdA sei $M \in GL(2, \mathbf{R})$. Dann gilt

$$2i \cdot Im M\langle z \rangle = M\langle z \rangle - \overline{M\langle z \rangle} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

da $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, und man erhält durch Erweitern auf den Hauptnenner

$$\frac{(az + b)(c\overline{z} + d) - (cz + d)(a\overline{z} + b)}{|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)(2i \cdot Im(z))}{|cz + d|^2} .$$

Also wird $\mathbf{H}$ in sich abgebildet genau dann wenn $\det M > 0$.

Folgerung: *$M \in GL(2, \mathbf{R})$ impliziert $Im(M\langle z \rangle) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} \cdot \det M$.*

1.7 Anhang: Hyperbolische Geometrie

Eine analoge Rechnung wie bei obiger Folgerung 1.6 zeigt: Für die Funktion

$$\tau(z,w) = \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right| \qquad z,w \in \mathbf{H}\ (\Rightarrow z-\overline{w} \neq 0!)$$

(die symmetrisch in z,w ist) gilt

$$\tau(M<z>, M<w>) = \tau(z,w) \text{ für } M \in SL(2,\mathbf{R}).$$

Beweis:

$$\left|\frac{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d}}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{w}}{c\overline{w}}}\right| = \left|\frac{(aw+b)(cz+d)-(az+b)(cw+d)}{(aw+b)(c\overline{z}+d)-(a\overline{z}+b)(cw+d)}\right| = |\frac{z-w}{z-\overline{w}}|.$$

Beachte, daß

$$d(z,w) = \log\left(\frac{1+\tau(z,w)}{1-\tau(z,w)}\right)$$

auch invariant unter $SL(2,\mathbf{R})$ ist und stimmt auf $i\mathbf{R}$ überein mit der Länge bezüglich der invarianten Metrik. Sei $y_2 > y_1$ reell; dann gilt

$$d(iy_2, iy_1) = \log\frac{1+\frac{y_2-y_1}{y_2+y_1}}{1-\frac{y_2-y_1}{y_2+y_1}} = \log\frac{y_2}{y_1}.$$

Das stimmt überein mit $\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{y} = \log\frac{y_2}{y_1}$ zu $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Lemma: *Zu $z,w \in \mathbf{H}$ existiert $M \in GL(2,\mathbf{R})$ mit $M\langle z\rangle, M\langle w\rangle \in i\mathbf{R}$.*

Folgerung: *$d(z,w)$ ist die Metrik auf $\mathbf{H}$ zum invarianten Längenelement $ds^2 = y^{-2}(dx^2+dy^2)$.*

Einige Umformungen: Beachte

$$(z-\overline{w})(\overline{z}-w) = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) - (z-\overline{z})(w-\overline{w}),$$

also

$$\tau^2(z,w) = \frac{(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}{(z-\overline{w})(\overline{z}-w)} = \frac{|z-w|^2}{|z-w|^2+4Im(z)Im(w)} = \frac{q-1}{q+1} = \frac{\varphi(z,w)}{\varphi(z,w)+4}$$

mit $q = \frac{|z-w|^2}{2Im(z)Im(w)} + 1 = \frac{1}{2}\varphi(z,w)+1$. Hierbei ist

$$\varphi(z,w) = \frac{|z-w|^2}{Im(z)Im(w)} = t(g_z^{-1}g_w')$$

mit $g_z\langle i\rangle = z$ und $g_w\langle i\rangle = w$ und

$$t: \quad K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}K \mapsto a^2+b^2+c^2+d^2-2$$

mit $K = SO(2,\mathbf{R})$. Siehe Zagier, S. 317, Bombay Co4 79. Somit ist

$$\tau^2(z,w) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2-2}{a^2+b^2+c^2+d^2+2} \quad ; \; g_z^{-1}g_w' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

oder

$$q = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Also: Die invariante Metrik auf $\mathbf{H}$ läßt sich in Zusammenhang bringen mit sphärischen Funktionen auf $SL(2,\mathbf{R})$.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Konvergenzbegriff

Wir wiederholen einige grundlegende Begriffe der reellen Analysis, indem wir sie formal umschreiben auf $\mathbf{C}$. Dabei identifizieren wir:

$$\mathbf{C} \longleftrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y).$$

Der Umgebungsbegriff in $\mathbf{C}$ entspricht dabei dem üblichen Umgebungsbegriff in $\mathbf{R}^2$. Da der komplexe Absolutbetrag der Euklidsche Abstand zum Nullpunkt ist, ergibt dies

Definition: Eine Folge

$$z_1, z_2, \cdots$$

komplexer Zahlen heißt **Nullfolge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert mit

$$|z_n| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N.$$

Analog: Eine Folge $z_1, z_2, \cdots$ konvergiert gegen die komplexe Zahl z, falls $z - z_1, z - z_2, \cdots$ eine Nullfolge ist.

Schreibweise: $z_n \to z$ für $z \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Bemerkung: Aus der Äquivalenz der euklidischen Norm mit der Maximumnorm im $\mathbf{R}^n$ folgt die Äquivalenz der Behauptungen

(i) $z_n \to z$ für $n \to \infty$ $(z_n, z \in \mathbf{C})$

(ii) Re $z_n \to$ Re z und Im $z_n \to$ Im z für $n \to \infty$.

Lemma: *Aus $z_n \to z$ und $w_n \to w$ für $n \to \infty$ folgt:*
(i) $z_n \pm w_n \to z \pm w$
(ii) $z_n \cdot w_n \to zw$
(iii) $|z_n| \to |z|$
(iv) $z_n^{-1} \to z^{-1}$, *falls alle z_n sowie z von Null verschieden sind.*

Beweis: Zerlegung in Realteil und Imaginärteil ermöglicht die Übernahme der Beweise aus der reellen Analysis.

Beispiel: Für $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

Beweis: Dies folgt wegen

$$|z^n| = |z|^n$$

aus dem analogen Satz der reellen Analysis.

Wir betrachten nun Reihen.

Sei $z_1, z_2, \cdots$ eine Folge komplexer Zahlen und sei

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu.$$

Falls s_n konvergiert, so sagt man, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu = z_1 + z_2 + \cdots$$

konvergiert und nennt

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

den Grenzwert der Reihe.

Beispiel: Die geometrische Reihe konvergiert für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$.

$$\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z} \quad (n \to \infty)$$

Also: $\frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu$ für $|z| < 1$.

Definition: Eine Reihe $z_1 + z_2 + \cdots$ heißt *absolut konvergent*, falls die reelle Reihe

$$|z_1| + |z_2| + \cdots$$

konvergiert.

Lemma: *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis: Wegen $|\mathrm{Im}\ z_\nu| \leq |z_\nu|$ und $|\mathrm{Re}\ z_\nu| \leq |z_\nu|$ sind die Reihen

$$\mathrm{Re}\ z_1 + \mathrm{Re}\ z_2 + \cdots$$

$$\mathrm{Im}\ z_1 + \mathrm{Im}\ z_2 + \cdots$$

absolut konvergente reelle Reihen und daher konvergent (siehe reelle Analysis). Daraus folgt direkt die Konvergenz von $z_1 + z_2 + \cdots$.

Folgerung: $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!}$ *sei eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* r*.* Dann konvergiert die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$$

absolut für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| < r$.

Beispiel: Die Reihen

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

konvergieren absolut für alle $z \in \mathbf{C}$. Dies definiert die *komplexwertigen* Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen.

Lemma: *Seien* $\sum_{n=0}^\infty a_n,\ \ \sum_{n=0}^\infty b_n$ *absolut konvergente komplexe Reihen. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu} \right) = \left(\sum_{n=0}^\infty a_n \right) \left(\sum_{n=0}^\infty b_n \right).$$

Die linke Reihe ist wieder absolut konvergent.

Beweis: Wörtlich wie im Reellen.

Folgerung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{z^{\nu}w^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}=\exp(z+w)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w_n}{n!}\right)$$
$$=\exp(z)\exp(w).$$

Damit ist gezeigt: Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt auch im Komplexen, d.h. es ist $\boxed{\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)}$ für $z,w\in\mathbf{C}$.

Lemma: *Für alle $z\in\mathbf{C}$ gilt*

$$\exp(iz)=\cos z+i\sin z,$$

und für $z=x+iy$ gilt daher

$$\exp(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=re^{i\varphi}$$

mit $r=e^x,\ \varphi=y$.

Beweis:
(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos\ z+i\sin\ z.$

(ii) $\exp(x+iy)=\exp(x)\exp(iy)=\exp(x)(\cos y+i\ \sin y)=e^x\cdot e(y).$

Folgerung: *Für alle $z\in\mathbf{C}$ gilt $\exp z\neq 0$, und jedes $w\in\mathbf{C}^*$ wird von der Exponentialfunktion angenommen.*

Beweis: $\exp(z)=\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$, somit

$$|\exp(z)|=|e^x|\cdot|\cos y+i\sin y|=|e^x|\neq 0,$$

da die reelle Exponentialfunktion als Bildmenge $\mathbf{R}_{>0}$ hat. Die zweite Behauptung folgt mit Polarkoordinaten!

Zusammenfassung:

$$\exp:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}^*$$

ist ein Homomorphismus der additiven Gruppe der komplexen Zahlen *auf* die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen.

Es gilt offensichtlich $\exp(2\pi in) = 1$ für alle $n \in \mathbf{Z}$.

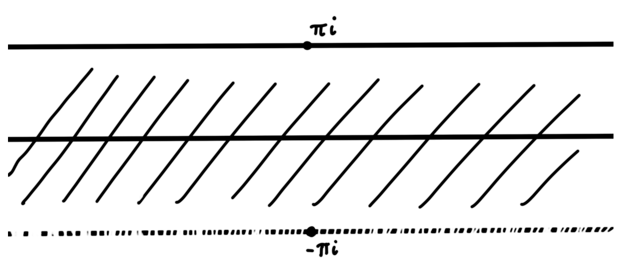
Bemerkung: *Äquivalent sind*

(i) $\exp z = \exp w$

(ii) $z - w = 2\pi in,\ n \in \mathbf{Z}$.

Beweis: Dies folgt aus $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ und der Homomorphieeigenschaft.

Bezeichnung: Es sei $S = \{z \in \mathbf{C} : -\pi < Imz \leq \pi\}$.



Die exp-Abbildung definiert eine Bijektion zwischen S und $\mathbf{C}^*$. Die Umkehrabbildung bezeichnen wir als den **Hauptteil des Logarithmus** von z und schreiben

$$w = \log z$$
$$\log : \mathbf{C}^* \longrightarrow S.$$

Für positive reelle Zahlen w ist dies der übliche aus der reellen Analysis bekannte Logarithmus.

Setze $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ gleich φ, wenn gilt

$$z = |z|e(\varphi).$$

Satz: Für $z \neq 0$ in **C** *gilt für den Hauptteil des Logarithmus* $\log z = log|z| + i \arg z \ (z \neq 0)$.

Definition: Wir setzen

$$\boxed{a^b := e^{b \log a} \quad (a \neq 0)}$$

für komplexe Zahlen a, b.

Achtung: Im allgemeinen ist $a_1^b \cdot a_2^b \neq (a_1 a_2)^b$ für $a_1, a_2, b \in \mathbf{C}$.

2.2 Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbf{C},\ D \subseteq \mathbf{C}$, eine Abbildung. Die Funktion f heißt *stetig in* $a \in D$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(z) - f(a)| < \delta \text{ falls } |z - a| < \varepsilon,\ z \in D.$$

Gleichbedeutend damit ist: Für $a_n \in D$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt

$$f(a_n) \to f(a) \text{ für } n \to \infty.$$

f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Lemma: *Summe, Differenz und Produkt stetiger Funktionen sind stetig.*

Beispiel: Die Funktionen $z \mapsto z,\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ und $z \mapsto \frac{1}{z},\ \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ sind offensichtlich stetig.

Lemma: *Seien (D, f) und (D', g) stetige Funktionen mit $f(D) \subseteq D'$. Dann ist auch $(D, g \circ f)$ stetig.*

Lemma: *$f : D \to \mathbf{C}$ ist genau dann stetig, wenn Real- und Imaginärteil von f stetige Funktionen sind; dabei wird definiert*

$$(Ref)(z) := Ref(z),$$
$$(Imf)(z) := Imf(z).$$

Anwendung: *1) Der Betrag $|f|(z) = \sqrt{Re(f)^2 + Im(f)^2}$ einer stetigen Funktion ist stetig.*

2) Polynome $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *und die Funktionen* $\exp(z),\ \cos(z),\ \sin(z)$ *sind stetig.*

Denn in jedem dieser Fälle sind Real- und Imaginärteil bekanntlich stetig.

Achtung: Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion muß nicht notwendig stetig sein.

Beispiel: Wir betrachten den Hauptteil des Logarithmus $\log : \mathbf{C}^* \to S \subseteq \mathbf{C}$. Wäre log stetig, dann wäre dies nach obigem Lemma auch der Imaginärteil

$$\mathrm{Im}\ \log(z) = \arg(z).$$

Dann wäre auch die Einschränkung von $\arg(z)$ auf die Kreislinie $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ stetig. Aber S^1 ist kompakt, und damit wäre in diesem Fall auch $\arg(S^1)$ kompakt. Aber $\arg(S^1)$ ist das Intervall $(-\pi, \pi]$ und damit nicht kompakt. Widerspruch!

Offene Mengen: Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbf{C}$ heißt **offen**, wenn für jedes $a \in D$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < \varepsilon\} \subseteq D.$$

Abgeschlossene Mengen: Eine Menge D in $\mathbf{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $\mathbf{C} \backslash D$ offen ist.

Äquivalent: D heißt abgeschlossen, falls für jede Folge $a_n \in D$ gilt $a \in D$, falls $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Kompakte Mengen: $D \subseteq \mathbf{C}$ heißt **kompakt**, wenn D beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz von Heine-Borel: *Eine Menge* $D \subseteq \mathbf{C}$ *ist genau dann kompakt, wenn für jede Überdeckung*

$$D \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

durch offene Teilmengen $U_i,\ i \in I$ *eine endliche Teilüberdeckung existiert:*

$$D \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \quad (J \subseteq I,\ J \text{ endlich}).$$

Satz: *Das Bild einer kompakten Teilmenge von* $\mathbf{C}$ *unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

Satz: *Die Umkehrfunktion einer stetigen eineindeutigen Funktion* $f : D \to f(D) \subseteq \mathbf{C}$ *mit* D *kompakt in* $\mathbf{C}$ *ist wieder eine stetige Funktion* $(f(D),\ f^{-1})$.

2.3 Ableitung im Komplexen

Definition: Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $f : G \to \mathbf{C}$ heißt **holomorph** (oder **analytisch** oder **regulär**), falls gilt: Für alle $a \in G$ und alle Nullfolgen $h \to 0$, deren Folgenglieder h_n (fast) alle von Null verschieden sind mit $a + h_n$ in G, existiert der Limes (*)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(a) \in \mathbf{C}$$

und ist unabhängig von der Nullfolge $h \to 0$. Man nennt dann $f'(a)$ die holomorphe Ableitung von f im Punkt a.

1. Bemerkung: Holomorphie ist nur erklärt für Funktionen auf offenen Mengen $G \subseteq \mathbf{C}$.

2. Bemerkung: Holomorphie impliziert Stetigkeit, denn (**)

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + r(a,h)$$

mit $r(a,h)h^{-1} \to 0$ für $h \to 0$. Somit folgt $f(a+h) \to f(a)$ für $h \to 0$.

Beachte, daß (*) und (**) äquivalent sind.

Kettenregel: *Sind $f : G \to \mathbf{C}$ und $g : G' \to \mathbf{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(G) \subseteq G'$, dann ist auch $g \circ f : G \to \mathbf{C}$ holomorph mit der komplexen Ableitung*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Beweis: Für alle Folgenglieder $h_n \neq 0$ mit $\tilde{h}_n = f(z + h_n) - f(z) \neq 0$ gilt $\frac{(g\circ f)(z+h) - g\circ f(z)}{h} = \frac{g\circ f(z+h) - g\circ f(z)}{f(z+h)-f(z)} \cdot \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Wegen Bemerkung 2 ist $\tilde{h}_n \to 0$ wieder eine Nullfolge. Für die oben betrachtete Teilfolge gilt damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(z+h) - (g\circ f)(z)}{h} = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Ist $\tilde{h}_n = 0$ für unendlich viele n, dann gilt für die zugehörigen Folgenglieder $(g \circ f)(z+h) - g \circ f(z) = 0$. Andererseits folgt $f'(z) = 0$ und dies zeigt unsere Behauptung auch in diesem Fall.

Analog beweist man

Lemma: *Summen resp. Produkte holomorpher Funktionen sind holomorph. Es gilt* $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ *sowie*

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) \ .$$

Ist $f(z) \neq 0$ *für alle* $z \in G$ *und* $f(z)$ *holomorph auf* G*, dann ist auch* $\frac{1}{f(z)}$ *holomorph auf* G*.*

Lemma: *Seien* G, G' *offene Teilmengen von* $\mathbf{C}$ *und* $f: G \to G'$, $g: G' \to \mathbf{C}$ *seien* <u>*stetige*</u> *Funktionen mit* $g \circ f = id$*. Ist dann* g *holomorph mit* $g'(z) \neq 0$ *für alle* $z \in G'$*, dann ist* f *holomorph in* G *und es gilt*

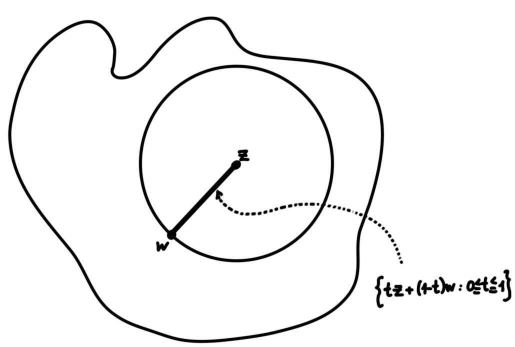
$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))} \qquad \text{für } z \in G.$$

Beweis. Dies folgt aus der Kettenregel und der unmittelbar klaren Aussage

$$h'(z) = 1 \quad , \quad h(z) = z \ .$$

Lemma: *Sei* $f: G \to \mathbf{C}$ *holomorph mit* $f'(z) = 0$ *für alle* $z \in G$*. Dann ist* f *lokal konstant, (d.h. zu jedem* $z \in G$ *gibt es eine Umgebung von* z*, auf der* f *konstant ist. Eine* **Umgebung** *von* z *ist dabei eine Teilmenge von* $\mathbf{C}$*, welche eine kleine Kreisscheibe um* z *enthält.)*

Beweis: Sei B eine offene Kreisscheibe in G. Für z, w in B ist auch die Verbindungslinie $\overline{zw} = \{tz + (1-t)w | t \in [0,1]\}$ in G.



