



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
**SEMPER
APERTUS**

SKRIPT ZUR VORLESUNG
HÖHERE MATHEMATIK III
FÜR DAS
STUDIUM DER PHYSIK

gehalten an der
Universität Heidelberg
im
Wintersemester 2020/21
von
Johannes Walcher

INHALTSVERZEICHNIS

6	FUNKTIONENTHEORIE	123
§ 11	Komplex differenzierbare Funktionen	123
§ 16	Integration in \mathbb{C}	128
§ 17	Cauchy-Formeln	134
§ 18	Residuensatz	139
7	SYMMETRIEN	149
§ 19	Multi-lineare Algebra	149

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 6

FUNKTIONENTHEORIE

Diese Vorlesung ist die Fortsetzung der **Höheren Mathematik 2** und richtet sich an Studierende der Physik im dritten Semester. Das Hauptziel ist die Vermittlung der mathematischen Grundlagen für die “moderne” (im Unterschied zur klassischen) theoretischen Physik. Dazu werden zunächst einige Ergebnisse der Linearen Algebra wiederholt, auf die wir uns bereits im letzten Semester regelmässig, und manchmal etwas unreflektiert, berufen haben, und an den Stellen weiter ausgebaut, die in der Quantenmechanik eine ausgezeichnete Rolle spielen. Gründlich motiviert kehren wir im Anschluss daran zur Analysis zurück. Wir entwickeln die Integrationstheorie im \mathbb{R}^n , besprechen Differentialformen und Integralsätze, Hilberträume und die Fourier-Transformation sowie im Rahmen der Möglichkeiten partielle Differentialgleichungen. Die Überlegungen aus dem Sommer zum Verhältnis zu den theoretischen Physik-Vorlesungen behalten natürlich weiter ihre Gültigkeit.

Für Kommentare, auch Fehlermeldungen, zum Skript, per Email an walcher@uni-heidelberg.de, bin ich sehr dankbar. Man beachte aber, dass dieses Skript keinen Anspruch auf Abgeschlossenheit erhebt: Viele Beweise werden bestenfalls angedeutet, mancher Begriff nur indirekt definiert.

· Xyper-Referenzen wie etwa hier zum Kapitel 3 (Stetigkeit), sollten spätestens dann funktionieren, wenn Sie das **Skript des Sommersemester** ins gleiche Verzeichnis geladen haben.

· Zur Homepage der Vorlesung: www.mathi.uni-heidelberg.de/~walcher/teaching/wise2021/hoemaphys/

§ 11 Komplex differenzierbare Funktionen

Wir diskutieren in diesem § den Begriff der Differenzierbarkeit für komplexwertige Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ einer komplexen Veränderlichen $z \in U \subset \mathbb{C}$. Da per Definition $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als zwei-dimensionaler reeller Vektorraum (sogar mit ausgezeichneter Basis, und die metrische Struktur/Norm stimmt auch), mag es scheinen, dass es sich hier allenfalls um einen Spezialfall der mehr-dimensionalen Differentiation handeln kann, wenn auch vielleicht einer mit etwas physikalischer Relevanz, da $2 < 3$ vom Ende des §10. Es könnte kaum ein Schein mehr trügen.

Benutzt man nämlich zur Differentiation von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nicht nur die reell-lineare Struktur des \mathbb{R}^2 , sondern ausserdem die Körperstruktur von \mathbb{C} , so erhält man erstaunlicher Weise einen Ableitungsbegriff, der sich einerseits praktisch aller Eigenschaften der reellen Ableitung erfreut (natürlich nicht derjenigen, die von der Anordnung abhängen), andererseits aber die Funktionen derartig einschränkt, dass viele der technischen Komplikationen (wie Stetigkeit

der Ableitung etc.) gleichsam von selbst verschwinden.

Spätestens in der Quantenmechanik lernt man, dass komplexe Funktionswerte in der Physik eine enorm wichtige Rolle spielen. Komplexe Definitionsbereiche treten hingegen nach wie vor nicht direkt in den Bildmengen physikalischer Theorien auf, sie bieten aber ein unverzichtbares praktisches Hilfsmittel. Wir werden Beispiele solcher “Lösung reeller Probleme über den Umweg ins Komplexe” im Kapitel ?? vorstellen.

Definition 11.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, falls der Differenzenquotient

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{11.1}$$

sich stetig in z_0 fortsetzen lässt. In diesem Fall heisst der Wert der Fortsetzung in z_0 die Ableitung von f in z_0 . Schreibweise: $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

· Eine Funktion heisst holomorph in z_0 , wenn sie in einer offenen Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist, und holomorph auf U , wenn sie dort überall komplex differenzierbar ist.

Bemerkungen. · Wie bereits angedeutet ist diese Definition formal identisch zu 9.1, und erlaubt eine offensichtliche Verallgemeinerung zu normierten *komplexen* Vektorräumen als Wertebereich.

· Es gelten die gewohnten Produkt- und Kettenregeln. Polynome sind überall komplex differenzierbar, und rationale Funktionen ausserhalb der Nullstellen des Nenners. Exponential- und trigonometrische Funktionen behalten ebenfalls ihre gewohnten Ableitungen.

· Insbesondere ist eine komplex differenzierbare Funktion stetig. Es stellt sich heraus, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion automatisch stetig (und sogar komplex differenzierbar) ist, weshalb der Begriff der “stetigen komplexen Differenzierbarkeit” nicht separat eingeführt wird.

· Als ein Beispiel für die zusätzlichen Einschränkungen in der komplexen Ebene betrachten wir die naive Fortsetzung¹ der differenzierbaren, aber nicht stetig differenzierbaren Funktion aus Beispiel (9.5) auf komplexe Argumente, d.h.

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \tilde{f}(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} \tag{11.2}$$

Solange $z \neq 0$ folgt aus den obigen Regeln, dass die Ableitung von \tilde{f} nach z formal genauso aussieht wie die ihrer Einschränkung auf reelle Argument, also $\tilde{f}'(z) = 2z \sin \frac{1}{z} - \cos \frac{1}{z}$. (Man schreibt dann sinnvollerweise $f(z)$ auch für komplexe Argument.) Da aber für $z = iy$ rein imaginär $\sin \frac{1}{iy} = i \sinh \frac{1}{y} \rightarrow \pm i\infty$ für $y \rightarrow 0_{\pm}$ hat f noch nicht mal einen Grenzwert bei $z_0 = 0$, kann also dort auch nicht komplex differenzierbar sein. (Dieses Argument zeigt noch nicht die (wahre) Aussage, dass sich f überhaupt nicht als in 0 differenzierbare Funktion von der reellen Achse weg fortsetzen lässt.)

¹Zur Erinnerung an S. 59: Eine Fortsetzung einer Abbildung $F : X \rightarrow Y$ auf eine Obermenge $\tilde{X} \supset X$ ist eine Abbildung $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow Y$ mit $\tilde{F}|_X = F$

§ 11. KOMPLEX DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN

· Es gibt auch ganz vertraute komplexe Funktionen, die aus viel einfacheren Gründen nirgends komplex differenzierbar sind. Wichtigstes Beispiel hierfür ist die komplexe Konjugation, $z \mapsto \bar{z}$. Mit $z - z_0 = r e^{i\varphi}$ für $\varphi \in [0, 2\pi)$ hat der Differenzenquotient

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = e^{-2i\varphi} \quad (11.3)$$

offensichtlich keinen Grenzwert für $z \rightarrow z_0$. (Im Unterschied zum vorherigen Beispiel hat die Einschränkung von $z \mapsto \bar{z}$ auf die reelle Achse, nämlich die Identität $x \mapsto x$ eine andere, komplex differenzierbare Fortsetzung ins Komplexe, nämlich $z \mapsto z$.)

· Durch Umschreiben von (11.1) als

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \quad (11.4)$$

und Vergleich mit 10.7 sieht man aber auch, dass man die komplexe Differenzierbarkeit als Spezialfall des zwei-dimensionalen reellen Begriffs auffassen kann: Multiplikation mit $f'(z_0)$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, und der Grenzwert $z \rightarrow z_0$ in \mathbb{C} ist der gleiche wie $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ in \mathbb{R}^2 (wobei natürlich $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$).

· Zur Untersuchung des genauen Zusammenhangs zwischen den beiden Begriffen schreibt man $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit reellwertigen Funktionen u, v von $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, und nutzt aus, dass falls der Grenzwert von (11.1) existiert, er (per Definition) unabhängig davon ist, aus welcher ("reellen") Richtung man sich z_0 nähert. Entlang der reellen Achse, d.h. $z = z_0 + t$ für $t \in \mathbb{R}$ findet man

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (11.5)$$

Entlang der imaginären Achse ist $z = z_0 + it$ für $t \in \mathbb{R}$ und

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (11.6)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

Lemma 11.2. *Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, wenn die zugehörige \mathbb{R}^2 -wertige Funktion in (x_0, y_0) (total) differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (11.7)$$

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung gleichwertig durch (11.5) oder (11.6) gegeben.

Beweis. Es bliebe allenfalls noch nachzureichen, dass eine lineare Abbildung mit einer Matrix-Darstellung der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad (11.8)$$

sich als Multiplikation von \mathbb{C} mit $a + ib$ identifizieren lässt. \square