Setze $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit reellwertigen Funktionen u, v sowie $U(t) = u(tz + (1-t)w)$, $V(t) = v(tz + (1-t)w)$. Aus der Annahme folgt die reelle Differenzierbarkeit

$$U'(t) + iV'(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(tz + (1-t)w) - f(sz + (1-s)w)}{t-s}$$

$$= \lim_{s\to t} \frac{f(tz + (1-t)w) - f(sz + (1-s)w)}{(tz + (1-t)w) - (sz + (1-s)w)} \cdot (z-w)$$

$$= \; f'(tz + (1-t)w) \cdot (z-w) = 0.$$

Also sind die Funktionen $V, U : [0,1] \to \mathbf{R}$ reell differentierbar mit verschwindenden reellen Ableitungen $U', V' = 0$, und damit nach Analysis I konstant. Dann ist aber $f(z)$ konstant auf der Verbindungslinie, und damit konstant auf ganz B wenn man die Punkte z und w in B variiert.

2.4 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $f : G \to \mathbf{C}$ stetig und G offen in $\mathbf{C}$.

Zur Erinnerung: Eine Funktion $\mathbf{R}^2 \supseteq G \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$ heißt total ableitbar in einem Punkt $z \in G$, wenn gilt

$$f(z+h) = f(z) + \mathcal{J}(h) + r(h,z)$$

mit einer linearen Abbildung $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f,z)$ (der Jacobi-Matrix im Punkt z) und $\lim_{w\to z} \frac{r(h,z)}{|h|} = 0$ für alle Nullfolgen $h \to 0$ im $\mathbf{R}^2$ mit $h_n \neq 0$ für (fast) alle n.

Satz: *Äquivalent sind*
(i) f ist holomorph auf G.
(ii) f ist total ableitbar im Sinne der reellen Analysis als Funktion auf $\mathbf{R}^2 \supset G \to \mathbf{R}^2$ mit Jacobimatrizen $\mathcal{J}(f,z)$ der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ b(z) & a(z) \end{pmatrix}, \quad a(z), b(z) \in \mathbf{R}$$

für alle $z \in G$.

Per Definition haben wir in Abschnitt 1.1. die komplexen Zahlen identifiziert mit den linearen Abbildungen $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ von der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ in $M_2(\mathbf{R})$, also genau mit den Drehstreckungen im $\mathbf{R}^2$.

Mit anderen Worten: $f(z)$ holomorph auf G genau dann wenn f total ableitbar ist auf G und alle Jacobimatrizen Drehstreckungsmatrizen sind.

Beweis des Satzes: Holomorphie bedeutet

$$f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + r(h,z)$$

(wobei Produkt die komplexe Multiplikation bezeichne) mit $\tilde{r}(h,z)/h \to 0$ für Nullfolgen h (mit $h_n \neq 0$ und $z + h_n \in G$ für fast alle n).

Sei $f(z)$ holomorph und $f'(z) = a(z)+ib(z)$ und $z = x+iy$ mit $x, y, a(z), b(z) \in \mathbf{R}$, dann zeigt man leicht $f'(z) \cdot h = (a(z)x - b(z)y) + i(a(z)y + b(z)x)$ und dies definiert gerade den Vektor

$$\mathcal{J}(f,z)(h) = \begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ b(z) & a(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(z)x - b(z)y \\ a(z)y + b(z)x \end{pmatrix} .$$

Also ist f ist total ableitbar in z und $\mathcal{J}(f,z)$ ist eine Drehstreckung, denn $r(h,z)/h \to 0 \iff |r(h,z)|/|h| \to 0 \iff r(h,z)/|h| \to 0$. Der umgekehrte Schluss geht genauso.

Bemerkung: Ist $f : G \to \mathbf{C}$ total ableitbar mit Realteil u und Imaginärteil v, so ist f auch partiell differenzierbar. Wir schreiben für $f(z)$ mit $z = x+yi$ auch $f(z) = f(x,y)$. Es gilt

$$\mathcal{J}(f,z) = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx}(z) & \frac{du}{dy}(z) \\ \frac{dv}{dx}(z) & \frac{dv}{dy}(z) \end{pmatrix},$$

$f(z) = (u(z), v(z))$.

1. Korollar: *Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbf{C}$ erfüllt die* **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\frac{du}{dx}(z) = \frac{dv}{dy}(z),$$
$$\frac{du}{dy}(z) = -\frac{dv}{dx}(z)$$

für alle $z \in G$. Dabei sind u und v wieder der Real- und Imaginärteil von f.

2. Korollar: Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbf{C}$ ist in jedem Punkt $z \in G$ mit $f'(z) \neq 0$ **konform**, *d.h. winkeltreu.*

Zum Beweis: Lokal verhält sich $f'(z)$ wie $\mathcal{J}(f,z)$, also wie eine Drehstreckung.

Beispiele für holomorphe Funktionen:

- (Die Funktion $f(z) = z$ ist offensichtlich holomorph auf ganz $\mathbf{C}$ mit $f'(z) = 1$.
- Jedes Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ist holomorph in $\mathbf{C}$ mit $f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$.
- Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $ad - bc \neq 0$. Die Möbiustransformation $f(z) = M\langle z \rangle$ ist holomorph im Definitionsbereich $G = \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, falls $c \neq 0$, und sogar holomorph in $G = \mathbf{C}$ im Fall $c = 0$.

Kapitel 3

Analysis im Komplexen

3.1 Integration

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ (a, b reell) eine stetige Funktion, d.h.

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

mit $u(x), v(x)$ stetig auf $[a, b]$.

Definition: $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx$. Offensichtlich gilt:

(1) Dieses Integral ist additiv und $\mathbf{C}$-linear in f.

(2) Ist $f = F'$, so gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

(3) Es ist

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

wobei $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ differenzierbar mit stetiger Ableitung ist mit $\varphi(a) = c,\ \varphi(b) = d$.

Beweis: Sei F Stammfunktion von f, dann ist $F(\varphi(x))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

(4) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ für f, g differenzierbar mit stetigen Ableitungen.
(5)$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq (b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

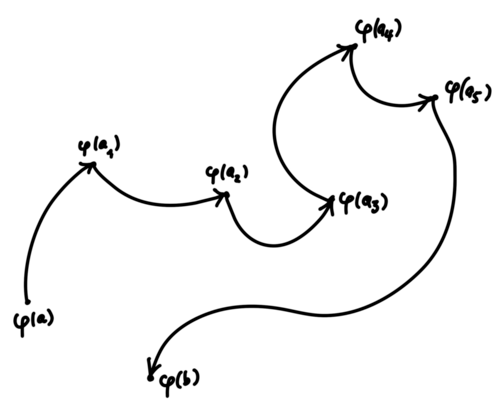
Zum Beweis von (1) genügt es zu zeigen $\int_a^b if(x)dx = i\int_a^b f(x)dx$, was aber klar ist, da Multiplikation mit i den Effekt hat (u, v) mit $(-v, u)$ zu vertauschen. (2) ist trivial. Für (3) beachte, dass $\varphi'(x)$ reellwertig ist. (4) folgt aus $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, was für das Produkt komplexwertiger Funktionen genauso bewiesen wird wie für das Produkt reellwertiger Funktionen. Zum Beweis von (5) wählt man eine komplexe Zahl λ vom Betrag 1 so dass $\lambda \int_a^b f(x)dx$ eine reelle Zahl ≥ 0 wird. Dann gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lambda \cdot \int_a^b f(x)dx\right| = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\lambda \cdot f(x))dx$ wegen (1). Da dieses letzte Integral eine reelle Zahl ist, stimmt es überein mit $\int_a^b Re(\lambda f(x))dx$, und kann daher durch $\int_a^b |\lambda f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx$ nach oben abgeschätzt werden (wegen der Ungleichung $Re(w) \leq |w|$ für komplexe w). Dies zeigt (5).

3.2 Wegintegrale

1) Eine **Kurve** ist eine *stetige* Abbildung

$$\varphi : [a, b] \to \mathbf{C} \quad (a < b)$$

eines kompakten reellen Intervalls in die komplexe Ebene.
2) Eine **glatte Kurve** ist eine *stetig differenzierbare* Abbildung φ wie oben.



3) Eine **stückweise glatte** Kurve ist eine Kurve wie in 1) derart, daß für eine endliche Unterteilung

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$$

die Einschränkung von φ auf $[a_i, a_{i+1}]$ glatt ist $(i = 0, \cdots, n-1)$.

Sei $f : D \to \mathbf{C}$ eine **stetige** Funktion und $D \subseteq \mathbf{C}$. Ist $\varphi : [a,b] \to D$ eine **stückweise glatte** Kurve, dann setzt man

$$\boxed{\int_\varphi f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Die **Länge** ist definiert als

$$L(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\varphi'(t)|dt \quad , \quad |\varphi'(t)| = \sqrt{Re\varphi'(t)^2 + Im\varphi'(t)^2}\ .$$

Es ist offensichtlich, daß diese Definitionen nicht von der Wahl der Punkte a_i abhängen.

Bemerkung: Mit diesen Definitionen gilt dann

(i) $\int_\varphi f$ ist additiv und $\mathbf{C}$-linear in f.

(ii) $\left|\int_\varphi f(z)dz\right| \leq \max_{z\in\varphi[a,b]} |f(z)| \cdot L(\varphi)$.

(iii) Für $\varphi(t) = t$ $(t \in [a,b])$ gilt $\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$.

(iv) Sei $\psi : [a,b] \to [c,d]$ differenzierbar mit stetiger Ableitung und

$$\psi(a) = c,\ \psi(b) = d.$$

Dann gilt

$$\int_{\varphi\circ\psi} f(z)dz = \int_\varphi f(z)dz.$$

(v) Besitzt ein stetiges

$$f : D \to \mathbf{C},\ D \subseteq \mathbf{C} \text{ offen}$$

eine **Stammfunktion** $F(z)$ in D, d.h.

$$F \text{ ist holomorph in } D \text{ mit } F' = f,$$

dann gilt $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, also hängt das Integral in diesem Fall nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab

$$\int_\varphi f(z)dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Korollar: *Sei $f : D \to \mathbf{C}$ stetig mit D offen in $\mathbf{C}$ und sei F Stammfunktion von f (d.h. $F(z)$ ist holomorph in D mit $F'(z) = f(z)$). Dann gilt*

$$\int_\varphi f(z)dz = 0$$

für jede **geschlossene** *Kurve, d.h. $\varphi(a) = \varphi(b)$.*

3.3 Fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen

Generalvoraussetzung: Sei $D \subseteq \mathbf{C}$ offen und $f : D \to \mathbf{C}$ stetig.

Wir betrachten eine Reihe von Eigenschaften von f, die alle zur Holomorphie von f auf D äquivalent sind.

E1: *f ist holomorph auf D.*

Daraus leiten wir ab

E2: *Für jede volle Dreiecksfläche Δ in D gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Das Integral erstreckt sich dabei über den stückweise linear parametrisierten Rand $\partial\Delta$ von Δ.*

Beweis (nach Goursat): Sei $\Delta = \Delta_0$ irgendeine Dreiecksfläche in D. Wir zerlegen Δ durch die Seitenmitten in vier untereinander kongruente Dreiecke und betrachten die Integrale von f über die zugehörigen Dreieckswege. Nun wählen wir als Δ_1 eines unserer Teildreiecke mit maximalem Absolutbetrag des Wegintegrals $\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz$. Dann iterieren wir diesen Prozeß und erhalten eine Folge von kleiner werdenden Dreiecksflächen

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \cdots,$$

so daß für alle n gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|.$$

Weil es sich um eine zweidimensionale Intervallschachtelung handelt, gibt es genau einen Punkt z_0, der allen Dreiecksflächen Δ_n gemeinsam ist. Da f holomorph ist, gilt $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z, z_0)$ mit $r(z, z_0) = (z - z_0|)h(z, z_0)$ und $h(z, z_0) \to 0$ für $z \to z_0)$ und $z \in D$. Trivialerweise gilt

E2 für konstante wie auch für lineare Funktionen f, da diese Stammfunktionen besitzen. Somit ist

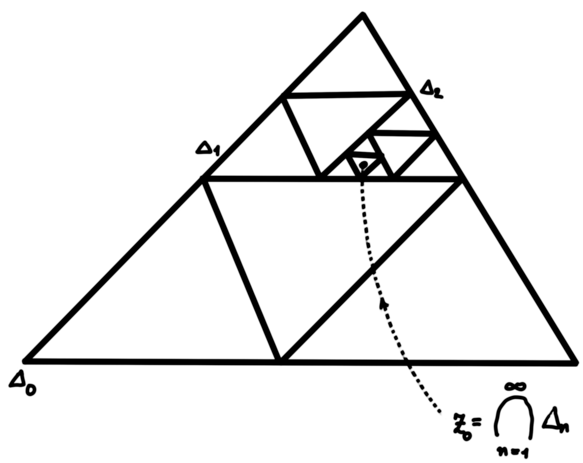
$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} r(z, z_0)dz \right|.$$

Als Abschätzung mit der Weglänge $L(\partial\Delta_n)$ erhält man

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} r(z, z_0)dz \right| \leq L(\partial\Delta_n) \max_{z\in\Delta_n} |r(z - z_0)|.$$

Beachte $L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L(\partial\Delta)$. Dann gilt

$$\max_{z\in\partial\Delta_n} |r(z - z_0)| \leq \max_{z\in\Delta_n} |z - z_0| \cdot \max_{z\in\Delta_n} |h(z, z_0)| \leq \text{const} \cdot 2^{-n} \cdot \max_{z\in\Delta_n} |h(z, z_0)| .$$

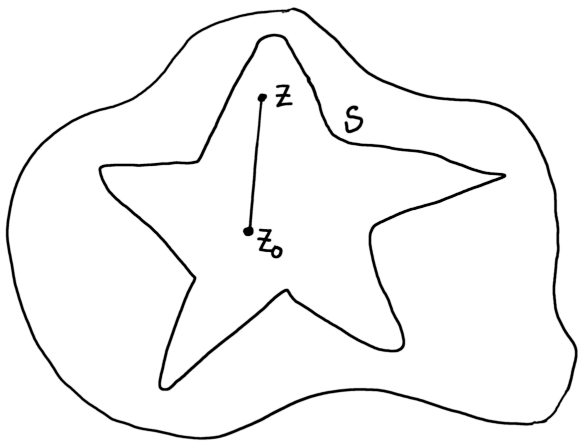


Zusammengefaßt gilt also $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq \text{const} \cdot \max_{z\in\Delta_n} |h(z, z_0)|$ und

$$\max_{z\in\Delta_n} |h(z, z_0)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Somit ist $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Aus E2 folgt



E3: *Auf jedem offenem sternförmigen Teilgebiet $S \subseteq D$ existiert eine holomorphe Funktion $F : S \to D$ mit $F'(z) = f(z)$ für $z \in S$. Man nennt in diesem Fall F eine* lokale Stammfunktion *von f auf S.*

Beweis: Sei z_0 ein Sternmittelpunkt von S und sei $z \in S$. Setze $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$, dann gilt

$$F'(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{z_0}^{z+\varepsilon} f(\xi)d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{z}^{z+\varepsilon} f(\xi)d\xi\right)$$

(der letzte Schritt verwendet E2 für das Dreieck Δ_ε mit den Ecken $z_0,\ z,\ z+\varepsilon$. Da S offen und sternförmig ist, liegt dieses Dreieck ganz in S, sofern $\varepsilon \neq 0$ klein genug gewählt ist.) Da $f(z)$ stetig ist, folgt für $\varphi(t) = z + t\varepsilon$ und $t \in [0,1]$ dann

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{z}^{z+\varepsilon} f(\xi)\ d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 f(z+t\varepsilon)\ dt \\ &= \int_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} f(z+t\varepsilon)\ dt = f(z) \end{aligned}$$

wie beim Hauptsatz der reellen Analysis.

Aus E3 folgt

E4: *Für jede stückweise glatte geschlossene Kurve φ, welche bereits in einem offenen sternförmigen Teilgebiet S von D enthalten ist, gilt*

$$\oint_\varphi f(z)dz = 0, \quad \varphi : [a,b] \to S \subseteq D.$$

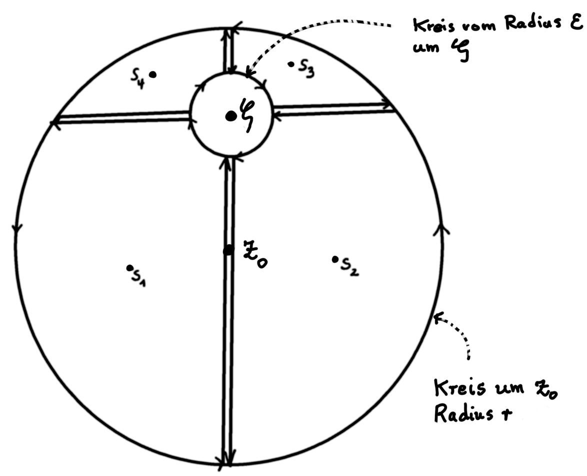
Beweis: Nach E3 haben wir eine Stammfunktion F auf dem Teilgebiet S und damit $\oint_\varphi f(t)dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = 0$ nach Korollar 3.2, da φ geschlossen ist: $\varphi(b) = \varphi(a)$.

Nachdem wir nun wissen, daß E1 die Eigenschaft E4 impliziert, erhalten wir leicht das folgende Korollar, das wir die **Schwache Form des Riemannschen Hebbarkeitssatzes** nennen werden.

Satz: *Sei $D \subseteq \mathbf{C}$ offen und sei G eine abgeschlossene Kreisscheibe $G = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r\}$, die ganz in D liegt. Sei ζ aus dem Inneren von G. Ist g holomorph und beschränkt (durch eine Konstante C) auf $G \backslash \{\zeta\}$. Dann gilt*

$$\oint_\varphi g(t)dt = 0.$$

Integration erfolgt dabei über den Kreisweg φ, der parametrisiert sei durch $\varphi(t) = z_0 + r \cdot \exp(it)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ (Gegenuhrzeigersinn).



Beweis: Zerlege das Integral wie folgt:

$$\oint_\varphi g = \oint_{\varphi_0} g + \oint_{\varphi_1} g + \oint_{\varphi_2} g + \oint_{\varphi_3} g + \oint_{\varphi_4} g,$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ wie im Bild bis auf Rotation um jeweils $\pi/2$ gewählt werden, und $\varphi_0(t) = \zeta + \varepsilon \exp(it),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$.

Da $\varphi_i \subseteq S_i$ für $i = 1,2,3,4$ in sternförmigen Gebieten mit Sternzentren $s_i \in S_i$ enthalten sind, können wir den Schluß E1 $\Rightarrow$ E4 auf $g|S_i$ für $i = 1,2,3,4$ anwenden. Also verschwinden diese 4 Integrale und wir erhalten

$$\oint_{\varphi} g = \oint_{\varphi_0} g.$$

Aber

$$\left|\oint_{\varphi_3} g\right| \leq L(\varphi_3) \cdot \max_{z\in\varphi_3([0,2\pi])} |g(z)|.$$

Also $\left|\oint_{\varphi} g\right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot C$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann. Daraus folgt $\oint_{\varphi} g = 0$. QED

Bemerkung: Die Annahme $|g(z)| \leq C$ (also die Beschränktheit von g auf $G\backslash\{\zeta\}$) ist wesentlich, denn dieselbe Rechnung zeigt

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z-\zeta} = \int_{\varphi_3} \frac{dz}{z-\zeta} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{i\exp(it)dt}{\exp(it)} = 2\pi i \neq 0$$

im Fall $g(z) = \frac{1}{z-\zeta}$ (wo zwar g holomorph aber unbeschränkt in $G\backslash\{\zeta\}$ ist).