Geometrische Interpretation

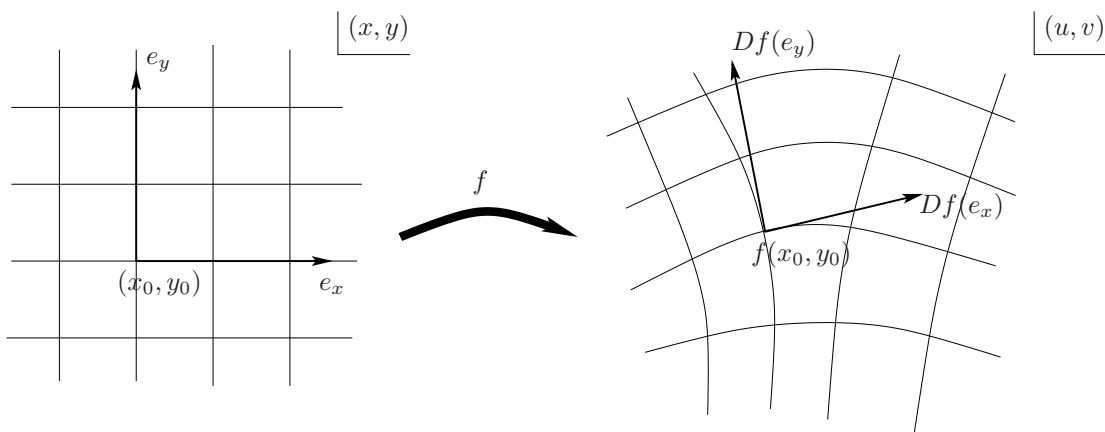
Wir nehmen (11.7) als Gelegenheit zur Schärfung unserer vektoranalytischen Anschauung. Dazu betrachten wir in der (u, v) -Ebene die Bilder der x - und y -Koordinatenrichtungen. Es ist

$$Df(e_x) = (\partial_x u, \partial_x v)^T, \quad Df(e_y) = (\partial_y u, \partial_y v)^T \quad (11.9)$$

Als Konsequenz der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt bezüglich dem euklidischen inneren Produkt in Definitions- und Wertebereich

$$\langle Df(e_x), Df(e_y) \rangle = \langle e_x, e_y \rangle = 0, \quad \|Df(e_x)\| = \|Df(e_y)\| \quad (11.10)$$

und daraus folgt (im Fall $f'(z_0) \neq 0$), dass das Differential den Winkel zwischen je zwei beliebigen Richtungen im Tangentialraum $T_{(x_0, y_0)}U \cong \mathbb{R}^2$ erhält, Längen aber um einen gemeinsamen Faktor vergrößert oder verkleinert. Solche Abbildungen heißen “konform”. Vom komplexen Standpunkt ist dies aber nichts anderes als die in 2 gegebene Interpretation der Multiplikation mit einer komplexen Zahl (hier: $f'(z_0)$) als “Drehstreckung”. (Die Umkehrung konform \Rightarrow komplex differenzierbar gilt bis auf Orientierungswechsel/komplexe Konjugation.)



· Eine weitere von Ingenieuren und Physikern häufig benutzte Konsequenz aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen ergibt sich unter der (nachträglich redundanten) Annahme, dass u und v mindestens zweimal stetig differenzierbar sind:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &\stackrel{(11.7)}{=} \partial_x \partial_y v \stackrel{10.13}{=} \partial_y \partial_x v \stackrel{(11.7)}{=} -\partial_y^2 u \\ &\Rightarrow \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \end{aligned} \quad (11.11)$$

Der Real- (und auch Imaginär-)Teil einer holomorphen Funktion löst also die zweidimensionale Laplace-Gleichung.

Analytische Funktionen

Die aber vielleicht wichtigste Quelle holomorpher Funktionen sind die im §5 eingeführten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten. Es gilt nämlich

Proposition 11.3. *Eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist an jeder Stelle $z_0 \in B_R(0)$ innerhalb ihrer Konvergenzscheibe komplex differenzierbar mit der (gliedweisen) Ableitung $P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}$*

§ 11. KOMPLEX DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN

Beweis. Wir hatten bereits im § 8 gesehen, dass $P(z)$ auf $B_R(0)$ eine stetige Funktion darstellt. Der Nachweis der Differenzierbarkeit geht ganz ähnlich.

· Zunächst halten wir fest, dass die Reihe der gliedweisen Ableitungen $\sum a_n n z^{n-1}$ wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ den gleichen Konvergenzradius hat wie P (siehe (5.45)) und daher ebenso wie P für jedes $|z| < R$ absolut konvergiert. Insbesondere ist Umordnen erlaubt.

· Es sei r so, dass $|z_0| < r < R$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ sei dann N so gross, dass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \frac{\epsilon}{3} \quad (11.12)$$

Dann ist für alle $|z| < r$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z_0^{n-1} (z - z_0) \right| \\ & \leq \left| \sum_{n=0}^N (a_n z^n - a_n z_0^n - a_n n z_0^{n-1} (z - z_0)) \right| \\ & \quad + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |z^n - z_0^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} |z - z_0|}_{< \frac{2}{3} \epsilon \cdot |z - z_0|} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Da Polynome komplex differenzierbar sind, existiert ein $\delta > 0$ so, dass die endliche Summe für $|z - z_0| < \delta$ kleiner als $\frac{\epsilon}{3} \cdot |z - z_0|$ ist. Zusammen ist alles kleiner als $\epsilon \cdot |z - z_0|$, falls $z \in B_\delta(z_0) \cap B_r(0)$ d.h. es folgt die Behauptung. \square

Definition 11.4. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heisst (komplex) analytisch, falls es für jeden Punkt $z_0 \in U$ eine Folge $(a_n^{(z_0)})$ komplexer Zahlen und ein $\delta > 0$ gibt so, dass $B_\delta(z_0) \subset U$ und für alle $z \in B_\delta(z_0)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(z_0)} (z - z_0)^k \quad (11.14)$$

· Insbesondere hat die Potenzreihe auf der rechten Seite positiven Konvergenzradius $R^{(z_0)}$. Es muss aber nicht $B_{R^{(z_0)}}(z_0) \subset U$ gelten.