Nachdem wir E1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ E3 $\Rightarrow$ E4 gezeigt haben, folgern wir, daß E1 (Holomorphie von f auf D) auch folgende Eigenschaft impliziert:
E5: *Für $0 \leq t \leq 2\pi$ sei $\varphi(t) = z_0 + r \cdot \exp(it)$. Falls die abgeschlossene Kreisscheibe $G = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ mit Rand φ ganz in D liegt, gilt für jeden Punkt ζ im Inneren der Kreisscheibe*

$$\oint_{\varphi} \left(\frac{f(z) - f(\zeta)}{z-\zeta}\right) dz = 0 \ .$$

Beweis: Wende den schwachen Hebbarkeitssatz an auf die in $G\backslash\{\zeta\}$ holomorphe, und in G stetige (damit beschränkte) Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z-\zeta} \ (z \neq \zeta),$$

$$g(\zeta) = f'(\zeta).$$

Aus E5 folgt weiter

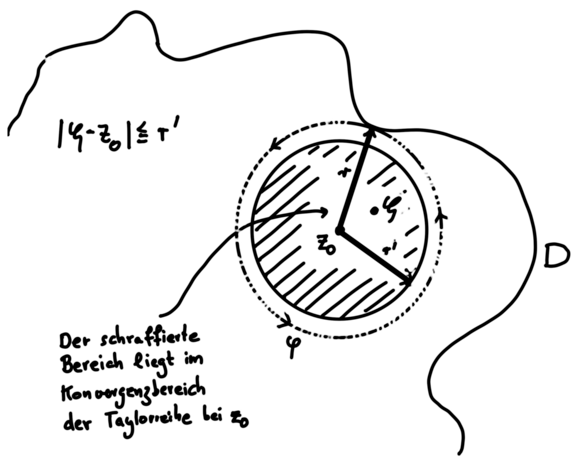
E6: *Es gilt die berühmte* **Cauchysche Integralformel**

$$\boxed{f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz}$$

für jeden Kreisweg $\varphi = re^{2\pi it} + z_0$ $(t \in [0,1])$ wie in E5 und für alle ζ mit $|\zeta - z_0| < r$ wie in E5.

Beweis: Nach E5 und der Bemerkung zum schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz ist $\oint_\varphi \frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \oint_\varphi \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}dz = f(\zeta)\oint_\varphi \frac{dz}{z-\zeta} = 2\pi i \cdot f(\zeta)$.

Aus E6 folgt



E7: *f ist* **analytisch** *in D, d.h.: Für jedes $z_0 \in D$ gibt es eine kleine Kreisfläche $|z - z_0| \leq r$ um z_0, die ganz in D liegt, so dass sich $f(\zeta)$ sich in jedem Gebiet $\{\zeta : |\zeta - z_0| \leq r' < r\}$ in eine* **absolut konvergente** *Reihe entwickeln läßt:*

$$\boxed{f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\zeta - z_0)^\nu} \quad , \quad (|\zeta - z_0| \leq r')$$

mit $a_\nu \leq \mathrm{const} \cdot r^{-\nu}$ (r Radius von φ im Sinne von E5, E6).

Beweis: OBdA sei $z_0 = 0$. Dann ist nach E6, mit $\varphi(t) = r \cdot \exp(it)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)}{z}\left(1 + \frac{\zeta}{z} + \left(\frac{\zeta}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}\right)$$

(da $|\zeta| < |z|$ für alle z auf dem Integrationsweg gilt)

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \zeta^\nu + \frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)\zeta^{n+1}}{z^{n+2}\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)}dz,$$

wobei $a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}dz$. Das Restglied geht für $n \to \infty$ gegen Null, da $|f(z)| \le C$ wegen der Stetigkeit von $f(z)$ beschränkt auf $\varphi([0,2\pi])$ ist:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)\zeta^{n+1}}{z^{n+1}(z-\zeta)}dz\right| \le C\cdot r\cdot \max_{|z-z_0|=r}\left|\frac{\zeta^{n+1}}{z^{n+1}(z-\zeta)}\right|$$

$$\le C\cdot r\cdot \left|\frac{r'}{r}\right|^{n+1}\cdot \max_{z-z_0=r}\frac{1}{z-\zeta} = \text{const}\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} \to 0 \ (n\to\infty)$$

mit $\text{const} = C\cdot\frac{r}{r-r'}$.

Somit konvergiert $\sum_{\nu=0}^n a_\nu\zeta^\nu$ gegen $f(\zeta)$ für $n\to\infty$, und es gilt

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}dz.$$

Folgerung: *Eine Abschätzung des Integrals liefert dann sofort* $|a_\nu| \le const\cdot r^{-\nu}$. *Somit konvergiert die Reihe sogar* **absolut** *und gleichmässig für alle* $|\zeta - z_0| \le r' < r$.

Aus E7 leiten wir ab

E8: f *und alle seine Ableitungen sind holomorph in* D.

Beweis: Nach E7 existiert zu jedem $z_0\in D$ ein $r'>0$, so daß $f(\zeta)$ auf $|\zeta - z_0|\le r'$ durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird:

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu(\zeta - z_0)^\nu.$$

Der aus dem Reellen bekannte Beweis zeigt, daß eine Potenzreihe auf ihrem Konvergenzgebiet differenzierbar ist und die Ableitung durch die gliedweise differenzierte Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^\infty \nu\cdot a_\nu(z-z_0)^{\nu-1}$$

dargestellt wird, da die gliedweise abgeleitete Reihe auf dem Konvergenzgebiet absolut konvergiert. Dieser Schluß überträgt sich wörtlich auf die komplexe Situation und zeigt, angewendet auf f, durch Iteration, daß f unendlich oft komplex differenzierbar ist im Punkt $z_0\in D$.

Insgesamt haben wir nun gezeigt: E1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ E3 $\Rightarrow$ E4 sowie E1 + E4 $\Rightarrow$ E5 $\Rightarrow$ E6 $\Rightarrow$ E7 $\Rightarrow$ E8. Trivialerweise gilt außerdem E8 $\Rightarrow$ E1 und E4 $\Rightarrow$ E2.

Andererseits gilt der Schluß E2 $\Rightarrow$ E3. Wir zeigen schließlich E3 $\Rightarrow$ E1. Hat $f(z)$ eine holomorphe Stammfunktion $F(z)$ (auf einem Sterngebiet $S \subseteq D$), also $F' = f$, dann sind alle Ableitungen von F holomorph und damit auch f. (Benutze dazu E1 $\Rightarrow$ E8 angewandt auf F.) Wir haben damit nun: E1 $\Rightarrow$ E4 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ E3 $\Rightarrow$ E1.

Damit sind wir nun am Ziel angelangt: Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbf{C}$ mit D offen sind die Eigenschaften E1, E2,…, E8 äquivalente Charakterisierungen der Tatsache, daß f holomorph in D ist.

Bemerkung: Im Schluß E7 $\Rightarrow$ E8 haben wir die Reihe gliedweise differenziert - erlaubt ist dies mit derselben Begründung wie in der reellen Analysis.

Konkreter: Sei oBdA $z_0 = 0$. Es genügt zu zeigen, daß für $|z|, |w| \leq r'$ gilt

$$\lim_{w \to z} \left| \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu}{z-w} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1} \right| = 0.$$

Wegen

$$\frac{z^\nu - w^\nu}{z-w} = \nu z^{\nu-1} + \sum_{n=1}^{\nu-1} (w^n - z^n) z^{\nu-n-1} = \nu z^{\nu-1} + (w-z) \cdot R(w,z)$$

mit $|R(w,z)| \leq \nu^2 \cdot (r')^{\nu-1}$ läßt sich der Limes $w \to z$ wegen der absoluten Konvergenz von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \nu^2 r^{\nu-1} \leq C$$

durch $\lim_{w \to z} |z-w| \cdot C = 0$ abschätzen.

Zusammenfassung: *Für die komplexe Ableitung haben wir gezeigt, daß folgende Eigenschaften äquivalent sind:*

(i) f ist komplex differenzierbar.

(ii) f ist unendlich oft komplex differenzierbar.

(iii) f ist analytisch, d.h. besitzt lokal konvergente Potenzreihendarstellungen.

(iv) f besitzt (lokale) Stammfunktionen.

Da eine holomorphe Funktion $f(z)$ analytisch ist, folgt aus der Taylorschen Formel und der Formel für die Taylorkoeffizienten a_ν (siehe E7) die Formel

$$\boxed{a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{\nu+1}} dz} \quad , \quad (\nu = 0, 1, \cdots)$$

Wir haben diese Formel für a_ν nur im Spezialfall $z_0 = 0$ bewiesen. Die Formel gilt aber natürlich in obiger Form ganz allgemein. Im Spezialfall $\nu = 0$ erhält man die Cauchysche Integralformel (siehe E6).

3.4 Zusammenfassung und Korollare

1. Korollar: *Eine holomorphe Funktion ist unendlich oft differenzierbar.*

2. Korollar: *Ist $f : G \to \mathbf{C}$ holomorph und $K(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subseteq G$, dann gilt die* **Cauchy-Formel***:*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

für $\varphi(t) = z_0 + r \cdot \exp(it)$.

3. Korollar: *Ist $f : G \to \mathbf{C}$ holomorph und $K(z_0, r) \subseteq M$ für alle $z \in K(z_0, r)$, dann gilt*

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$$

(Cauchys Abschätzung).

4. Korollar: *Jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbf{C}$ ist lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Der Konvergenzradius $r(z_0)$ im Punkt $z_0 \in G$ erfüllt, falls $K(z_0, r) \subseteq G$ ist, die Ungleichung $r(z_0) \geq r$.*

Beweis: Klar wegen Korollar 3.

5. Korollar: *Eine auf ganz $\mathbf{C}$ holomorphe Funktion läßt sich um jeden Punkt in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ entwickeln.*

Beweis: Klar wegen Korollar 4.

Beispiel: $f(z) = \exp(z)$.

Definition: Funktionen, welche auf ganz $\mathbf{C}$ holomorph sind, heißen *ganze Funktionen.*

Satz von Liouville: *Eine auf ganz $\mathbf{C}$ beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Korollar 3 impliziert $|f'(z_0)| \le M/r$ für alle z_0 und r, und somit $f'(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in \mathbf{C}$. Also ist $f(z)$ konstant.

Weiter folgt nun der

Fundamentalsatz der Algebra: *Jedes Polynom* $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *mit* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ *besitzt eine Zerlegung*

$$P(z) = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (z - b_\nu) \quad (a_n \neq 0,\ b_\nu \in \mathbf{C}).$$

Beweis: Durch Induktion über dem Grad stellen wir fest: Es genügt zu zeigen, daß jedes Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt. Wäre dies nicht der Fall, so wäre $\frac{1}{P(z)}$ holomorph und beschränkt - damit nach dem Satz von Liouville konstant.

Beachte: $a_n \neq 0 \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0 : |P(z)| \ge c_1 + c_2 |z|^n$.

Korollar: *Jeder kommutative Körper* $K \supseteq \mathbf{Q}$ *mit* $\dim_{\mathbf{C}}(K) < \infty$ *ist isomorph zu* $\mathbf{C}$.

Beweis: Sei $\omega \in K$, aber $\omega \notin \mathbf{C}$. Dann sind

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{\dim_{\mathbf{C}}(K)}$$

linear abhängig über $\mathbf{C}$ (aus Dimensionsgründen). Das heißt, es existieren Konstante $a_0, \ldots, a_{\dim_{\mathbf{C}(K)}-1}$ so daß gilt

$$P(\omega) = a_0 + a_1 \omega + \cdots + \omega^{\dim_C(K)} = 0.$$

Der Fundamentalsatz der Algebra liefert die Existenz von komplexen Zahlen $b_\nu \in \mathbf{C}$ mit

$$P(\omega) = \prod_{\nu} (\omega - b_\nu).$$

Es folgt $\omega = b_\nu \in \mathbf{C}$ für eines der ν. Dieser Widerspruch beweist das Korollar.

Kapitel 4

Gebiete

4.1 Elementargebiete

Sei im folgenden $D \subseteq \mathbf{C}$ immer offen.

Definition: D heißt **wegweise zusammenhängend**, wenn für alle $w, z \in D$ ein Weg

$$\varphi : [a, b] \to D$$

existiert mit $\varphi(a) = w$ und $\varphi(b) = z$.

D heißt **zusammenhängend**, wenn jede lokal konstante Funktion auf D notwendigerweise konstant ist.

Lemma: *„Wegweise zusammenhängend" impliziert „zusammenhängend".*

Beweis: Jede lokal konstante Funktion auf $[a, b]$ ist konstant!

Definition: Ein *Gebiet* ist eine wegweise zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbf{C}$.

Definition: Ein *Elementargebiet* D ist ein Gebiet von $\mathbf{C}$, auf dem jede auf D definierte holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt.

Beispiel: Jede offene sternförmige Menge in $\mathbf{C}$ (**Sterngebiet**) ist ein Elementargebiet.

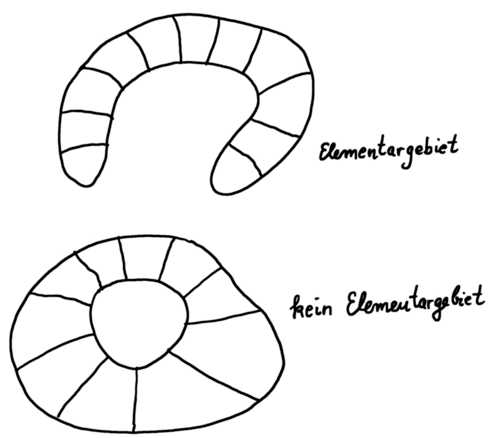
Lemma: *Seien D_1, D_2 Elementargebiete, für die $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend ist. Dann ist auch $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet.*

Beweis: Gegeben sei $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbf{C}$.
Es existieren Stammfunktionen F_1 und F_2 auf D_1 und D_2. Auf $D_1 \cap D_2$ gilt

$$F_1' = f = F_2',$$

also ist $F_1 - F_2$ lokal konstant und nach Annahme sogar konstant. Ersetzt man F_1 auf D_1 durch $F_1 - \text{const}$, dann erweitert sich $F_1 - \text{const}, F_2$ zu einer Stammfunktion von f auf $D_1 \cap D_2$.

Beispiel:



Kreisringe $D = \{z : a < |z| < b\}$ mit $0 \le a < b$ sind keine Elementargebiete. Denn $f(z) = \frac{1}{z}$ ist auf D holomorph, besitzt aber keine Stammfunktion, da $\oint_\varphi \frac{1}{z} dz \neq 0$ für Kreiswege φ mit 0 als Mittelpunkt.

4.2 Der Identitätssatz

Identitätssatz: *Seien f_1, f_2 holomorphe Funktionen auf einem Gebiet D. Besitzt die Menge der Punkte $z \in D$ mit $f_1(z) = f_2(z)$ einen Häufungspunkt in D, dann gilt $f_1 = f_2$.*

Beweis: OBdA ist $f_2 \equiv 0$ (ersetze f_1 durch $f_1 - f_2$ und setze $f = f_1$). Sei z_0 ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge von $f(z)$ in D. Dann gilt

$$f(z) = f(z_0) + \cdots + a_\nu (z - z_0)^\nu + \cdots$$

lokal um z_0 in einer kleinen Kreisscheibe. Wir behaupten: $f(z) = 0$ in dieser gesamten Kreisscheibe.

Anderenfalls existiert ein (minimales) ν mit $a_\nu \neq 0$, und dann ist

$$f = (z - z_0)^\nu \left[a_\nu + a_{\nu+1}(z - z_0) + \cdots \right].$$

Für z genügend nahe bei z_0 ist somit $f(z) \neq 0$. Widerspruch!

Umformulierung: *Die Funktion $\varphi : D \to \mathbf{C}$*

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 \text{ falls } z \in N \\ 1 \text{ falls } z \notin N \end{cases}$$

mit N als Menge der Häufungsstellen von Nullstellen von f in D ist **lokal konstant** *auf D.*
Da D ein Gebiet ist, folgt $\varphi = \text{const}$. Da $\varphi(z_0) = 0$, folgt $\varphi(z) = 0$ für alle $z \in D$. Also $f(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Übrigens: In der reellen Analysis liefert $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ ein Gegenbeispiel.

Satz: *Sei D ein* **Elementargebiet** *und $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbf{C}$ mit*

$$\boxed{f(z) = \exp(g(z))}$$

für alle $z \in D$.
Insbesondere: Für $n \in \mathbf{N}$ ist $h(z) = \exp(\frac{1}{n} g(z))$ eine holomorphe Funktion auf D mit

$$f(z) = h(z)^n.$$

Beweis: Sei $F(z)$ Stammfunktion von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ auf D. Dann gilt

$$\left[\frac{\exp(F(z))}{f(z)} \right]' = 0,$$

also $\text{const} \cdot f(z) = \exp(F(z))$ mit $\text{const} \neq 0$. Also ist $\text{const} = \exp(c)$, $c \in \mathbf{C}$.

$$g(z) = F(z) - c$$

ist die gewünschte Funktion.

4.3 Satz von der Gebietstreue

Satz von der Gebietstreue: *Sei $f : D \to \mathbf{C}$ eine* **nichtkonstante** *holomorphe Funktion auf einem Gebiet D. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet (insbesondere offen!)*

Beweis: Der wegweise Zusammenhang bleibt erhalten für beliebige stetige Funktionen f. Wir mssen zeigen, daß das Bild offen ist. Für $z \in D$ müssen wir zeigen, daß um $w = f(z)$ noch eine kleine Kreisscheibe in $f(D)$ liegt. OBdA sei $z = w = 0$. Betrachte die Potenzreihenentwicklung

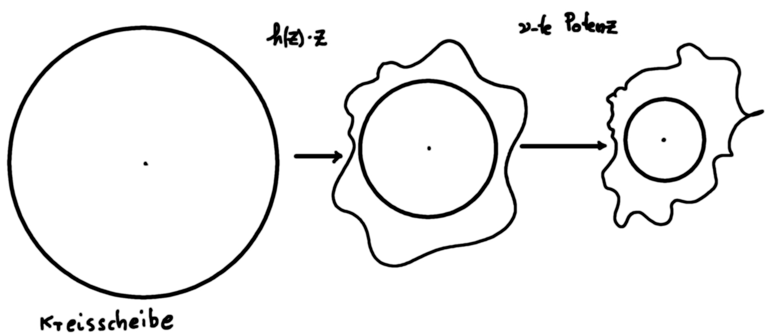
$$f(z) = a_\nu z^\nu + \cdots \quad (a_\nu \neq 0, \nu \geq 1)$$

$$= z^\nu (a_\nu + a_{\nu+1} z + \cdots) \ .$$

In einer kleinen Kreisscheibe um 0 ist der Term in der Klammer (eine stetige Funktion von z) von Null verschieden. Somit gibt es (siehe Satz 4.2) auf der Kreisscheibe eine holomorphe Funktion $h(z)$ mit

$$f(z) = z^\nu \cdot h(z)^\nu = (zh(z))^\nu$$

und $h(0) \neq 0$. Also:



Es gilt $(h(z) \cdot z)'(0) = h(0) \neq 0$. Aus dem Satz von der impliziten Funktion im $\mathbf{R}^2$ folgt: Das Bild von $h(z)z$ der Kreisscheibe ist **offen**.