· Durch wiederholte Anwendung von 11.3 folgt:

Korollar 11.5. *Eine analytische Funktion ist in ihrem Definitionsbereich unendlich oft komplex differenzierbar, und es gilt die ‘Taylor-Formel’*

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k^{(z_0)} \quad (11.15)$$

Bemerkungen/Beispiele 11.6. · Umgekehrt ist eine durch eine Potenzreihe $P(z) = \sum a_n z^n$ dargestellte Funktion analytisch: Für $z_0 \in B_R(0)$ erhält man durch

“Umentwickeln”² von $P(z_0 + (z - z_0))$ eine Potenzreihendarstellung der Form (11.14), welche mindestens für $z \in B_\delta(z_0) \subset B_R(0)$ auch wieder die gegebene Funktion darstellt.

- Beispiel: Geometrische Reihe zur Illustration der Idee der analytischen Fortsetzung.
- Beispiel: $Q(z) = z^2$ als biholomorphe Abbildung $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

Wichtige Ableitungen als Übungsaufgaben

Potenzreihen mit Argumenten aus endlich-dimensionalen Banach-Algebren sind innerhalb ihrer Konvergenzkugel ebenfalls gliedweise ableitbar. Allerdings gilt für die Ableitung im nicht-kommutativen Fall die etwas allgemeinere Formel (vgl. schon (9.3))

$$DP(x_0)(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k (x - x_0) x_0^{n-k-1} \quad (11.17)$$

(Annahme: $a_n \in \mathbb{C}$) Jedenfalls ist immer

$$D \exp(0) = \operatorname{id}_{\mathcal{A}} \quad (11.18)$$

- Für $x \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $\det x \neq 0$ gilt

$$D \det(x)(v) = \det x \operatorname{tr}(x^{-1}v) \quad (11.19)$$

- Quaternionische Ableitung

§ 16 Integration in \mathbb{C}

Teil unserer Aufgaben im Wintersemester werden die Umkehrung der mehrdimensionalen Differentialrechnung aus §10 und die Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen sein. Dies wird einige Vorbereitungen aus der linearen Algebra erfordern, sowie eine erweiterte Uminterpretation des Integralbegriffs. In diesem Kapitel stellen wir uns zunächst die durchaus einfacher scheinende Frage nach der Umkehrung der komplexen Ableitung aus §§ 11. Die Antwort ist höchst überraschend. Es stellt sich nämlich heraus, dass für $U \subset \mathbb{C}$ offen eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ lokal genau dann eine Stammfunktion besitzt (d.h., komplex integrierbar ist), wenn sie holomorph (nämlich, komplex differenzierbar) ist. Stetigkeit reicht nicht mehr aus! Eine globale Konsequenz aus dieser “Vereinheitlichung” von Differentiation und Integration ist, dass sich bestimmte komplexe Integrale in viel systematischerer Weise als etwa die Beispiele (14.29), (14.38) durch Studium der Ableitungen des Integranden auswerten lassen.

²Dies ist nicht strenggenommen eine direkte Konsequenz aus dem Umordnungssatz von S. 48. Auf jeden Fall konvergiert aber

$$a_k^{(z_0)} = \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} \quad (11.16)$$

Die Aussage über Konvergenz der umentwickelten Reihe lässt sich am einfachsten mit den Methoden aus Kapitel ?? zeigen.

§ 16. INTEGRATION IN \mathbb{C}

In diesem Kapitel steht damit unser bisheriges Leitziel, dass wir nach Lösungen von physikalischen Problemen durch Approximation suchen, etwas zurück. Vielmehr bietet die Funktionentheorie (in eigentlich unerwarteter Weise) ein Hilfsmittel für *exakte* Aussagen über Strukturen in physikalischen Theorien. Ich hoffe, Sie werden davon in absehbarer Zeit profitieren!

Ein weiterer Unterschied: Anstatt wie bisher von Anfang an alles richtig hinzuschreiben, gehen wir in diesem § entdeckend vor und tasten uns schrittweise an die endgültigen Definitionen heran.³

Zu Beginn müssen wir uns auf eine Klasse von Teilmengen von \mathbb{C} als Definitionsbereiche einigen, auf denen wir nach Stammfunktionen suchen sollen. Ein Blick zurück auf 14.3 zeigt, dass die für die Definition des bestimmten Integrals zentrale Eigenschaft von Intervallen ihre Konvexität ist: Für je zwei Punkte $a, b \in I$ liegen auch alle Zwischenstellen $(1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$ in I . Eine sinnvolle komplexe Verallgemeinerung sind also offene und konvexe⁴ Teilmengen $U \subset \mathbb{C}$, und mit dieser Erkenntnis starten wir sofort unseren ersten Versuch, ein “Integral von a nach b in U ” zu definieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen (komplex) ein-dimensionalen Wertebereich. Wir nehmen also an, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(f; a, b) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \right) \cdot f \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) \quad (16.1)$$

So wie sich 11.1 von 9.1 nur im Namen der Variablen unterscheidet, ist diese Definition formal identisch zu (14.2). What could possibly go wrong?