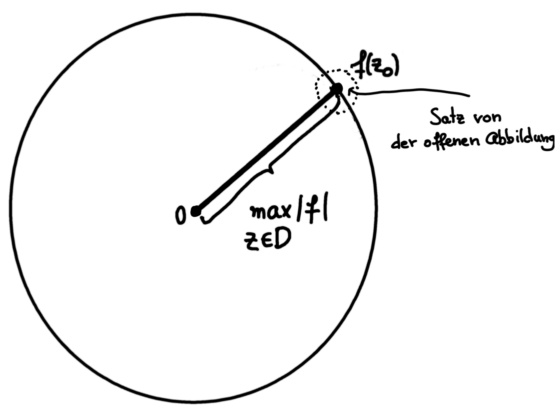
Damit existiert eine kleine Kreisscheibe um Null im Bild von $h(z)z$. Die Potenzabbildung bildet diese Kreisscheibe um Null auf eine andere Kreisscheibe ab (Polarkoordinaten!).

Maximumprinzip: *Eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet D, welche in einem Punkt $z_0 \in D$ ihr „Maximum annimmt", ist konstant.*

Bemerkung: Die Sprechweise „f nimmt Maximum in $z_0 \in D$ an" soll heißen

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|.$$

Beweis: $f(D)$ ist enthalten in der Kreisscheibe vom Radius $r = |f(z_0)|$



Wegen $|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)|$ ist dann keine kleine Kreisscheibe um $f(z_0)$ mehr im Bild. Ein Widerspruch zum Satz von der Gebietstreue!

Korollar (Schwarzsches Lemma): *Eine holomorphe Abbildung $f : E \to E$ des Einheitskreises $E = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ in sich, welche den Nullpunkt festläßt ($f(0) = 0$), erfüllt*

$$|f(z)| \leq |z|$$

für alle $z \in E$.

Zusatz: *Es gilt $|f'(0)| \leq 1$.*

Beweis: Die Funktion $F(z) = \frac{f(z)}{z}$ ist holomorph auf $E^* = E \backslash \{0\}$. Die Potenzreihenentwicklung um Null zeigt: $F(z)$ ist auf ganz E holomorph mit $F(0) = f'(0)$.

Sei $z \in E$ und $r > |z|$. Das Maximumsprinzip zeigt

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \max_{|\varrho|=r} \frac{|f(\varrho)|}{|\varrho|} \leq \frac{1}{r},$$

im Limes $r \to 1$ folgt daraus

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1.$$

Bemerkung: *Wird Gleichheit angenommen, d.h.* $|f(z)| = |z|$ *oder* $|f'(0)| = 1$, *dann folgt*

$$f(z) = \varrho \cdot z, \quad |\varrho| = 1.$$

Beweis: Klar, da dann $f(z)/z$ nach dem Maximumsprinzip konstant ist.

Kapitel 5

Laurentreihen und Residuensatz

Alle Aussagen über Reihen, die im folgenden Abschnitt bewiesen werden, gelten sinngemäss auch für Folgen, da jede Folge f_n aufgefasst werden kann als Teleskopreihe $f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + ...$

5.1 Reihen komplexer Funktionen

Wir betrachten Funktionen

$$f_n : D \to \mathbf{C}, \qquad D \subseteq \mathbf{C}.$$

Definition: $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf D, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so daß gilt

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{m} f_\nu(z) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > n > N(\varepsilon).$$

Definition: $\sum_{n=0}^{\infty} f_\nu(z)$ heißt **absolut gleichmäßig konvergent**, falls die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu(z)|$ gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung: Klar ist, daß absolut gleichmäßige Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz impliziert.

Lemma (Weierstraßsches M-Kriterium): *Es gelte*

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \textit{für alle } z \in D,$$

und es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ konvergent,}$$

dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *absolut gleichmäßig auf* D.

Beweis: Offensichtlich ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ absolut konvergent, also konvergent. Außerdem gilt

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} f_\nu(z)\right| \leq \sum_{\nu=n}^{m} M_\nu < \varepsilon$$

für $m > n > N(\varepsilon)$.

Definition: Eine Reihe heißt *kompakt (absolut) konvergent* in D, falls auf jedem Kompaktum $K \subseteq D$ die Reihe (absolut) gleichmäßig konvergiert.

Satz (aus der reellen Analysis): *Sei* D *offen und* $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ *kompakt konvergent für* **stetige** *Funktionen* $f_\nu(z)$ *auf* D. *Dann ist die Grenzfunktion*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$$

eine **stetige** *Funktion auf* D.

Beweis: Sei $z_0 \in D$. Dann existiert eine Kreisscheibe $K = K(z_0, r) \subseteq D$, die abgeschlossen und damit kompakt ist. Für alle $z \in K$ gilt

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (f_\nu(z) - f_\nu(z_0)) \; + \sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(z) - \sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(z_0),$$

also:

$$|f(z) - f(z_0)| \; < \; m \cdot \frac{\varepsilon}{3m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

falls $|\sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|\sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für geeignetes $m > N(\frac{\varepsilon}{3})$ (benutze die gleichmässige Konvergenz) und falls $r > 0$ so klein gewählt wurde dass dann für $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$ gilt (benutze Stetigkeit der $f_\nu(z)$)

$$|f_\nu(z) - f_\nu(z_0)| < \varepsilon/3m.$$

Bemerkung: Jede kompakte Teilmenge Ω von D kann durch endlich vielekompakte Kreisscheiben in D überdeckt werden. Gleichmäßige Konvergenz auf allen **kompakten** Kreisscheiben in D impliziert daher die kompakte Konvergenz in D.

Integralvertauschungsatz: *Sei φ ein stückweise glatter Weg in einer offenen Teilmenge D von $\mathbf{C}$. (1) Seien $f_\nu(z)$ stetig auf einer offenen Umgebung des Bildes von φ in D. (2) Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$* **kompakt konvergent** *in D. Dann gilt:*

$$\int_\varphi \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z) \right) dz = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_\varphi f_\nu(z) dz.$$

Beweis:
1. Durch Schrumpfen von D kann man oBdA annehmen, daß alle f_ν stetig in D sind.
2. Es existiert eine offene Menge U und ein Kompaktum K mit $\varphi \subseteq U \subseteq K \subseteq D$.
3. Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ eine stetige Funktion auf K nach dem obigem Satz aus der Analysis (insbesondere existiert damit das Integral auf der linken Seite).
4. Es gilt

$$\left| \int_\varphi \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z) \right) dz - \sum_{\nu=0}^{m} \int_\varphi f_\nu(z) dz \right| = \left| \int_\varphi \sum_{\nu=m+1}^{\infty} f_\nu(z) dz \right| \leq L(\varphi) \cdot \varepsilon$$

für $m > N_k(\varepsilon)$ mittels der trivialen Abschätzung des Integrals (benutze die gleichmässige Konvergenz auf K).
5. Im Limes $\varepsilon \to 0$ ergibt sich die Behauptung.

Hauptsatz (Weierstraß): *Sei D offen und seien $f_\nu : D \to \mathbf{C}$ holomorph. Ist $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$* **kompakt konvergent** *in D, dann gilt:*

(i) Die Grenzfunktion $f(z)$ ist holomorph auf D.

(ii) Die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(n)}(z) \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergieren *wieder* **kompakt** *in D.*

(iii) Die Reihe darf beliebig oft gliedweise differenziert werden, d.h.

$$f^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(n)}(z) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Beweis:

1. Die Grenzfunktion ist **stetig** nach einem der obigen Sätze.

2. Der Integral-Vertauschungssatz ist somit anwendbar. Der **Satz von Morera** (E2 ist äquivalent zu E1)

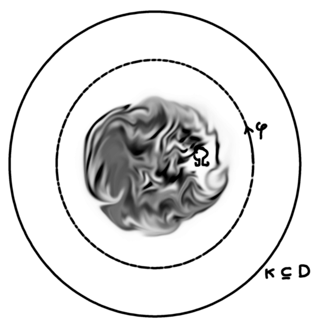
$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0 \ (\forall \Delta) \Rightarrow f \text{ holomorph}$$

zeigt, angewandt zuerst auf die $f_\nu(z)$

$$\int_{\Delta} f(z)dz = \int_{\Delta} \sum_{\nu} f_\nu(z)dz = \sum_{\nu} \int_{\Delta} f_\nu(z)dz = \sum_{\nu} 0 = 0,$$

und dann angewandt auf $f(z)$, daß f holomorph ist. Das zeigt (i).

3. Zum Beweis von (ii) und (iii) kann man sich auf kompakte Kreisscheiben Ω um Punkte beschränken. Zu Ω in K kann man obdA annehmen esexistiere $\Omega \subseteq K^0 \subseteq K \subseteq D$.



4. Beachte (siehe Zeichnung):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

und damit wird die Aussage (ii) und (iii) auf den Integralvertauschungssatz zurückgeführt. Somit überträgt sich die Abschätzung der kompakten Konvergenz für $z \in \Omega$ auf die Partialsummen

$$\sum_{\nu=m}^{m'} f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\sum_{\nu=m}^{m'} f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Es folgt nämlich

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m'} f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r_K \cdot \frac{1}{\mu^{n+1}} \cdot \varepsilon = const \cdot \varepsilon \quad \text{für } m' > m > N(\varepsilon),$$

mit $\mu = r_K - r_\Omega > 0$. Dies liefert Aussage (ii).

5. Aus dem Integralvertauschungssatz folgt wegen (ii) dann (iii)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f_\nu(\zeta)}{(\xi - z)^{n+1}} d\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(n)}(z).$$

Bemerkung: Ein Analogon des Weierstraßschen Satzes für differenzierbare Funktionen im Reellen existiert nicht!

5.2 Laurent-Reihen

Gegeben seien reelle Zahlen r und R mit

$$0 \leq r < R \leq \infty$$

Die Grenzfälle $r = 0$ und $R = \infty$ werden wir zusätzlich zulassen, wobei in diesen Fällen die Kehrwerte $1/r$ beziehungsweise $1/R$ auf offensichtliche Weise zu interpretieren sind.
Wir betrachten nun die folgenden **Kreisringe**

$$D = \{z \in \mathbf{C} : r < |z| < R\}.$$

Beispiel: Im Grenzfall $r = 0$ und $R = \infty$ erhält man die gelochte Ebene $D = \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$, oder etwa im Grenzfall $r = 0$ für $R = 1$ die gelochte Kreisscheibe $D = \mathbf{E}^* = \mathbf{E}\backslash\{0\}$, wobei $\mathbf{E} = \{z : |z| < 1\}$.

Wir wollen nun holomorphe Funktionen auf den Kreisringen konstruieren. Man hat folgende offensichtliche Konstruktion: Seien (*)

$$f_1 : \{z : |z| < R\} \to \mathbf{C} \quad , \quad f_2 : \{z : |z| < \frac{1}{r}\} \to \mathbf{C}$$

holomorphe Funktionen, dann ist

$$f(z) = f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

eine **holomorphe** Funktion auf dem Kreisring D. Dies ist klar, denn $z \in D$ impliziert $|z| < R$ und $|\frac{1}{z}| < \frac{1}{r}$. Ersetzt man $f_1(z), f_2(z)$ durch $f_1(z) + c, f_2(z) - c$ für eine Konstante c, so ändert dies nicht die Funktion $f(z)$. Dies erlaubt es bei dieser Konstruktion obdA anzunehmen $f_2(0) = 0$.

Satz (Laurent 1843):
Jede auf dem Kreisring $D = \{z : r < |z| < R\}$ definierte holomorphe Funktion $f(z)$ besitzt eine Zerlegung

$$f(z) = f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

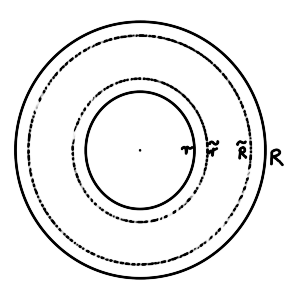
mit holomorphen Funktionen $f_1(z), f_2(z)$ auf Definitionsbereichen wie in (*). Nimmt man obdA an $f_2(0) = 0$, dann sind die Funktionen $f_1(z), f_2(z)$ dadurch **eindeutig** *bestimmt.*

Definition/Bemerkung: Wurde $f_2(z)$ durch die Eigenschaft $f_2(0) = 0$ normiert, nennen wir die Funktion $H(z) = f_2\left(\frac{1}{z}\right)$ den **Hauptteil** von $f(z)$. Offensichtlich ist $H(z)$ eine holomorphe Funktion auf dem ganzen Aussenring $\{z \in \mathbf{C} : |z| > r\}$. Also

$$f(z) = f_1(z) + H(z)$$

und $f_1(z)$ ist holomorph in $\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ und $H(z)$ ist holomorph in $\{z \in \mathbf{C} : |z| > r\}$.

Beweis der Eindeutigkeit. ObdA sei $f \equiv 0$, also Sei $f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right) = 0$. Wähle reelle Zahlen $\tilde{r}, \tilde{R}$ mit $r < \tilde{r} < \tilde{R} < R$.



Dann definiert

$$u(z) = \begin{matrix} f_1(z) & \text{falls } |z| < R \\ -f_2\left(\frac{1}{z}\right) & \text{falls } |z| > r \end{matrix} \quad .$$

eine holomorphe Funktion $u(z)$ auf ganz $\mathbf{C}$, welche beschränkt ist durch

$$\max_{|z| \le \tilde{R}} |f_1(z)|, \ \max_{|z| \le \tilde{r}^{-1}} |f_2(z)| \qquad (r < \tilde{r} < \tilde{R} < R).$$

Somit ist $u(z)$ nach dem Satz von Liouville konstant, d.h. $f_1(z) = -f_2(z) =$ const gilt auf D. Wegen der Normierung von $f_2(z)$ folgt daher $f_1(z) = 0$ und $f_2(z) = 0$.

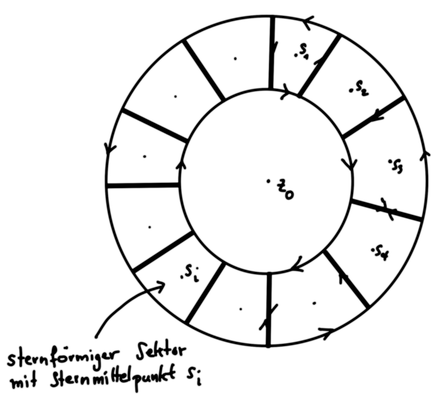
Beweis der Existenz. Sei wie oben $r < \tilde{r} < \tilde{R} < R$. Wir konstruieren die Laurentzerlegung im kleineren Gebiet $\tilde{D} = \{z : \tilde{r} < |z| < \tilde{R}\}$.

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung lassen sich diese Funktionen auf den kleineren Gebieten $\tilde{D}$ zu Funktionen auf D fortsetzen.

Sei $z \in \tilde{D}$.
Behauptung:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{R}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Klar durch Zerlegung des Kreisringes in kleinere Sterngebiete (Sektoren):



Hier ist $\oint_{\tilde R} f(\zeta)/(\zeta-z)d\zeta - \oint_{\tilde r} f(\zeta)(\zeta-z)d\zeta$ die Summe der entsprechenden Integrale über alle Sektoren. Diese verschwinden, mit Ausnahme des Integral über den einen Sektor der z im Inneren enthält. Ein Argument ähnlich zum dem beim Beweis des Schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatzes zeigt dann aber, dass dieses verbleibende Integral nur über einen kleinen ε-Kreis um z im Sektor ausgeführt werden muss, und damit wegen dem Satz von Cauchy gleich $2\pi i f(z)$ ist.

Setze $f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$: Diese Funktion ist wohldefiniert für alle $|z| < \tilde R$. Begrndung: Da $\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{zf(\zeta)}{\zeta^2} + \cdots$ kompakt konvergiert für $|\zeta| < \tilde R$, ist

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta\right)$$

kompakt konvergent und damit holomorph in $|z| < \tilde R$.

Setze $f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde r} \frac{zf(\zeta)}{-\zeta z + 1} d\zeta$:

Wohldefiniert für alle $|z| < \tilde r^{-1}$!
Analog wie oben zeigt man, daß

$$f_2(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde r} f(\zeta)\cdot \zeta^\nu d\zeta\right)$$

eine holomorphe Funktion auf $|z| < \tilde r^{-1}$ definiert.

Bemerkung: Sei $f(z)$ allgemeiner eine auf einem Gebiet Ω holomorphe Funktion. Falls Ω den Kreisring $D = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ enthält, liefert die Laurententwicklung von $f(z)$ im Punkt z_0 eine Zerlegung

$$f(z) = f_1(z) + H(z),\ H(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z - z_0)^{-\nu}.$$

Wir erinnern daran, daß $H(z)$ eine holomorphe Funktion auf dem ganzen Aussenring $\mathbf{C}\backslash\{z_0\}$ definiert. Also

$$f(z) = f_1(z) + H(z),$$

wobei $f_1(z) = f(z) - H(z)$ holomorph auf $\Omega \cup \{z_0\}$ ist, und $H(z)$ holomorph auf $\Omega\backslash\{z_0\}$.

Folgerung: *Für gegebenes* $0 \le r < R \le \infty$ *sei* f *holomorph in dem Ringgebiet* $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$. *Dann läßt sich* f *in eine Laurentreihe*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$$

entwickeln, welche in D kompakt konvergiert.

Zusatz: *Diese Laurententwicklung ist eindeutig bestimmt und es gilt*

$$\boxed{a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta} \quad , \quad r < \varrho < R$$

für alle $\nu \in \mathbf{Z}$ und ein beliebig gewähltes ρ zwischen r und R.

Schreibweise: Wir schreiben für die Laurententwicklung auch kurz

$$\boxed{f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu} \ ,$$

wobei dies durch die obigen zwei Reihen dann präzise definiert sei!

Beweis: OBdA reduziert man auf $z_0 = 0$. In diesem Fall haben wir die Aussage gezeigt. Der Zusatz folgt, wenn man

$$\tilde{r} < \varrho < \tilde{R}$$

wählt und den Limes $\tilde{r} \to \varrho$, $\tilde{R} \to \varrho$ bildet.

Bemerkung: Offensichtlich verallgemeinert die Laurententwicklung die Taylorentwicklung einer in $|z| < R$ holomorphen Funktion. Beachte, dass in diesem Fall für alle $\nu \geq 1$ die Koeffizienten

$$a_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\varrho f(\zeta)\zeta^{\nu-1} d\zeta = 0$$

verschwinden, da der Integrand $f(\zeta)\zeta^{\nu-1}$ dann holomorph in der Kreisscheibe $|z| < R$ ist.