Beh.: Es existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; a, b)$

Bew.: Wir betrachten auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ die stetige, komplexwertige Funktion

$$[0, 1] \ni t \mapsto \tilde{f}(t) := f(a + t(b-a)) = f((1-t)a + tb) \in \mathbb{C} \quad (16.2)$$

Dann ist

$$S_n(f; a, b) = (b-a) \cdot S_n(\tilde{f}; 0, 1) \quad (16.3)$$

wo die rechte Seite nun echt mit (14.2) zusammentrifft, da $0, 1 \in \mathbb{R}$. Die Konvergenz folgt also aus der Stetigkeit von \tilde{f} und es gilt

$$\int_a^b f(w)dw := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; a, b) = (b-a) \int_0^1 \tilde{f}(t)dt \quad (16.4)$$

□

Beachte: Die Notation auf der linken Seite ist im Komplexen obsolet. In Anbetracht der endgültigen Definition 16.2 sollten wir schreiben

$$\int_{l(a,b)} f(w)dw \quad (16.5)$$

wobei $l(a, b) = (t \mapsto a + t(b-a))$ für die “gerichtete Strecke von a nach b ” steht.

³Wir sagen natürlich auch nicht absichtlich etwas Falsches!

⁴Zur Definition der Konvexität wird \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifiziert: $U \subset \mathbb{C}$ heißt konvex, falls $\forall a, b \in U$, $\{a + t(b-a) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$, s. S. 91.

Beispiel: Angenommen, $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion mit $F'(z) = f(z) \forall z \in U$. Dann folgt aus der Kettenregel, dass

$$[0, 1] \ni t \mapsto \tilde{F}(t) := F(a + t(b - a)) \in \mathbb{C} \quad (16.6)$$

(reell) differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\dot{\tilde{F}}(t) = \frac{d}{dt} F(a + t(b - a)) = (b - a) \cdot F'(a + t(b - a)) = (b - a) \cdot \tilde{f}(t) \in \mathbb{C} \quad (16.7)$$

\tilde{F} ist also auf $[0, 1]$ eine Stammfunktion von $(b - a)\tilde{f}$ (oder, wenn gewollt, fortgesetzt auf ein offenes Intervall $(-\epsilon, 1 + \epsilon)$ für $\epsilon > 0$). Nach dem Hauptsatz der (reellen) Differential- und Integralrechnung folgt daher

$$\int_a^b f(w)dw = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0) = F(b) - F(a) \quad (16.8)$$

Explizitere Beispiele sind Konstanten, Polynome, Potenzreihen, etc.

Können wir nun umgekehrt (16.4) benutzen, um für jede solche stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion zu konstruieren? NEIN! — In unserem Beweis des Hauptsatzes (14.16) haben wir nämlich *alle* Eigenschaften in 14.6 benutzt und man sieht:

- (i) (Orientierungswechsel) gilt auch für (16.4) ✓
- (ii) (Linearität und Integration von Konstanten) ✓
- (iii) (Standardabschätzung) (mit Norm = Absolutbetrag) ✓

ABER (iv) (Additivität im Integrationsbereich) gilt im Allgemeinen nicht! Der Vorfaktor $(b - a)$ in (16.4) verhindert, dass der Beweis von Seite 111 ohne weiteres durchgeht, ein einfaches Gegenbeispiel ist: $f(z) = \bar{z}$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1 + i$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{w}dw &= \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \\ \int_1^{1+i} \bar{w}dw &= i \int_0^1 \overline{(1 + it)}dt = i \int_0^1 (1 - it)dt = i + \frac{1}{2} \\ \int_0^{1+i} \bar{w}dw &= (1 + i) \int_0^1 (1 - i)tdt = 2 \cdot \int_0^1 tdt = 1 \\ &\Rightarrow \int_0^1 + \int_1^{1+i} \neq \int_0^{1+i} \text{!!!!} \end{aligned} \quad (16.9)$$

Da aber sonst alle Eigenschaften gelten, und da aus (16.8) umgekehrt folgt, dass die Additivität notwendig ist für die Existenz einer Stammfunktion, können wir folgern:

Fazit: Eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen und konvexen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt dann und nur dann eine komplexe Stammfunktion, d.h. eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z) \forall z \in U$ falls für alle $a, b, c \in U$ gilt:

$$\int_a^b f(w)dw + \int_b^c f(w)dw + \int_c^a f(w)dw = 0 \quad (16.10)$$

Wie in \mathbb{R} ist eine solche Stammfunktion durch das unbestimmte Integral gegeben und bis auf eine additive Konstante eindeutig.

§ 16. INTEGRATION IN \mathbb{C}

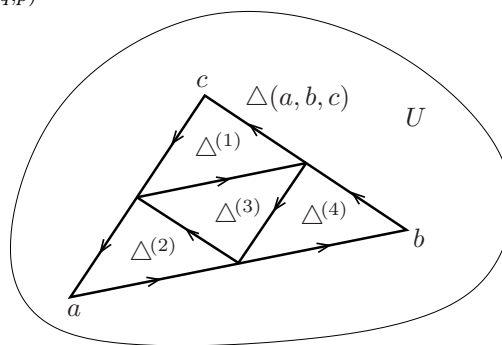
Lemma 16.1. Sei U wie eben offen und konvex. Dann gilt die Aussage (16.10), falls f auf U holomorph ist!

Beweis. Auf der Suche nach einem Ersatz für die gemeinsame Verfeinerung der Intervall-Zerlegungen aus 14.5 benutzen wir die Visualisierung von \mathbb{C} als zweidimensionale euklidische Ebene und daraus abgeleitete geometrische Sprechweisen. Für drei Punkte $o, p, q \in \mathbb{C}$ bezeichne $\blacktriangle(o, p, q)$ das (allenfalls entartete⁵) Dreieck mit diesen Punkten als Ecken und $\Delta(o, p, q)$ seinen Rand. Beides sind abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{C} im Sinne von 4.18. Der Durchmesser ist $\text{diam } \blacktriangle(o, p, q) = \max\{|p - o|, |q - p|, |o - q|\}$ und der Umfang $|\Delta(o, p, q)| = |p - o| + |q - p| + |o - q|$. Für $o, p, q \in U$ ist wegen der Konvexität von U $\blacktriangle(o, p, q) \subset U$. Wir schreiben

$$\int_{\Delta(o,p,q)} f(w)dw = \int_o^p f(w)dw + \int_p^q f(w)dw + \int_q^o f(w)dw \quad (16.11)$$

für das "Integral über der Rand" in der angegebenen Orientierung. (Es gilt $\int_{\Delta(o,p,q)} f(w)dw = \int_{\Delta(p,q,o)} f(w)dw = -\int_{\Delta(o,q,p)} f(w)dw$ gemäss Eigenschaft (i).)

Die Behauptung ist also, dass für je drei Punkte $a, b, c \in U$, $\int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw = 0$, falls f holomorph ist. Wir zeigen dafür, dass für jedes $\epsilon > 0$ $|\int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw| < \epsilon$. Dazu zerteilen wir $\blacktriangle(a, b, c)$ durch Halbieren der Seiten in vier kongruente Dreiecke, deren Ränder $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}$ und $\Delta^{(4)}$, wir in einer Weise orientieren, dass



$$\int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw = \sum_{i=1}^4 \int_{\Delta^{(i)}} f(w)dw \quad (16.12)$$

Gemäss Behauptung ist jeder der vier Terme auf der rechten Seite ebenfalls null. Ohne dies zu wissen, suchen wir ein jenes Dreieck aus, für das der Wert des Integrals (im Absolutbetrag) das Maximum von allen vieren ist, und bezeichnen es mit Δ_1 . Mit $\Delta_0 := \Delta(a, b, c)$ gilt dann

$$\left| \int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw \right| = \left| \int_{\Delta_0} f(w)dw \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta_1} f(w)dw \right| \quad (16.13)$$

Nun zerteilen wir analog \blacktriangle_1 , suchen das Maximum der vier Integrale und bezeichnen das zugehörige Dreieck mit \blacktriangle_2 . Durch Wiederholen des Verfahrens erhalten wir eine Folge (\blacktriangle_n) von Dreiecken mit Rändern (Δ_n) über die

$$\left| \int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\Delta_n} f(w)dw \right| \quad (16.14)$$

Wegen der Kongruenz gilt $\text{diam } \blacktriangle_n = 2^{-n} \text{diam } \blacktriangle_0$ und $|\Delta_n| = 2^{-n} |\Delta_0|$, bilden also Nullfolgen. Ausserdem ist $\blacktriangle_{n+1} \subset \blacktriangle_n$ und nach 4.24 existiert daher genau ein Punkt $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \blacktriangle_n$.

⁵Sind a, b, c kollinear oder fallen zusammen, so gilt (16.10) auf jeden Fall.

· Da f nach Annahme in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon \cdot |z - z_0| \quad (16.15)$$

falls $|z - z_0| < \delta$. Sei nun n so gross, dass $\text{diam } \blacktriangle_n < \delta$. Dann ist für $w \in \Delta_n$ $|w - z_0| \leq \text{diam } \blacktriangle_n < \delta$. Wegen der Eigenschaft (ii) des Integrals (16.4) gilt

$$\int_{\Delta_n} f(w)dw = \int_{\Delta_n} (f(w) - f(z_0) - f'(z_0)(w - z_0))dw \quad (16.16)$$

und mit Hilfe von Eigenschaft (iii) und (16.15) folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_n} f(w)dw \right| &\leq \sup\{|f(w) - f(z_0) - f'(z_0)(w - z_0)| \mid w \in \Delta_n\} \cdot |\Delta_n| \\ &\leq \epsilon \cdot \text{diam } \blacktriangle_n \cdot |\Delta_n| \\ &\leq \epsilon \cdot \frac{\text{diam } \blacktriangle_0}{2^n} \cdot \frac{|\Delta_0|}{2^n} \end{aligned} \quad (16.17)$$