5.3 Singularitäten

Sei $D \subseteq \mathbf{C}$ offen und S in D abgeschlossen.

Definition: $S \subseteq D$ heißt *diskrete* Teilmenge von D, wenn S in D keinen Häufungspunkt besitzt. Das heisst, um jedes $s \in S$ existiert ein offener Kreisring $U \subset D$ mit $U \cap S = \{s\}$.

Bemerkung: Insbesondere ist dann $D \backslash S$ offen.

Sei S diskret in D und $f : D\backslash S \to \mathbf{C}$ holomorph. Die Punkte $s \in S$ heißen *Singularitäten* von f. Sei $s = z_0$ eine der Singularitäten.

Für jede Singularität $z_0 \in D$ besitzt f auf $U \setminus \{z_0\}$ eine *Laurententwicklung*

$$f(z) \;=\; \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \;.$$

Definition: Die Singularität z_0 von $f(z)$ nennt man
(i) **hebbar**, falls gilt $a_\nu = 0$ für $\nu < 0$. (Dies ist genau dann der Fall, wenn f sich auf $(D \setminus S) \cup \{z_0\}$ zu einer holomorphen Funktion fortsetzen läßt.)
(ii) einen **Pol (der Ordnung $n \geq 1$)**, falls $a_\nu = 0$ gilt für alle $\nu < -n$ und falls $a_\nu \neq 0$ gilt für $\nu = -n$ (Hierbei nehmen wir an $n \in \mathbf{N}_{>0}$).
(iii) eine **wesentliche Singularität** von $f(z)$, wenn $a_\nu \neq 0$ gilt für unendlich viele $\nu < 0$.

Riemannscher Hebbarkeitssatz: *Der Fall (i) einer hebbaren Singularität z_0 liegt genau dann vor, wenn $f(z)$ in einer geeigneten Umgebung von z_0 beschränkt ist.*

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Ist die Singularitt hebbar, dann ist f in einer gegeigneten Umgebung von z_0 holomorph, und damit bei z_0 stetig und und in einer Umgebung beschrnkt. Sei nun umgekehrt $f(z)$ beschränkt in einer Umgebung U von z_0; obdA ist dann U ein Kreisring. Die Koeffizienten

$$a_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta - z_0 = \varrho} f(z)(z - z_0)^{\nu-1} dz \quad , \quad (\nu \geq 1)$$

der Laurentreihe von f auf U für $\nu \geq 1$ erfüllen dann

$$|a_{-\nu}| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \max_{z - z_0 \leq \varepsilon} |f(z)| \cdot \varrho^{\nu-1}$$

für jeden Kreisring vom Radius ρ in U. Im Limes $\rho \to 0$ folgt dann $a_{-\nu} = 0$ wegen $\nu \geq 1$. Somit gilt $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \geq 1$. Das heisst $f(z)$ läßt sich in

U in eine kompakt konvergente Taylorreihe entwickeln, ist also holomorph fortsetzbar auf die Umgebung U von z_0.

Satz von Casorati-Weierstraß: *Der Fall (ii) eines* **Poles** *liegt genau dann vor, wenn gilt:*

$$|f(z)| \to \infty \quad \textit{für } z \to z_0$$

(d.h. für jedes $C > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(z)| > C$ falls $|z - z_0| < \varepsilon$).

Der Fall (iii) einer **wesentlichen Singularität** *liegt genau dann vor, wenn das Bild einer noch so kleinen Umgebung von z_0 dicht in $\mathbf{C}$ liegt, d.h. mit anderen Worten wenn gilt: Zu jedem $w \in \mathbf{C}$ sowie $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ existiert ein $z \in D$ mit $|z - z_0| < \varepsilon_1$ und $|f(z) - w| < \varepsilon_2$).*

Beweis:
1) Besitzt f einen Pol bei z_0 der Ordnung $n \geq 1$, dann gilt wegen $a_{-n} \neq 0$

$$|f(z)|^{-1} = |(z - z_0)^n| \cdot |(a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots)|^{-1}$$

$$\to \left| \frac{(z - z_0)^n}{a_{-n}} \right| \to 0 \quad \text{für } z \to z_0.$$

2) Wir zeigen: Besitzt $f(z)$ eine wesentliche Singularität bei z_0, dann existiert für jedes w eine Folge $z_\nu \to z_0$ mit $f(z_\nu) \to w$. Beweis durch Widerspruch! Andernfalls wäre $\frac{1}{f(z)-w}$ **beschränkt** in einer Umgebung von z_0, und nach dem Hebbarkeitssatz fortsetzbar zu einer holomorphen Funktion $h(z)$ auf eine Umgebung von z_0. Sei $n \geq 0$ die Nullstellenordnung von $h(z)$ im Punkt $z = z_0$. Dann besitzt

$$f(z) = w + \frac{1}{h(z)} = w + (z - z_0)^{-n} \frac{1}{a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots} \qquad (a_n \neq 0,\ n \geq 0)$$

einen **Pol der Ordnung** n in z_0 (falls $n \geq 1$) oder ist holomorph (im Fall $n = 0$). Beide Möglichkeiten widersprechen der Annahme einer wesentlichen Singularitt!

5.4 Die Umlaufszahl (eine interessante Invariante)

Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbf{C}$ eine **geschlossene, stückweise glatte** Kurve in $\mathbf{C}$.

Definition: Für einen Punkt $z \in \mathbf{C}$ nicht auf Weg φ nennt man

$$\boxed{N(\varphi, z) := \tfrac{1}{2\pi i} \int_\varphi \tfrac{d\zeta}{\zeta - z}} \qquad , \quad (z \notin \varphi[a, b])$$

die **Umlaufszahl** von φ um z.

Satz: *Die Umlaufszahl $N(\varphi, z)$ ist eine ganze Zahl aus $\mathbf{Z}$.*

Beweis: Sei $a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = b$ und φ **glatt** auf allen Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}]$. Für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ setze

$$g(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s) - z} \ + \ \int_{t_i}^{t} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s) - z} \qquad (t \in [t_i, t_{i+1}]).$$

Dann definiert $g(t)$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ mit $g(a) = 0$ und $g(b) = 2\pi i \cdot N(\varphi, z)$, deren Einschränkung auf die Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$g'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z} \qquad (t_i \leq t \leq t_{i+1}).$$

Wir behaupten, dass dann die stetige Hilfsfunktion auf $[a, b]$

$$\psi(t) = (\varphi(t) - z)e^{-g(t)}$$

konstant sein muss. Es genügt dazu auf den Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}]$ zu zeigen, dass die Ableitung von $\psi(t)$ verschwindet

$$\frac{d}{dt}\left[(\varphi(t) - z)e^{-g(t)}\right] = \varphi'(t)e^{-g(t)} - (\varphi(t) - z)g'(t)e^{-g(t)} = 0.$$

Es folgt

$$e^{-g(a)}(\varphi(a) - z) = e^{-g(b)}(\varphi(b) - z) \ .$$

Wegen $\varphi(a) = \varphi(b)$ und $z \neq \varphi(a)$ gilt dann $e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$ und damit wegen $g(a) = 0$

$$2\pi i \cdot N(\varphi, z) = g(b) = g(a) + 2\pi i n = 2\pi i n \qquad (n \in \mathbf{Z}) \ .$$

5.5 Der Residuensatz

Definition: Sei z_0 eine **Singularität** einer holomorphen Funktion. Dann nennt man den Koeffizient a_{-1} der Laurententwicklung von $f(z)$ in z_0 das **Residuum**

$$Res_{z_0}(f) = a_{-1}$$

von f in z_0. (Zur Erinnerung: Einen Punkt $z_0 \in \mathbf{C}$ nennt man eine Singularität einer holomorphen Funktion, wenn $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ im Definitionsbereich der holomorphen Funktion liegt.)

Der Residuensatz: *Sei D ein Elementargebiet (!). Seien $z_1, \ldots, z_l$ endlich viele Punkte in D und $\varphi : [a,b] \to D \backslash \{z_1, \ldots, z_l\}$ eine stückweise glatte* **geschlossene** *Kurve und sei $f(z)$ holomorph auf $D \backslash \{z_1, \ldots, z_l\}$. Dann gilt*

$$\boxed{\int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \sum_\nu N(\varphi, z_\nu) Res_{z_\nu}(f)}$$

Beweis: Der Hauptteil $H_\nu(z)$ von $f(z)$ im Punkt $z = z_\nu$ definiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbf{C} \setminus \{z_\nu\}$. Somit ist die Hilfsfunktion $h(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^{l} H_\nu(z)$ nicht nur holomorph auf $D \backslash \{z_1, \ldots, z_l\}$, sondern sogar **holomorph** auf ganz D. Im Punkt z_ν ist nämlich $f(z) - H_\nu(z)$ holomorph ebenso wie alle $H_\mu(z)$ für $\mu \neq \nu$. Da D ein Elementargebiet ist folgt daher $\int_\varphi h(z)dz = 0$. In Termen von $f(z)$ ergibt dies

$$\int_\varphi f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{l} \int_\varphi H_\nu(z)dz.$$

Entwickelt man den Hauptteil $H_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_\nu)^{-n}$ bei $z = z_\nu$ in seine Laurentreihe, so erhält wegen der kompakten Konvergenz der Laurententwicklung

$$\int_\varphi H_\nu(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\varphi \frac{dz}{(z - z_0)^n} = a_{-1} \cdot \int_\varphi \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i N(\varphi, z_\nu) \cdot Res_{z_\nu}(f)\,.$$

wegen $\int_\varphi \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \left[\frac{-1}{(n-1)(z-z_0)^{n-1}}\right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = 0$ für $n \geq 2$.

5.6 Anwendungen des Residuensatzes

Sei $D = \{z : \mathrm{Im}(z) > -\varepsilon\}$ für ein $\varepsilon > 0$. Sei $S \subset D$ eine endliche Teilmenge von D in der oberen komplexen Halbebene und $f : D \backslash S \to \mathbf{C}$ sei holomorph. Es gelte außerdem für ein $\delta > 0$

$$|f(z)| < |z|^{-1-\delta} \quad (|z| >> 0 \text{ in } D) \ .$$

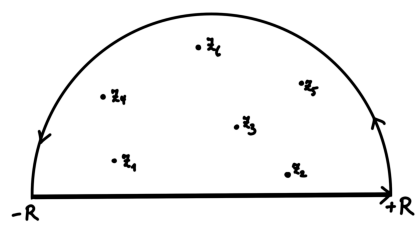
Behauptung: *Dann existiert das Riemann-Integral*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ ,$$

und es gilt

$$I = 2\pi i \sum_{z_\nu \in S} Res_{z_\nu}(f) \ .$$

Beweis:



Hier gilt für genügend grosses R

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_\nu \in S} Res_{z_\nu}(f) + \mathrm{Rest}(R)$$

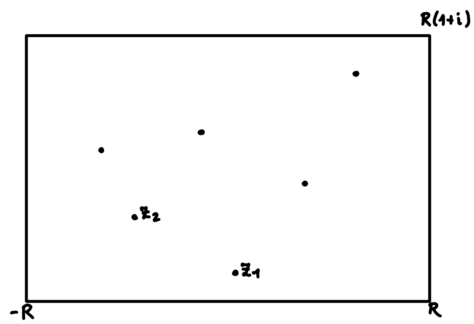
mit der Abschätzung $|\mathrm{Rest}(R)| \leq 2\pi \cdot 2\pi R \cdot \frac{1}{R^{1+\delta}} \to 0$ für $R \to \infty$ für das Bogenintegral.

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Hier ist $S = \{\zeta, \zeta^3\}$ für $\zeta = exp(2\pi i/8)$.

Unter den oben gemachten Annahmen an $f(z)$, gelten die selben Annahmen auch für die Funktion $e^{iz}f(z)$. Es folgt daher

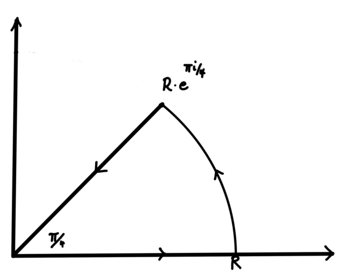
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_\nu \in S} Res_{z_\nu}(e^{it}f(z)).$$

Betrachte zur Abschätzung anstelle der Halbkreise folgende Integrationskonturen:



Bemerkung: Die obige Annahme ist immer erfüllt, falls $f = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine gebrochen rationale Funktion ist mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Solche uneigentlichen Integrale mit Integranden $e^{it}P(t)/Q(t)$ treten in der Physik auf (Elektrodynamik, Feynman Integrale, Propagatoren).

(Fresnelsches Integral) $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$.



Wir zeigen, daß das Integral von e^{-z^2} über den eingezeichneten Bogenweg φ vom Winkel $\pi/4$ im Limes $R \to \infty$ verschwindet.

$$\left|\int_\varphi e^{-z^2}dz\right| \leq \left|\int_0^{\pi/4} e^{-(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2R^2}d\varphi\cdot Rie^{i\varphi}\right|$$

$$\leq R\int_0^{\pi/4} e^{-\cos 2\varphi\cdot R^2}d\varphi = R\int_0^{\pi/4} e^{-\sin(2\varphi)R^2}d\varphi$$

$$\leq R\int_0^{\pi/4} e^{-\lambda\varphi R^2}d\varphi \leq \frac{1}{R}\cdot\mathrm{const}\to 0 \quad \text{für } R\to\infty.$$

Beachte dabei $|e^{-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2R^2}| = e^{-Re(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2R^2} = e^{-cos(2\varphi)R^2}$. Beachte $cos(2(\frac{\pi}{2}-\varphi)) = sin(2\varphi)$ unter der Substitution $\varphi\mapsto\frac{\pi}{2}-\varphi$. Weiterhin gibt es ein reelles $\lambda = sin(\pi/2) > 0$ mit $\lambda t \leq sin(2t)$ für alle $0\leq t\leq \pi/4$.

Also folgt aus dem Residuensatz, dass die Summe der beiden Integrale über die positive x-Achse und die Winkelhalbierende im Limes $\to\infty$ verschwinden. Wegen der Parametrisierung $z = e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot t$ der Winkelhalbierenden gibt dies

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt + \int_0^\infty e^{-it^2}dt\cdot(-1)\cdot\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0\ .$$

Somit ist $\int_0^\infty cos(t^2)dt - i\int_0^\infty sin(t^2)dt = \int_0^\infty e^{-it^2}dt$ gleich

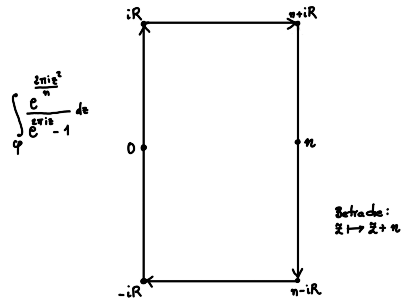
$$e^{-i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

Hier wurde zum Schluss die bekannte Formel $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ benutzt.
Es folgt

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Übungsaufgabe: $\sum_{\nu=0}^{n-1}\exp\left(2\pi i\frac{\nu^2}{n}\right) = \frac{(1+i)(1+i^{3n})}{2}\cdot\sqrt{n}.$

Hinweis: Betrachte $\int\frac{\exp(\frac{2\pi i z^2}{n})}{\exp(2\pi i z)-1}dz$ und untersuche die Substitution $z\to z+n$. Integriert wird über den untenstehenden Weg.)



5.7 Der Satz von Rouché

Satz: *Sei D ein* **Elementargebiet**. *Sei $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph mit Ausnahme von endlich vielen Polstellen $b_1, \ldots, b_r$ in D, und mit endlich vielen Nullstellen $a_1, \ldots, a_s$ in D. Sei $\varphi : [a,b] \to D$ ein stückweise glatter geschlossener Weg in D mit $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r \notin \varphi[a,b]$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $F : D \to \mathbf{C}$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum N(\varphi, a_i)F(a_i) - \sum N(\varphi, b_j)F(b_j) \ .$$

In den Summen werden die Null- und Polstellen von f mit ihren Vielfachheiten gezählt.

Beweis: Eine unmittelbare Folge des Residuensatzes wegen

$$Res_{z_0}(f'(z)F(z)/f(z)) = v_{z_0}(f)F(z_0) \ ,$$

wobei $n = v_{z_0}(f)$ den Index n des ersten von Null verschiedenen Laurentkoeffizienten a_n von $f(z)$ im Punkt $z = z_0$ bezeiche (d.h. bis auf das Vorzeichen ist n die Vielfachheit der Nullstelle bzw Polstelle). Dies folgt aus $f'(z)/f(z) = \frac{n}{z-z_0} + ...$, denn wegen $(fg)'/fg = f'/f + g'/g$ genügt es dies im Fall $f(z) = (z-z_0)^n$ zu zeigen und im Fall einer holomorphen Funktion $f(z) = a_0 + ...$ mit $f(z_0) = a_0 \neq 0$. Im ersten Fall ist $f'/f = \frac{n}{z-z_0}$. Im zweiten Fall ist f'/f holomorph im Punkt $z = z_0$. QED

Ein wichtiger Spezialfall: $F \equiv 1$. Dann erhält man als Korollar wegen der Substitutionsregel die Formel

$$N(f\circ\varphi, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\varphi}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum N(\varphi, a_j) - \sum N(\varphi, b_j) \ .$$

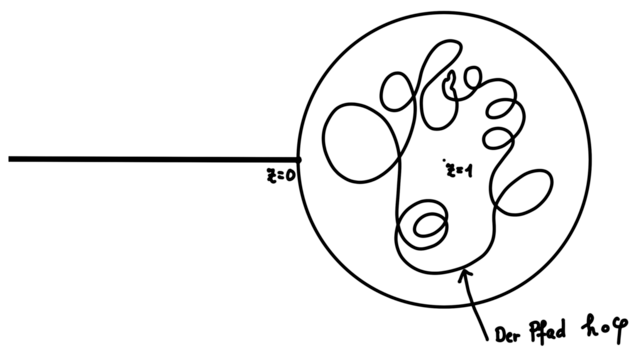
Satz von Rouché: *Seien f, g holomorph in einem Elementargebiet D und sei φ ein geschlossener Kreisweg in D, so daß das Innere ganz in D liegt. Gilt die Abschätzung*

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|$$

auf dem Kreisweg φ, dann liegt keine Nullstelle von $f(z)$ oder $g(z)$ auf dem Kreisweg φ, und es gilt: $f(z)$ und $g(z)$ besitzen gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) im Inneren des Kreises.