Mit (16.14) folgt

$$\left| \int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw \right| \leq \epsilon \cdot \text{diam } \blacktriangle(a, b, c) \cdot |\Delta(a, b, c)| \quad (16.18)$$

und daraus die Behauptung. □

Wir zeigen im nächsten §, dass falls f umgekehrt eine Stammfunktion besitzt, d.h. (16.10) gilt, dann f bereits holomorph ist. Zunächst aber flexibilisieren wir etwas Integral und Definitionsbereiche.

Die Motivation für die folgende Definition ist die bereits gemachte Beobachtung, dass *falls eine Stammfunktion existiert*, es zu ihrer Rekonstruktion nicht darauf ankommt, “wie genau wir von a nach b kommen”, Hauptsache, wir kommen an (vgl. dazu die Warnungen auf Seite 113).

Definition 16.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ein stetig differenzierbarer Weg in U von a nach b , beides Punkte in U , ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ mit $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. Für eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir dann das Integral von f über γ mit 14.3 als

$$\int_{\gamma} f(w)dw := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \quad (16.19)$$

\uparrow
 hier ist die Multiplikation
 in \mathbb{C} versteckt!

· Die Länge eines Weges ist das reellwertige Integral

$$l(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (16.20)$$

§ 16. INTEGRATION IN \mathbb{C}

· Ist $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ ein Weg von a nach b und $\gamma_2 : [\beta, \gamma] \rightarrow U$ ein Weg von b nach c so definieren wir die Verkettung (oder Aneinanderreihung) von γ_1 und γ_2 durch

$$[\alpha, \gamma] \ni t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [\alpha, \beta] \\ \gamma_2(t) & t \in (\beta, \gamma] \end{cases} \quad (16.21)$$

Dies ist wegen $\gamma_1(\beta) = b = \gamma_2(\beta)$ ein stetiger Weg von a nach c , aber in β nicht unbedingt differenzierbar, was aber zur Not auch repariert werden kann. Eine Verkettung von endlich vielen stetig differenzierbaren Wegen nennt man auch stückweise stetig differenzierbar. Integral und Länge sind als Summen über die Stücke definiert.

· Der *Orientierungswechsel* eines Wegs γ ist $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto \gamma(\beta + \alpha - t)$. Unter Orientierungswechsel vertauschen Anfangs- und Endpunkt ihre Rolle und das Integral schnappt sich ein Vorzeichen. Die Länge bleibt sich gleich.

· Eine *Reparametrisierung* eines Wegs $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ ist der Weg $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ für eine stetig differenzierbare Abbildung $\tau : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \rightarrow [\alpha, \beta]$ mit $\tau(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\tau(\tilde{\beta}) = \beta$. Integral und Länge ändern sich dabei nicht.

· Statt Wege sagt man auch Kurven oder Konturen, insbesondere dann, wenn man betonen will, dass Integrale nur von dem Bild $\gamma([\alpha, \beta])$ (welches auch “Spur des Wegs” genannt wird) und der Orientierung, und nicht einer expliziten Parametrisierung abhängen. Ein Weg heisst geschlossen, wenn $a = b$.

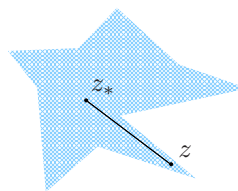
Bemerkungen. · Man prüfe nach, dass das Integral (16.19) die Regeln (i) und (ii) erfüllt und (iii) in der Form

$$\left| \int_{\gamma} f(w) dw \right| \leq \sup\{|f(w)| \mid w \in \gamma([\alpha, \beta])\} \cdot l(\gamma) \quad (16.22)$$

(Hier geht die Verträglichkeit der Multiplikation mit der euklidischen Norm = Absolutbetrag ein.)

· Bezüglich (iv) folgt wie in (16.8): Besitzt f auf U eine komplexe Stammfunktion F , so ist $\int_{\gamma} f(w) dw = F(b) - F(a)$. Dies ist gemäss 16.1 insbesondere dann der Fall, wenn f holomorph ist und U konvex. Im Allgemeinen aber *hängt das Integral tatsächlich vom Weg ab*.

· Etwas allgemeiner kann man aus 16.1 folgern: Ist U ein Sterngebiet, d.h. existiert ein “Sternmittelpunkt” $z_* \in U$ so, dass $\forall z \in U$ die Strecke $l(z_*, z) \subset U$, dann besitzt jede holomorphe Funktion auf U eine komplexe Stammfunktion.