Beweis: Es gilt $\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$ für $z \in \varphi([a,b])$. Somit erfüllt $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ die Voraussetzungen des obigen Satzes. Wir zeigen nun im nächsten Lemma, dass aus $|\psi(t) - 1| < 1$ für $\psi = h \circ \varphi$ folgt

$$N(h \circ \varphi, 0) = 0 \ .$$



Aus dem obigen Satz folgt dann für die gewichteten Anzahlen der Nullstellen N_h, H_g, N_f von h, g, f respektive der Zahl P_h der Polstellen von h im Inneren des Kreises

$$N_g - N_f = N_h - P_h = N(h \circ \varphi, 0) = 0 \ .$$

Dies liefert die Behauptung $N_g = N_f$. QED

Lemma: *Sei ψ ein geschlossener stückweise glatter Weg in der geschlitzen komplexen Ebene $D = \mathbf{C} \backslash \{z : z \in -\mathbf{R}_{\geq 0}\}$. Dann ist die Umlaufszahl von ψ um $z = 0$ gleich Null*

$$N(\psi, 0) = 0 \ .$$

Beweis: Da $\frac{1}{\zeta}$ in $D = \mathbf{C} \backslash \{z : z \in -\mathbf{R}_{\geq 0}\}$ den Hauptteil des Logarithmus $\log(\zeta)$ als holomorphe Stammfunktion besitzt, folgt

$$N(\psi, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\psi} \frac{d\zeta}{\zeta} = \log(\zeta)|_{\psi(a)}^{\psi(b)} = 0$$

wegen $\psi(a) = \psi(b)$.

Kapitel 6

Konstruktion von meromorphen Funktionen

Sei D ein Gebiet.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \hat{\mathbf{C}}$ (D Gebiet) heißt **meromorph**, falls gilt:
(i) Die Menge S der Unendlichkeitsstellen von f ist abgeschlossen und diskret in D.
(ii) f eingeschränkt auf $D \backslash S$ ist holomorph.
(iii) Alle Singularitäten von f in S sind **Pole**.

Beispiel: Möbiustransformationen oder allgemeiner gebrochen rationale Funktionen sind **meromorphe** Funktionen auf $D = \mathbf{C}$.

6.1 Der Satz von Mittag-Leffler

Es sei $S = \{z_0, z_1, \ldots\}$ eine abgeschlossenen **diskrete** Menge von Punkten in $\mathbf{C}$. Um jeden Punkt z_i gibt es dann eine offene Umgebung U_i mit $z_j \notin U_i$ für $j \neq i$.
Für jedes z_ν sei ein **endlicher** (polartiger) Hauptteil

$$H_\nu(z) = \sum_{i=-1}^{-n_\nu} a_i^{(\nu)} \cdot (z - z_\nu)^i \quad , \quad a_i^{(\nu)} \in \mathbf{C}$$

gegeben. [1]

[1] Oder allgemeiner $H_\nu(z) = h_\nu\left(\frac{1}{z-z_\nu}\right)$ mit $h_\nu : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ als ganze Funktion.

Satz: *Zu jeder solchen Vorgabe von Hauptteilen gibt es eine meromorphe Funktion $f(z)$ auf* **C** *mit Polen genau in $z_1, z_2, ..$ mit den jeweiligen Hauptteilen $H_\nu(z)$.*

Bemerkung: *Eine solche Funktion $f(z)$ ist bis auf Addition einer ganzen Funktion eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei oBdA $z_0 = 0$ (falls dies überhaupt auftritt) und damit

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$$

Dann ist $H_\nu(z)$ holomorph in $z = 0$ für alle $\nu \geq 1$. Man hat daher konvergente Taylorentwicklungen (*)

$$H_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\nu n} \cdot z^\nu \quad \nu = 1, 2, \dots$$

mit kompakter Konvergenz in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $K(0, R_\nu)$ vom Radius $R_\nu < |z_\nu|$. Man kann nun die Radien R_ν so wählen, dass gilt

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq \dots \ .$$

Da die abgeschlossene Menge $S = \{z_\nu\}$ diskret in **C** ist, kann man ausserdem annehmen (benutze einen Kompaktheitsschluss)

$$\lim_{\nu \to \infty} R_\nu = \infty \ .$$

Wahl einer Hilfsfolge: Wähle $\varepsilon_\nu > 0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$ konvergent. Wegen der kompakten Konvergenz der Taylorentwicklungen (*) auf $K(R_\nu, 0) = \{z : |z| \leq R_\nu\}$ existiert für jedes $\nu \geq 1$ ein Polynom $P_\nu(z)$ (nämlich eine Partialsumme der Taylorentwicklung (*)) so dass

$$|H_\nu(z) - P_\nu(z)| < \varepsilon_\nu$$

gilt auf der Kreisscheibe $K(R_\nu, 0)$. Setze dabei außerdem formal $P_0(z) = 0$.

Behauptung: Die Reihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(H_\nu(z) - P_\nu(z))$ konvergiert kompakt auf $\mathbf{C} \setminus \{z_0, z_1, \dots\}$.

Beweis: Sei z gegeben und $z \neq z_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots)$. Wir betrachten die Reihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{N}(H_\nu(z) - P_\nu(z)) + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (H_\nu(z) - P_\nu(z))$$

wobei wir N so gross wählen, daß $R_N > |z|$ gilt. Die linke endliche Summe ist dann holomorph in einer Umgebung von z (da $z \neq z_0, \ldots, z_N$). Die rechte Teilreihe dagegen ist **kompakt konvergent**, in $\{w \in \mathbf{C} : |w| \leq R_N\}$ mit anderen Worten gleichmässig konvergent. Dies folgt aus dem Weierstraßschen M-Test mittels der Majorantenreihe $\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \varepsilon_\nu$. Da jeder der Summanden

$$H_\nu(z) - P_\nu(z) \quad , \quad \nu > N+1$$

zudem eine holomorphe Funktion in $\{w \in \mathbf{C} : |w| < R_N\}$ darstellt, folgt daher, daß die zweite Reihe eine holomorphe Funktion in der offenen Kreisscheibe vom Radius R_N definiert.

Für jedes $\nu < N$ gilt dann aber

$$\text{Hauptteil}_{z_\nu}\ (f(z)) = \text{Hauptteil}_{z_\nu} \left(\sum_{\nu=0}^{N} H_\nu(z) - P_\nu(z) \right) = H_\nu(z).$$

Da N beliebig gros gewählt werden kann, ist damit ist der Satz von Mittag-Leffler bewiesen.

Bemerkung: Die Terme $-P_\nu(z)$ nennt man *konvergenzerzeugende Summanden.*

Beispiel: Sei $H_\nu(z) = \frac{1}{z-\nu}$. Dann ist $\left|\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right| < \frac{2|z|}{\nu^2}$ für $\nu > 2|z|$. Man erhält die absolut lokal gleichmässig konvergente Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right)$$

auf $\mathbf{C} \setminus \mathbf{N}$. Dies ist der Spezialfall $z_\nu = \nu, R_\nu = \nu/2, P_\nu(z) = -1/\nu$, sowie $\varepsilon_\nu = |z|/n^2$ (für fest gewähltes z) der obigen allgemeinen Konstruktion.

6.2 Weierstraß-Produkte

Definition: Man sagt ein unendliches Produkt

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots \quad (a_\nu \in \mathbf{C})$$

konvergiert **absolut**, falls die zugehörige Reihe

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

konvergiert.

Folgerungen aus der absoluten Konvergenz eines Produktes:

(i) Für ein $N > 0$ gilt $|a_\nu| < 1$ für $\nu > N$ und $\log(1 + a_\nu)$ (Hauptteil des Logarithmus) ist definiert, da $1 + a_\nu \neq 0$.

(ii) $\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \log(1 + a_\nu)$ konvergiert **absolut**.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n}(1 + a_\nu) = \prod_1^N(1 + a_\nu) \cdot \exp\left(\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \log(1 + a_\nu)\right)$ für alle n. Hierbei ist N beliebig, aber so dass gewählt dass $a_\nu \neq -1$ gelte.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n}(1+a_\nu) = 0$ genau dann, wenn einer der Faktoren null ist.

Beweis: (i) ist klar: (ii) folgt aus $|\log(1 + z)| \leq \mathrm{const}|z|$ für $|z| < \frac{1}{2}$; $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$ ist daher holomorph für $|z| < 1$.

(iii) folgt aus $exp \circ \log = \mathrm{id}$ und der Stetigkeit von exp.

(iv) folgt, da $exp \neq 0$ für alle Werte, aus Eigenschaft (iii).

Achtung: Für $a_\nu = -1 + \frac{1}{\nu}$ gilt $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + a_\nu) = 0$, ohne daß einer der Faktoren null ist. Für (iv) ist also die absolute Konvergenz des Produkts wesentlich.

Lemma: Sei $D \subseteq \mathbf{C}$ offen und $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ eine **kompakt** konvergente Reihe holomorpher Funktionen $f_\nu : D \to \mathbf{C}$. Das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_\nu(z))$$

ist definiert, absolut konvergent auf Kompakta und definiert eine holomorphe Funktion auf D. Diese ist null bei z genau dann, wenn dies für einen seiner Faktoren gilt.

Beweis: Analog wie oben!

Nach diesen Vorbemerkungen über unendliche Produkte betrachten wir nun ein Gebiet D und eine abgeschlossene diskrete Teilmenge $S \subseteq D$.

Problem: Konstruiere eine meromorphe Funktion $f : D \to \mathbf{C}$ mit den Eigenschaften

(i) $f(z) \neq 0, \infty$ für $z \notin S$.

(ii) $v_z(f) = n_z$ für alle $z \in S$.

(Hierbei bezeichne $v_z(f)$ die Pol-, Nullstellenverteilung von f in z.)

Satz: *Dieses Problem besitzt immer eine Lösung für $D = \mathbf{C}$.*

Bemerkung: Es genügt den Fall zu überprüfen, wo alle $n_z \geq 0$ sind!

Beweis des Satzes (im Speziallfall $D = \mathbf{C}$):
Wähle eine Hilfsfolge ε_ν mit $\sum_\nu \varepsilon_\nu < \infty$.
Ansatz: OBdA sei $|z_0| \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$. Sei

$$f(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (z - z_\nu)^{n_{z_\nu}} \exp(P_\nu(z)).$$

Hierbei wählen wir geeignete Polynome $P_\nu(z)$. Die $\exp(P_\nu(z))$ heißen *konvergenzerzeugende Faktoren.*

Beachte: Für $|z| < |z_\nu|$ existiert, da sternförmige offene Mengen Elementargebiete sind, eine holomorphe Funktion $g_\nu(z)$ mit

$$(z - z_\nu)^{n_{z_\nu}} \exp(g_\nu(z)) = 1.$$

Die Taylorentwicklung konvergiert kompakt für $|z| < |z_\nu|$, somit gilt für eine Partialsumme $P_\nu(z)$ der Taylorentwicklung von g_ν

$$|(z - z_\nu)^{n_{z_\nu}} \exp(P_\nu(z)) - 1| < \varepsilon_\nu$$

für $|z| < \frac{1}{2}|z_\nu|$.

Folgerung 1: $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$ ist eine Majorante für $\sum_{\nu=0}^{\infty} |(z - z_\nu)^{n_{z_\nu}} \exp(P_\nu(z)) - 1|$.

Folgerung 2: Das Produkt $f(z) \prod_{\nu=0}^{\infty}(z - z_\nu)^{n_{z_\nu}} \exp(P_\nu(z))$ konvergiert **absolut** auf jedem Kompaktum von $\mathbf{C}$.

Folgerung 3: $f(z)$ ist holomorph auf $\mathbf{C}$ und $f(z) = 0$ genau dann, wenn $z \in S$, mit $v_z(f) = n_z$ für alle $z \in S$.

Bezeichnung: So definierte Produkte nennt man **Weierstraßprodukte**.

Korollar: *Jede auf* $\mathbf{C}$ *ganze Funktion* $f(z)$ *schreibt sich in folgender Form:* $f(z)$ *schreibt sich als ein Produkt* $f(z) = h(z) exp(g(z))$*, wobei* $h(z)$ *ein Weierstraßprodukt ist und* $g(z)$ *eine ganze Funktion.*

Korollar: *Jede auf* $\mathbf{C}$ *meromorphe Funktion ist Quotient zweier ganzer Funktionen.*

Beispiel:

$$z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

(das Produkt der linken Seite läuft über $\mathbf{Z}$ mit Ausnahme der Null) hat dieselben Nullstellen wie $\frac{\sin \pi z}{\pi}$.

Die logarithmischen Ableitungen von beiden Seiten sind

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \quad , \quad \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \ .$$

Die Gleichheit dieser Ableitungen sei als Übungsaufgabe gestellt. Aus ihr folgt die Gleichheit der ursprünglichen Ausdrücke durch Vergleich der Residuen im Punkt $z = 0$.

Bemerkung: $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = \pi i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$.

Zusammenfassung: $\frac{sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

Kapitel 7

Konforme Abbildungen

7.1 Der Riemannsche Abbildungssatz

Seien D, D' Gebiete in $\mathbf{C}$.

Definition: Eine Abbildung $\varphi : D \to D'$ heißt **konform**, falls gilt:
(i) φ ist analytisch.
(ii) φ ist bijektiv.
(iii) φ^{-1} ist analytisch.

Bemerkung 1: Aus (i) und (ii) folgt (iii).

Beweis: Aus der Injektivität von φ auf D folgt

$$\varphi'(z) \neq 0$$

für alle $z \in D$ mit dern Methoden von Abschnitt 4.3. Aus dem Satz von der Umkehrfunktion folgt, dass die Umkehrfunktion φ^{-1} stetig partiell differenzierbar ist und die Cauchy Riemann Differentialglichungen erfüllt. Daher ist dann auch $\varphi^{-1} : D' \to D$ eine analytische Bijektion.

Dies zeigt, dass konforme Äquivalenz im nachfolgenden Sinn eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbf{C}$ definiert.

Definition: D' und D heißen **konform äquivalent**, wenn es eine konforme Abbildung $\varphi : D \to D'$ gibt.

Bemerkung 2: Ist $D \subset \mathbf{C}$ eine Gebiet und $\varphi : D \to \mathbf{C}$ einen injektive holomorphe Abbildung, dann ist $D' = \varphi(D)$ ein zu D konform äquivalentes Gebiet. Hier wird natürlich der Satz von der Gebietstreue benutzt.

Lemma: *Ist D' konform äquivalent zu D und D Elementargebiet, so ist D' Elementargebiet.*

Beweis: Sei
$$\varphi : D' \to D$$
eine konforme Abbildung und $f : D' \to \mathbf{C}$ analytisch. Zu zeigen ist, $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ auf D', d.h. auch D' ist Elementargebiet.

Ansatz: $F(z) = G(\varphi(z))$ für geeignetes holomorphes $G : D \to \mathbf{C}$.

Die Ableitung $F'(z)$, nach der Kettenregel also $G'(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$, soll $f(z)$ werden. Wir setzen deshalb $G(\zeta)$ an als die Stammfunktion $G'(\zeta) = g(\zeta)$ einer holomorphen Funktion $g(\zeta)$ (hier benutzen wir, dass D ein Elementargebiet ist) für die gelten soll $g(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) = f(z)$. Also
$$g(\varphi(z)) = \frac{f(z)}{\varphi'(z)} \qquad , \qquad \zeta = \varphi(z)$$
(beachte $\varphi'(z) \neq 0$ nach obiger Bemerkung) oder als Funktion von $\zeta \in D$
$$g(\zeta) = \frac{f(\varphi^{-1}(\zeta))}{\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta))} \ .$$
Damit ist das Lemma bewiesen.

Folgerung: *Die konforme Äquivalenz definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Elementargebiete in* $\mathbf{C}$.

Beispiel zweier konform nicht äquivalenter Elementargebiete:
$D = E$ (Einheitskreis), $D' = \mathbf{C}$ (komplexe Zahlenebene).

Beide Mengen sind sternförmig und somit Elementargebiete. Eine konforme Äquivalenz
$$\varphi : D' \to D,\ D' = \mathbf{C},\ D = E$$
wäre eine beschränkte holomorphe Abbildung φ auf $\mathbf{C}$, also konstant nach dem Satz von Liouville. Dann wäre $D = \varphi(\mathbf{C})$ ein Punkt. Widerspruch !

Der Riemannsche Abbildungssatz:
Jedes Elementargebiet $D \underset{\neq}{\subset} \mathbf{C}$ *ist konform äquivalent zum Einheitskreis* E.

Strategie des Beweises: Man konstruiert die gesuchte konforme Äquivalenz durch eine Kette von sukzessives konformen Äquivalenzen. Diese findet man, indem man geeignete injektive holomorphe Abbildungen betrachtet und die auftretenden Elementargebiete durch ihre (konform äquivalenten) Bilder ersetzt. Der Beweis zerfällt in zwei Schritte

(1) Konstruiere zuerst eine konforme Äquivalenz $D \xrightarrow{\varphi_1} D_1 \subset E$ von D auf eine Teilmenge D_1 des Einheitskreises E mit $0 \in D_1$.

(2) Studiere dann unter der Menge all solcher (φ_1, D_1) dasjenige mit 'größtmöglichem ' Bild $D_1 \subseteq E$. Die technischen Details finden sich in Abschnitt 7.2.

Behauptung: Letzteres ist die gesuchte Äquivalenz $\varphi : D \xrightarrow{\sim} E$.

Hierbei ist natürlich noch zu klären, was man mit größtmöglich eigentlich meint.

Details zu Schritt (1):

(i) Wähle ein $a \notin D$. Via Translation von D obdA $a = 0$, das heisst $0 \notin D$.

(ii) Die Funktion $h(z) = z$ ist nicht null auf D, D ist Elementargebiet. Also existiert eine holomorphe Wurzel $g : D \to \mathbf{C}$ mit $g(z)^2 = h(z)$.

(iii) Die Abbildung g hat die Eigenschaft

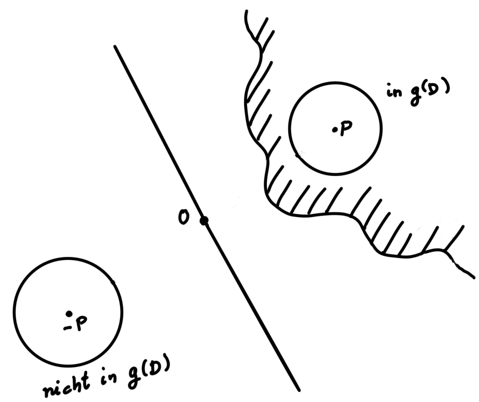
$$g(z) = \pm g(w) \quad \Rightarrow \quad z = w,$$

insbesondere ist daher $g(z)$ **injektiv** und **holomorph**, wie der Satz von der Gebietstreue impliziert!

Folgerung: $g : D \xrightarrow{\sim} g(D)$ *ist eine konforme Äquivalenz.*

Bemerkung 3: Ganz allgemein ist eine holomorphe Wurzel $g(z)$ einer injektiven Funktion $h(z)$ wieder injektiv ist. In der Tat folgt aus $g(z)^2 = h(z)$ und $g(z) = g(w)$ (oder nur $g(z) = \pm g(w)$) durch Quadrieren $h(z) = h(w)$ und damit $z = w$.

Wegen (iii) erhält man folgendes Bild



(iv) Beachte: Auch $0 \notin g(D)$. Sei $P \in g(D) \Rightarrow$ Kugel um P in $g(D)$ wegen des Satzes von der **Gebietstreue**! Das negative dieser Kugel liegt dann nicht in $g(D)$.

(v) Translation mit P und Streckung. Damit liegt oBdA eine Kugel $K(0,r)$ im Komplement von $g(D)$ und damit obdA $g(D) \subset \{z||z| > 1\}$.

(vi) Inversion am Einheitskreis: Die Abbildung $\varphi(z) = z^{-1}$ bildet $\{z||z| > 1\}$ konform auf $E \setminus 0$ ab, und $g(D)$ auf eine konform äquivalentes Gebiet in E.

Mittels dieser Reduktion können wir uns also völlig auf Elementargebiete $D \subset E$ beschränken!

Wie wir im Beweis des nächsten Lemmas sehen werden, können wir durch Anwenden einer geeigneten Möbiustransformation $M\langle z\rangle$ dann zusätzlich noch annehmen $0 \in D$.

Wir fixieren nun unser Elementargebiet D mit $0 \in D \subset E$ und studiere „Aufblasungs"-Abbildungen.

(a) $\varphi : D \longrightarrow E$ **holomorph, injektiv**

(b) $\varphi(0) = 0$

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller solchen konformen Abbildungen φ von D. Jedem $\varphi \in \mathcal{M}$ wird zugeordnet, als Maß für ihre Vergrößerung, der Vergrösserungsfaktor

$$\varphi \mapsto |\varphi'(0)| \in \mathbf{R}_{>0} \ .$$

Dies definiert eine Abbildung

$$\mathcal{M} \to \mathbf{R}_{>0} \ .$$

Bemerkung 4: *Ist $D = E$, dann folgt aus dem Schwarzschen Lemma $|\varphi'(0)| \leq 1$ mit $|\varphi'(0)| = 1$ nur, falls $\varphi(z) = \zeta \cdot z$ mit $\zeta \in \mathbf{C}$ und $|\zeta| = 1$.*

Bemerkung 5: Da D offen ist, gilt wegen $0 \in D$ auch $\{z : |z| < r\} \subset D$ für ein geeignetes $r > 0$. Damit folgt aus

$$\varphi : D \to E \quad , \quad \varphi(0) = 0$$

nach dem Schwarzschen Lemma

$$|\varphi'(0)| < r^{-1} \ .$$

Die Streckungsfaktoren sind für gegebenes D also a priori nach oben <u>beschränkt</u>. Umgekehrt gilt

Lemma: *Ist $D \underset{\neq}{\subset} E$ ein Elementargebiet mit $0 \in D$, so gibt es ein $\varphi \in \mathcal{M}$ mit den Eigenschaften (a) und (b) und einem Vergrößerungsfaktor*

$$|\varphi'(0)| > 1.$$

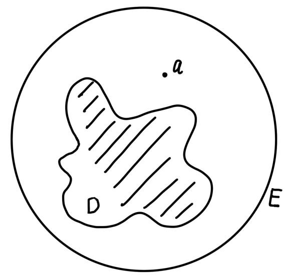
Beweis des Lemmas:

Vorbemerkung: Die Möbiustransformation

$$z \mapsto M\langle z\rangle = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad , |a| < 1$$

definiert eine konforme Selbstabbildung des Einheitskreises E auf sich (Übungsaufgabe). Insbesondere ist sie holomorph und injektiv auf E und bildet a auf 0 ab.

Wähle ein $a \notin D, \ a \in E$.



Dann ist $M\langle z\rangle$ holomorph und **nicht null** auf D. Es existiert also die Wurzel

$$h(z) : D \to E \text{ analytisch, } \underline{\text{injektiv}}$$

der Möbiustransformation $h(z)^2 = M\langle z\rangle$ auf dem Elementargebiet D.
Beachte: $h(z) \in E \Leftrightarrow h^2(z) \in E$ (benutze Polarkoordinaten!)
Setze nun

$$\varphi(z) = \frac{h(z) - h(0)}{1 - \overline{h(0)}h(z)}$$

Wegen $|h(0)| < 1$ und $|h(z)| < 1$ folgt dann $\varphi \in \mathcal{M}$, d.h.

$$\varphi : D \to E \quad \text{analytisch, } \underline{\text{injektiv}}$$

$$\varphi(0) = 0\ .$$

Wir berechnen jetzt $|\varphi'(0)|$ und zeigen $|\varphi'(0)| > 1$.

Nebenrechnung:

$\varphi'(z) = \frac{h'(z)(1-\overline{h(0)}h(z))-(h(z)-h(0))(-\overline{h(0)}h'(z))}{(1-\overline{h(0)}h(z))^2} = \frac{h'(z)\left[1-|h(0)|^2\right]}{\left[1-\overline{h(0)}h(z)\right]^2}$, also

$$\boxed{\varphi'(0) = \frac{h'(0)}{1 - |h(0)|^2}}$$

Aber $2h(z)h'(z) = (M\langle z\rangle)' = \frac{(1-\overline{a}z)-(z-a)(-\overline{a})}{(1-\overline{a}z)^2} = \frac{1-a\overline{a}}{(1-\overline{a}z)^2}$, und $2h(0)h'(0) = 1 - a\overline{a}$. Also wegen $h(0)^2 = M\langle 0\rangle = -a$, d.h. $|h(0)| = |a|^{\frac{1}{2}}$, daher

$$|h'(0)| = \frac{1-|a|^2}{2|a|^{\frac{1}{2}}}$$

und damit

$$\varphi'(0) = \frac{h'(0)}{1-|h(0)|^2} = \frac{1-|a|^2}{2|a|^{\frac{1}{2}}(1-|a|)} = \frac{|a|^{-\frac{1}{2}} + |a|^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Aus der binomischen Formel folgt dann

$$|\varphi'(0)| \ = \ \frac{|a|^{-\frac{1}{2}} + |a|^{\frac{1}{2}}}{2} \ > \ 1$$

wegen $|a| < 1$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(2) Technische Annahme: Sei $D \subset E$ ein fixiertes Elementargebiet mit $0 \in D$. Unter allen $\varphi \in \mathcal{M}$, d.h. unter allen **holomorphen, injektiven** Abbildungen

$$\varphi : D \to E, \ \varphi(0) = 0$$

existiere eine mit **maximalem Faktor** $|\varphi'(0)|$.

Behauptung: *Ein solches $\varphi \in \mathcal{M}$ ist surjektiv, d.h. definiert eine konforme Äquivalenz von D mit E.*

Beweis: Das letzte Lemma angewandt auf das Elementargebiet $\varphi(D) \subset E$ würde uns ein $\psi : \varphi(D) \to E$ liefern und damit

$$\begin{array}{c} D \xrightarrow{\varphi} \varphi(D) \xrightarrow{\psi} E \\ \\ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

(falls $\varphi(D) \overset{\subset}{\neq} E$) mit $|\psi'(0)| > 1$.

Dann ist die Komposition $\psi \circ \varphi : D \to E$ eine **injektive**, holomorphe Abbildung mit $(\psi \circ \varphi)(0) = 0$ und

$$|(\psi \circ \varphi)'(0)| = |\psi'(0)| \cdot |\varphi'(0)| > |\varphi'(0)|$$

im Widerspruch zur Maximalität von $|\varphi'(0)|$. Also ist $\varphi(D) = E$.

7.2 Beweis der technische Annahme (2)

Wie wir gesehen haben genügt zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes der Beweis der technischen Annahme!

Bemerkung: Wie wir bereits gesehen haben folgt aus der Annahme $0 \in D$

$$0 < M = \sup \{|\varphi'(0)| : \varphi \in \mathcal{M}\} \ < \infty \ .$$

Betrachte eine Folge $\varphi_n \in \mathcal{M}$

$$\varphi_n : D \to E$$

mit $|\varphi_n'(0)| \to M$.

Problem: Zeige

(1) φ_n besitzt eine lokal gleichmäßige, d.h. kompakt konvergente Teilfolge mit wohldefinierter Grenzfunktion $\varphi = \lim \varphi_n$. Diese ist holomorph auf D.

(ii) $\varphi : D \to \overline{E}$ hat Werte in E.

(iii) φ ist injektiv!

Beachte (ii) folgt sofort aus (i), denn offensichtlich gilt $\varphi(D) \subset \{z : |z| \leq 1\}$. Daher $\varphi(D) \subset E$ wegen dem Satz von der Gebietstreue!

Beweis von (i). Man benutzt den Satz von Arzela-Ascoli:

Sei im folgenden $D \subseteq \mathbf{C}$ ein beliebiges Gebiet in $\mathbf{C}$. Eine Menge $\mathcal{M}$ von Funktionen $f : D \to \mathbf{C}$ heißt **gleichgradig stetig** in $a \in D$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{M} \ \forall z \in D \ : \quad |z - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

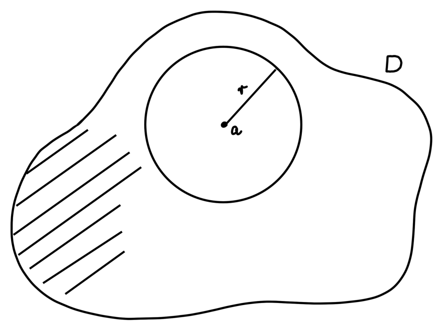
Eine Menge $\mathcal{M}$ von Funktionen heißt **gleichgradig beschränkt** in $a \in D$, falls gilt:

$$\exists C \ \forall f \in \mathcal{M} : \quad |f(a)| < C$$

$\mathcal{M}$ heißt gleichgradig stetig beziehungsweise gleichgradig beschränkt auf D, falls obige Bedingungen für alle Punkte $a \in D$ gelten.

Bemerkung: *Die Menge $\mathcal{M}$, die wir für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes definiert haben, ist* **gleichgradig stetig und beschränkt***.*

Beweis: Dies folgt aus der Cauchy Integralformel wie folgt



$$|\varphi(z) - \varphi(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{r,a} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)} \right| \cdot |z - a| \ ,$$

und das hier auftretende Integral läßt sich wegen

$$|\varphi(\zeta)| \leq 1 \quad \text{für } \zeta \in D$$

durch die Konstante $2/r$ abschätzen für alle $|z - a| < \frac{r}{2}$.

Satz von Arzela, Ascoli: *Sei $D \subseteq \mathbf{C}$ offen und $\mathcal{M}$ eine gleichgradig stetige und beschränkte Menge von Funktionen auf D. Dann besitzt jede Folge*

$$\varphi_n \in \mathcal{M}$$

eine konvergente Teilfolge, welche gleichmäßig und absolut auf Kompakta $K \subset D$ konvergiert.

Beweis: $S = D \cap (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}i)$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge von D.

Da $\mathcal{M}$ gleichgradig beschränkt ist, kann man für jedes $s \in S$ eine konvergente Teilfolge auswählen. Mittels eines Diagonalschlusses kann man dann sogar eine Teilfolge auswählen, welche für alle $s \in S$ konvergiert.

Es bleibt zu zeigen, daß diese Teilfolge für alle $z \in D$ konvergiert und dies absolut und gleichmäßig auf Kompakta in D.

Sei $K \subset D$ kompakt. ObdA sei hierbei K ein Rechteck mit rationalen Eckpunkten in D. Wähle ein $\varepsilon > 0$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ und $a \in D$ existiert nach Annahme ein $\delta(a)$ mit

$$|z-a| < \delta(a) \Rightarrow |f(z)-f(a)| < \varepsilon \quad (f \in \mathcal{M}) \ .$$

Für das Kompaktum $K \subset D$ existieren endlich viele $a_1, \ldots, a_l \in S$ so, daß die offenen Kreise $K(a_\nu, \delta(a_\nu))$ ganz K überdecken. Für $z \in K$ folgt daher

$$|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| \leq |\varphi_n(z) - \varphi_n(a_\nu) + \varphi_m(a_\nu) - \varphi_m(z) + \varphi_n(a_\nu) - \varphi_m(a_\nu)|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + |\varphi_n(a_\nu) - \varphi_m(a_\nu)|$$

falls $z \in K(a_\nu, \delta(a_\nu))$, und damit wird $|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)|$ abgeschätzt durch

$$\leq \ 2\varepsilon + \max_{\nu=1,\ldots,l} |\varphi_n(a_\nu) - \varphi_m(a_\nu)| \ \leq \ 3\varepsilon \quad \text{ falls } n, m \geq n_0(\varepsilon) \ ,$$

da φ_n auf den Punkten $a_1, .., a_l$ aus S konvergiert. Damit ist der Satz gezeigt.

Beachte: In unserem Fall sind die Funktionen φ_n sogar holomorph auf D. Dies impliziert, dass die Grenzfunktion φ als kompakt konvergenter Limes der holomorphen Funktionen φ_n auf D wieder holomorph auf D ist. Mehr noch; wir haben im Falle von kompakter Konvergenz holomorpher Funktionen gezeigt, dass die Ableitung mit der Limesbildung vertauscht. Das heisst in unserer Situation gilt sogar

Folgerung:
(a) $\varphi_n \to \varphi$ konvergiert gleichmäßig auf Kompakta von D.
(b) Die Grenzfunktion φ ist holomorph auf D.
(c) $\varphi_n' \to \varphi'$ konvergiert gleichmäßig auf Kompakta von D.

Insbesondere gilt also $|\varphi_n'(0)| \to |\varphi'(0)|$, also

$$\boxed{|\varphi'(0)| = M > 0} \ .$$

Beweis von (iii). *Wir zeigen: φ* **injektiv** *ist auf D.*

Angenommen $\varphi(a) - \varphi(a') = 0$ für $a, a' \in D$ mit $a \neq a'$. Die auf D holomorphe Funktion

$$f(z) = \varphi(z) - \varphi(a')$$

ist nicht konstant, denn sonst wäre $M = |\varphi'(0)| = 0$. Also ist $z = a$ die einzige Nullstelle von $f(z)$ in $K = \{z : |z-a| \leq r\}$ für genügend kleines

$0 < r < |a - a'|$. Insbesondere gilt $|f(z)| \geq \varepsilon > 0$ für z mit $|z - a| = r$. Wegen der Injektivität von φ_n besitzen die auf D holomorphen Funktionen

$$g_n(z) = \varphi_n(z) - \varphi_n(a')$$

andererseits keine Nullstelle in K (wegen $r < |a - a'|$), und konvergieren wegen (a) gleichmässig auf dem Kompaktum $K \subset D$ gegen $f(z)$

$$g_n(z) \to f(z) \ .$$

Für $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt daher

$$|f(z) - g_n(z)| < \varepsilon \leq \ |f(z)| \quad , \quad |z - a| = r \ .$$

Nach dem Satz von Rouche besitzen $f(z)$ und $g_n(z)$ gleich viele Nullstellen in K. Ein Widerspruch! Dies zeigt die Injektivität von $\varphi(z)$ auf D.

7.3 Die Gruppe der konformen Selbstabbildungen

Sei D ein Gebiet. Sind $\varphi_1,\ \varphi_2 : D \to D$ konforme Selbstabbildungen, dann auch $\varphi_1 \circ \varphi_2$ und φ_1^{-1}. Weiterhin ist $id : D \to D$ konform.

Sei $\mathrm{Aut}(D)$ also die Gruppe der konformen Selbstabbildungen.

Lemma: *Sind D_1 und D_2 konform äquivalent bezüglich φ, dann sind die Gruppen $\mathrm{Aut}(D_1)$ und $\mathrm{Aut}(D_2)$ isomorph.*

Beweis:

$$\mathrm{Aut}(D_1) \to \mathrm{Aut}(D_2) \quad , \quad \varphi_1 \mapsto \varphi^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi$$

ist offenbar ein Isomorphismus!

Die Automorphismengruppen der beiden Typen von Elementargebieten in $\mathbf{C}$ sind gegeben durch:

<u>Aut($\mathbf{C}$)</u> :

Ist $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ konform, so ist φ ganze Funktion auf $\mathbf{C}$. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß und der Injektivität von φ in ∞ hat φ höchstens einen Pol in ∞. Nun aber ist φ holomorph auf $\mathbf{C}$ und damit gebrochen rational. Wegen der Injektivität auf $\mathbf{C}$ ist φ ein Polynom und sogar linear. Die Umkehrung ist trivial, und wir haben damit gezeigt:

$$\boxed{\mathrm{Aut}(\mathbf{C}) = \{\varphi : \varphi(z) = az + b,\ a \in \mathbf{C}^*,\ b \in \mathbf{C}\}.}$$

Bemerkung: Analog zeigt man, daß die Gruppe der **bijektiven, meromorphen** Selbstabbildungen von $\hat{\mathbf{C}}$ nach $\hat{\mathbf{C}}$ isomorph ist zur Gruppe aller Möbiussubstitutionen. $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ ist die Untergruppe aller dieser Substitutionen, welche ∞ in ∞ überführen.

<u>Einheitskreis : Aut(E)</u>

Sei $\varphi : E \to E$ eine konforme Äquiavlenz mit $\varphi(0) = 0$. Dann folgt aus dem Schwarzschen Lemma $|\varphi'(0)| \leq 1$. Aus der analogen Aussage für φ^{-1} folgt

$$|\varphi'(0)| = 1 \ .$$

Nach dem Schwarzschen Lemma ist $\varphi(z) = \zeta \cdot z$ ($|\zeta| = 1,\ \zeta \in \mathbf{C}$).

Folgerung:

$$\mathrm{Aut}(E) = \{M\langle z\rangle : M = \begin{pmatrix} a\, b \\ b\ -a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbf{C},\ a\overline{a} - b\overline{b} = 1 \text{ oder } |a|^2 - |b|^2 > 0\}\ .$$

Beweis: Die Möbiustranformationen, die E als Menge erhalten, operieren transitiv auf dem Einheitskreis E.

Kapitel 8

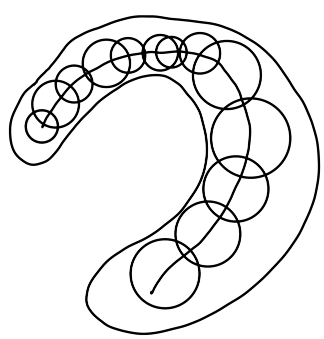
Eine topologische Charakterisierung von Elementargebieten

Sei $f : D \to \mathbf{C}$ **holomorph**, D Gebiet in $\mathbf{C}$.

Sei $\varphi : [a, b] \to D$ ein stetiger Weg, d.h. einen stetige Abbildung **nicht notwendig stückweise glatt!**

Lemma: *Sei $K = [a, b]^n \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt und $\varphi : K \to D$ stetig. Dann existiert eine Unterteilung des Würfels in äquidistante Teilwürfel derart, daß die Bilder der Teilwürfel enthalten sind in kleinen Kreisscheiben $\subseteq D$.*

Bild:



Beweis: Dies folgt aus einem Kompaktheitsschluss unter Benutzung der Stetigkeit von φ.

Für $n = 1$ erhält man (für N gross genug) eine Unterteilung des Definitionsbereiches von φ in $\nu = 1, .., N$ Teilintervalle, deren Bilder in Kreisscheiben innerhalb von D liegen. Dies erlaubt folgende

Definition von $\int_\varphi f(z)dz$ für stetige Wege φ:

$$\int_\varphi f(z)dz \overset{Def.}{=} \sum_{\nu=0}^{N} \int_{\varphi\left(\frac{b-a}{N}\nu\right)}^{\varphi\left(\frac{b-a}{N}\nu+1\right)} f(z)dz$$

$$\overset{Def.}{=} \sum_{\nu=0}^{N} \left[F_\nu \left(\varphi \left(\frac{b-a}{N}(\nu+1) \right) \right) - F_\nu \left(\varphi \left(\frac{b-a}{N}\nu \right) \right) \right],$$

da die holomorphe Funktion $f(z)$ in der ν-ten Kreisscheibe jeweils eine **Stammfunktion** $F_\nu(z)$ besitzt (denn Kreisscheiben sind Elementargebiete)!

Bemerkung:
(i) Das so definierte Wegintegral hängt nicht von der Wahl der Unterteilung ab.
(ii) Für stückweise glatte Wege erhält man die ursprüngliche Definition.

Seien $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \to D$ zwei Kurven (d.h. stetige Abbildungen).

Definition: φ_1 heißt **homotop** zu φ_2 in D (relativ zu den Endpunkten), falls eine stetige Abbildung

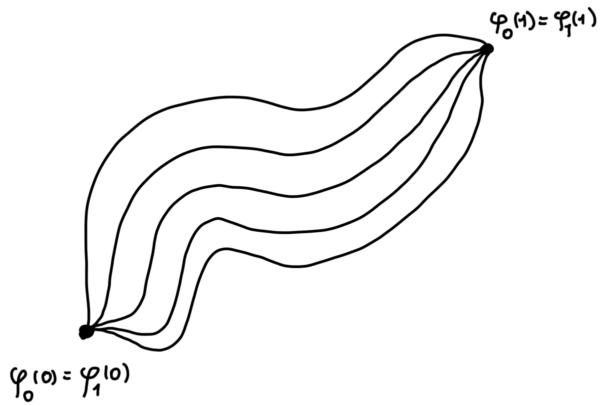
$$h : [0, 1]^2 \to D$$

existiert mit

$$h(0, t) = \varphi_1(t), \quad h(1, t) = \varphi_2(t)$$

$$h(s, 0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad h(s, 1) = \varphi_1(1) = \varphi_2(1).$$

Bild:



Eine Kurve heißt **nullhomotop**, falls
(i) sie geschlossen ist;
(ii) homotop zum Punkt.

Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz:
Sei D Gebiet, $f : D \to \mathbf{C}$ holomorph und φ eine nullhomotope Kurve. Dann gilt

$$\int_\varphi f(z)dz = 0.$$

Beweis: Man zeigt für zwei in D homotope stetige Wege φ_1 und φ_2

$$\int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_{\varphi_2} f(z)dz\ .$$

Dazu unterteilt man I^2 im obigen Sinne äquidistant, so dass jedes der N^2 Teilquadrate Bild unter der Homotopie in einem Kreis (d.h. in einem Elementargebiet) hat. Für die Ränder dieser kleinen Teilquadrate gilt der Cauchysche Integralsatz tautologisch wegen der Existenz von Stammfunktionen in Elementargebieten. Addiert man all diese verschwindenden Wegintegrale über die Kanten der Teilquadrate auf, ergibt sich das Integral

$\int_{\partial I^2} f(z)dz$ über den Rand von I^2. Dieses ist somit Null. Zwei der Randwege haben Bild in einem Punkt, und verschwinden daher. Es folgt $0 = \int_{\partial I^2} f(z)dz = \int_{\varphi_1} f(z)dz - \int_{\varphi_2} f(z)dz$. QED

Satz: *Sei D Gebiet in $\mathbf{C}$. Äquivalent sind*
(i) D ist Elementargebiet.
(ii) Jede geschlossene Kurve in D ist nullhomotop.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar, (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus dem Riemannschen Abbildungssatz.

Korollar: *Äquivalent sind für ein nicht leeres Gebiet $D \subseteq \mathbf{C}$:*
(i) D ist ein Elementargebiet.
(ii) Jede holomorphe Funktion auf D besitzt eine Stammfunktion.
(iii) Jede holomorphe Funktion f auf D, welche den Wert null nicht annimmt, schreibt sich in der Form

$$f(z) = \exp(g(z))$$

mit g holomorph auf D.
(iv) Jede holomorphe Funktion f auf D, welche den Wert null nicht annimmt, besitzt eine holomorphe Quadratwurzel g auf D: $g^2(z) = f(z)$.
(v) D ist konform äquivalent entweder zu $\mathbf{C}$ oder zum komplexen Einheitskreis.
(vi) Jede (stetige) geschlossene Kurve in D ist nullhomotop. Das heisst D ist einfach zusammenhängend.

Beweis. Wir haben im Verlauf der bisherigen Untersuchungen holomorpher Funktionen gezeigt $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$ und natürlich folgt $(vi) \Rightarrow (i)$ aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz. QED

Harmonische Funktionen. Sei D ein nichtleeres Gebiet in $\mathbf{C}$. Eine reellwertige 2 mal stetig partiell differentzierberae Funktion $u(x,y)$ auf D heisst harmonisch, wenn $u(x,y)$ vom Laplaceoperator

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

annuliert wird.

Beispiel 1: Ist $f(z)$ holomorph auf D, dann sind Realteil $u(x,y)$ und Imaginärteil $v(x,y)$ von $f(z)$ harmonische Funktionen. Dies folgt aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen! Man nennt $v(x,y)$ harmonisch konjugiert zur harmonischen Funktion $u(x,y)$.

Beispiel 2: Ist $u(x,y)$ harmonisch auf D, dann ist

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$$

holomorph auf D (benutze die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen). Im Fall $u(x,y) = Re(f(z))$ von Beispiel 1 gilt dann $g(z) = f'(z)$ (wieder Cauchy-Riemann).

Wenn jede holomorphe Funktion $g(z)$ auf D einen Stammfunktion $f(z)$ besitzt (also D ein Elementargebiet ist), dann besitzt wie oben gezeigt wurde jede harmonische Funktion $u(x,y)$ auf D eine harmonisch konjugierte Funktion $v(x,y)$ auf D, und jede harmonische Funktion $u(x,y)$ auf D ist damit insbesondere unendlich oft partiell differenzierbar! Es gilt aber auch die Umkehrung

Satz: *Besitzt jede reelle harmonische Funktion $u(x,y)$ auf einem Gebiet D eine harmonisch konjugierte Funktion $v(x,y)$ auf D, dann ist das Gebiet D ein Elementargebiet.*

Beweis: Angenommen $f : D \to \mathbf{C}$ sei analytisch und auf dem Gebiet D nirgends Null. Dann zeigt eine leichte Rechnung:

$$u(x,y) = \log |f(x+iy)|$$

ist **harmonisch**. Nach Annahme an D existiert eine holomorphe Ergänzung $g(z)$ auf D

$$g(z) = u(x,y) + iv(x,y) \ .$$

Dann ist aber $h(z) = \exp(g(z))$ analytisch auf D und nirgends Null, und es gilt per Definition

$$\left| \frac{f(z)}{h(z)} \right| = 1 \ .$$

Aus dem Satz von der Gebietstreue, angewandt auf die holomorphe Funktion $f(z)/h(z)$, folgt daraus $f(z) = h(z)$. Also haben wir zu $f(z)$ eine holomorphe Funktion $g(z)$ auf D konstruiert mit der Eigenschaft $f(z) = exp(g(z))$. Dies ist Eigenschaft (iii) des letzten Korollars. Aus dem letzten Korollar folgt damit die Behauptung. QED

Kapitel 9

Elliptische Funktionen

Für zwei $\mathbf{R}$-linear unabhängige komplexe Zahlen ω_1 und ω_2 (im folgenden auch Perioden genannt) sei

$$\Gamma = \mathbf{Z} \cdot \omega_1 + \mathbf{Z} \cdot \omega_2$$

das von den Perioden aufgespannte Gitter. Für jedes Translat $\mathcal{F} = z_0 + \mathcal{F}_0$ der Parallelogramms $\mathcal{F}_0 = \{u \cdot \omega_1 + v \cdot \omega_2 \ : \ 0 \leq u, v \leq 1\}$ gilt dann

$$\mathbf{C} \ = \ \Gamma + \mathcal{F} \ .$$

Wir betrachten jetzt sogenannte elliptische Funktionen: Per Definition sind dies **meromorphe** Funktionen $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, welche **doppelperiodisch** $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ sind oder welche gleichbedeutend dazu

$$f(z + \gamma) = f(z) \quad , \quad \gamma \in \Gamma$$

erfüllen. Summen, Produkte etc. elliptischer Funktionen in diesem Sinne sind offensichtlich wieder elliptisch. Die elliptischen Funktionen zum Gitter Γ bilden daher einen Körper. Weiterhin gilt: Ist $f(z)$ elliptisch, dann auch die Ableitung $f'(z)$.

Bemerkung: Ist $f(z)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} \cdot \omega_1 + \mathbf{Z} \cdot \omega_2$, dann ist $f(z/\omega_1)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \omega_2/\omega_1$. Man kann daher obdA annehmen: eine der beiden Perioden ist gleich 1 und die andere Periode $\tau = \omega_2/\omega_1$ erfüllt $Im(\tau) > 0$.

9.1 Bedingungen an die Null- und Polstellen

Sei $f(z)$ eine solche elliptische Funktion. Wir nehmen an $f(z)$ sei nicht konstant. Dann ist $g(z) = f'(z)/f(z)$ wieder eine elliptische Funktion. Wir wählen $\mathcal{F}$ so, dass kein (!) Pol und keine (!) Nullstelle von $f(z)$ auf dem Rand von $\mathcal{F}$ liegt. Sei γ der geschlossene stückweise glatte Weg über die stückweise linear parametrisierter Ränder des Parallelogramms $\mathcal{F}$ gebildet im Gegenuhrzeigersinn. Aus der Periodizität von $g(z)$ folgt dann

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)dz = 0}\ ,$$

da sich die Integrale über jeweils zwei gegenüberliegende Wände wegheben.

Analog zeigt man

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma zg(z)dz\ \in\ \Gamma}\ .$$

Beweis: Die Wege $\varphi_i : [0,1] \to \mathbf{C}$ definiert durch $\varphi_i(t) = f(t\cdot\omega_i)$ sind glatt und geschlossen, und nach Annahme liegt $z = 0$ nicht auf φ_i. Daher sind die Umlaufzahlen $N(\varphi_i, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\omega_i} g(z)dz$ wohldefiniert und ganzzahlig. Das Integral $\int_\gamma zg(z)dz$ ist

$$\int_0^{\omega_1} zg(z)dz + \int_0^{\omega_2}(\omega_1+z)g(z)dz - \int_0^{\omega_1}(z+\omega_2)g(z)dz - \int_0^{\omega_2} zg(z)dz\ ,$$

also gegeben

$$= \omega_1\cdot\int_0^{\omega_2} g(z)dz - \omega_2\cdot\int_0^{\omega_1} g(z)dz\ .$$

Daraus folgt die Behauptung. QED

Die obigen beiden Integralformeln für $g(z) = f'(z)/f(z)$ liefern mit Hilfe des Residuensatzes Bedingungen an die Nullstellen und Polstellen einer nicht konstanten elliptischen Funktion $f(z)$. Aus den Formeln von Abschnitt 5.7 folgt nämlich unter obigen Annahmen an $f(z)$ und $\mathcal{F}$

1. Die Zahl der Nullstellen von $f(z)$ in $\mathcal{F}$ ist gleich der Zahl der Polstellen von $f(z)$ in $\mathcal{F}$ (beides gezählt mit Vielfachheiten). Man nennt diese Zahl N die Ordnung der elliptischen Funktion $f(z)$.

2. Sind $a_1, ..., a_N$ die Nullstellen von $f(z)$ und $b_1, .., b_N$ die Polstellen von $f(z)$ in $\mathcal{F}$ (beides gezählt mit Vielfachheiten), dann gilt

$$a_1 + \cdots + a_N - b_1 - \cdots - b_N\ \in\ \Gamma\ .$$

Bemerkung. Für eine elliptische Funktion $f(z)$, hat $f(z) - const$ die selben Pole. Wendet man Aussage 1. an auf $f(z) - const$ anstelle von $f(z)$, sieht man dass eine nicht konstante elliptische Funktion jeden (!) Funktionswert in $\mathbf{C}$ gleich oft an nimmt (bei richtiger Zählweise). Daraus folgt, dass eine nichtkonstante elliptische Funktion mindestens eine Polstelle besitzen muss ($N \geq 1$). Aus Bedingung 2. folgt sogar

$$N \geq 2 \ ,$$

denn anderfalls erhielte man den Widerspruch $a_1 \in b_1 + \Gamma$.

Der folgende fundamentale Satz besagt nun, dass diese beiden notwendigen Bedingungen 1. und 2. auch hinreichend sind.

Abelsches Theorem. *Für die Existenz einer nichtkonstanten elliptischen Funktion $f(z)$ zum Gitter Γ mit Nullstellen $a_1, ..., a_M$ und Polstellen $b_1, .., b_N$ (gezählt mit Vielfachheiten und obdA im Inneren eines geeigneten Parallelogrammes $\mathcal{F}$) sind die Bedingungen $N = M$ und $\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} b_\nu \in \Gamma$ notwendig und hinreichend.*

Zum Beweis des Abelschen Theorems benutzen wir die sogenannten

9.2 Thetafunktionen

Für gegebenes Periodengitter Γ ist eine **Thetafunktion** eine **holomorphe** Funktion

$$\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$\boxed{\theta(z+\gamma) \ = \ exp\Big(a(\gamma)z + b(\gamma)\Big) \cdot \theta(z)} \quad , \quad \gamma \in \Gamma$$

für geeignete komplexe Konstanten $a(\gamma), b(\gamma)$, welche von $\gamma \in \Gamma$ abhängen. Insbesondere erfüllt $g(z) = \theta'(z)/\theta(z)$ dann die Gleichungen $g(z+\gamma) = a(\gamma) + g(z)$. Daraus folgt notwendiger Weise

$$a(\gamma + \gamma') = a(\gamma) + a(\gamma') \quad , \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma \ .$$

Bemerkung 1: Ist $\theta(z)$ eine Thetafunktion, dann liefert logarithmisches Ableiten

$$\frac{\theta'(z+\gamma)}{\theta(z+\gamma)} \ = \ a(\gamma) + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \ .$$

Insbesondere ist dann $(\theta'(z)/\theta(z))'$ eine elliptische Funktion.

Bemerkung 2: Ist a eine Nullstelle einer Thetafunktion $\theta(z)$, dann ist auch $a+\gamma$ eine Nullstelle von $\theta(z)$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Eine Thetafunktion ist durch ihre Nullstellen im wesentlichen festgelegt. Eine Thetafunktion ohne Nullstellen schreibt sich nämlich auf $\mathbf{C}$ in der Form $\theta(z) = exp(Q(z))$ für eine ganze Funktion $Q(z)$. Aus dem Transformationsverhalten von $\theta(z)$ folgt dann $Q(z)'' = Q(z+\gamma)''$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Als ganze elliptische Funktion ist $Q(z)''$ aber dann notwendig konstant, und damit ist $Q(z)$ ein quadratisches Polynom in z.

Beweis des Abelschen Theorems: ObdA kann man annehmen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \tau$ mit $Im(\tau) > 0$. Ausserdem können wir $\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N b_i$ annehmen indem man a_N um einen geeigneten Gitterpunkt $\gamma \in \Gamma$ abändert.

Sei $\theta(z)$ eine Thetafunktion für Γ mit einer einzigen Nullstelle. Durch Translation des Arguments kann man dann annehmen, diese Nullstelle sei $z = 0$. In diesem Fall ist dann

$$f(z) = \prod_{i=1}^N \frac{\theta(z-a_i)}{\theta(z-b_i)}$$

meromorph und doppelperiodisch (!) und hat per Definition die gewünschten Null- und Polstellen.

Zum Beweis des Abelschen Theorems genügt daher die Existenz der

Riemannschen Thetafunktion

$$\boxed{\theta(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \ exp(\pi i\tau n^2 + 2\pi izn)}$$

Wegen $Im(\tau) > 0$ und $|exp(\pi i\tau n^2 + 2\pi izn)| \leq const \cdot exp(-Im(\tau)n^2)$ für $z \in K$ (und ein Kompaktum K in $\mathbf{C}$) konvergiert diese Reihe kompakt als Funktion von z, und ist daher eine holomorphe Funktion der Variable z. Offensichtlich gilt

$$\theta(\tau, z+1) = \theta(\tau, z)$$

und quadratische Ergänzung $\tau n^2 + 2(z+\tau)n = \tau(n+1)^2 - \tau + 2z(n+1) - 2z$ liefert durch Verschieden der Variable n um eins

$$\theta(\tau, z+\tau) = exp(-2\pi iz - \pi i\tau) \cdot \theta(\tau, z) \ .$$

Die Zahl N der Nullstellen der Riemannschen Thetafunktion $\theta(z) = \theta(\tau, z)$ gezählt im Inneren eines geeignet gewählten Parallelogramms $\mathcal{F}$ ist nach dem Residuensatz und Bemerkung 1 (beachte $a(1) = 0$ und $a(\tau) = -2\pi i$)

$$N \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \theta'(z)/\theta(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 -a(\tau)dz = 1 \; .$$

Integriert wird hierbei wie üblich über den Rand eines geeignet gewählten Parallelogramms $\mathcal{F}$. Damit ist das Abelsche Theorem bewiesen. QED

Bemerkung 3: Für $z_0 = 1/2 - \tau/2$ gilt

$$\theta(\tau, z_0) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n exp(\pi i\tau(n^2 - n)) \; .$$

Unter der Substitution $n \mapsto 1 - n$ bleibt $n^2 - n$ invariant und $(-1)^n$ nimmt ein Vorzeichen auf. Also $\theta(\tau, z_0) = -\theta(\tau, z_0)$. Somit ist $z_0 + \Gamma$ die Nullstellenmenge von $\theta(\tau, z)$.

Nach Bemerkung 1 hat die elliptische Funktion $f(z) = -(\theta(z)'/\theta(z))'$ eine doppelte Polstelle in den Punkten aus Γ und ist sonst holomorph. Somit ist $f(z)$ von der Ordnung $N = 2$. Substrahiert man den nullten Term der Laurententwicklung im Punkt Null erhält man eine elliptische Funktion $\wp(z)$ mit den selben Eigenschaften und

$$\wp(z) = z^{-2} + 3a_1 z^2 + 5a_2 z^4 + \cdots \; ,$$

denn notwendigerweise gilt $\wp(-z) = \wp(z)$. Also

$$\wp(z)' = -2z^{-3} + 6a_1 z + 20a_2 z^3 + \cdots \; .$$

Eine kleine Rechnung zeigt dann, dass die folgende elliptische Funktion

$$(\wp(z)')^2 - 4\wp(z)^3 + 60a_1 \cdot \wp(z) + 140a_2 = 0$$

ganz ist und in $z = 0$ verschwindet, und damit konstant Null ist.