· Man überlege sich so ausführlich wie möglich, dass die Definition 16.2 eine zufriedenstellende Verallgemeinerung des reellen Integrals 14.3 darstellt. Insbesondere treffen beide Definitionen zusammen, wenn $a < b \in \mathbb{R}$ und f eine holomorphe Fortsetzung von einem offenen Intervall $I \supset [a, b]$ auf eine offene Umgebung $U \supset I$ hinaus in die komplexe Ebene besitzt. Man beachte in diesem Zusammenhang auch die formale Ähnlichkeit zwischen (16.19) und der “Substitutionsregel” (14.21).

⁶Das Alphabet hat hier kapitulieren müssen, die Bedeutung von γ sollte aber jeweils klar sein. Noch etwas allgemeiner muss der Definitionsbereich von γ_2 nicht direkt an den von γ_1 anschliessen, formal schreibe man etwa $\gamma_2 : [\beta + \delta, \gamma + \delta] \rightarrow U$, und ersetze $\gamma_2(t)$ durch $\gamma_2(t + \delta)$ in (16.21).

§ 17 Cauchy-Formeln

Beispiel 17.1. In der Praxis werden nebst den geraden Strecken $t \mapsto a + t(b - a)$ vor allem Kreise und Kreisbögen als Wege benötigt. Bereits in (2.16) hatten wir die offene Scheibe vom Radius R um $z_0 \in \mathbb{C}$ definiert als $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$, die abgeschlossene Scheibe durch $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$. Der Kreis

$$C_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\} = \overline{B_R(z_0)} \setminus B_R(z_0) \quad (17.1)$$

ist der Rand dieser Scheiben. Wir schreiben jetzt für den geschlossenen Weg mit Spur $C_R(z_0)$ in der positiven Orientierung (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) $C_R^+(z_0)$ und in der negativen Orientierung $C_R^-(z_0)$. Gebräuchliche Parametrisierungen sind

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + Re^{\pm it} \quad (17.2)$$

und

$$[0, 1] \ni t \mapsto z_0 + Re^{\pm 2\pi it} \quad (17.3)$$

Man greift auch häufig auf Bilder zurück, ohne Parametrisierungen explizit anzugeben. Die an die Definition 16.2 angepasste Verallgemeinerung des Hauptsatzkriteriums (16.10) lautet:

Proposition 17.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit der Eigenschaft, dass für je zwei Punkte $a, b \in U$ ein Weg von a nach b in U existiert. Dann besitzt eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann eine komplexe Stammfunktion, wenn für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ

$$\int_{\gamma} f(w)dw = 0 \quad (17.4)$$

In diesem Fall kann für jedes $z_* \in U$ eine Stammfunktion von f rekonstruiert werden durch $F(z) = \int_{\gamma(z_*, z)} f(w)dw$ für einen beliebigen Weg $\gamma(z_*, z)$ von z_* nach z in U und es gilt für jeden (stückweise stetig differenzierbaren) Weg γ von a nach b in U :

$$\int_{\gamma} f(w)dw = F(b) - F(a) \quad (17.5)$$

Beweis. Siehe Lehrbücher. □

Im Unterschied zu 16.1 ist es aber *nicht richtig*, dass für beliebige nicht konvexe oder nicht-sterneförmige offene Mengen (17.4) für jede stetige Funktion gilt:

Beispiel 17.3. Das Integral der Funktion $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z}$ über den Kreis vom Radius $R > 0$ um den Nullpunkt ist

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{w} dw &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \frac{d}{dt}(Re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Re^{it} i dt = \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2\pi i \end{aligned} \quad (17.6)$$

und insbesondere nicht Null. Man bemerke, dass (17.6) von R unabhängig ist, und zur Sicherheit rechne man noch einmal für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\int_{C_R^+(z_0)} \frac{1}{w - z_0} dw = 2\pi i \quad \text{und auch noch} \quad \int_{C_R^-(z_0)} \frac{1}{w - z_0} dw = -2\pi i \quad (17.7)$$

§17. CAUCHY-FORMELN

Fazit: $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion. Hingegen hatten Sie in Aufgabe 10.3 gesehen, dass auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ der Hauptzweig des Logarithmus, definiert durch

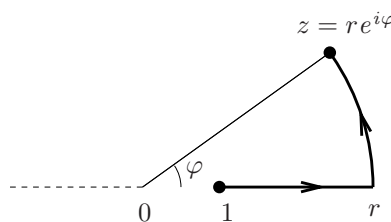
$$\text{Log}(z) = \ln r + i\varphi \tag{17.8}$$

für $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, holomorph ist mit Ableitung $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$. Auf dieser kleineren Menge also *existiert* eine Stammfunktion. In der Tat ist ja die geschlitzte Ebene sternförmig mit Sternmittelpunkt $1 \in z$ und es gilt

$$\text{Log}(z) = \int_{l(1,z)} \frac{1}{w} dw \tag{17.9}$$

Statt auf der direkten Strecke $l(1, z)$ kann auch entlang des rechts skizzierten Weges integriert werden. Das gerade Stück ist $[1, r] \ni t \mapsto t$, das gebogene $[0, \varphi] \ni t \mapsto re^{it}$, und

$$\int_1^r \frac{1}{s} ds + \int_0^\varphi \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \ln r + i\varphi \tag{17.10}$$



Es gehören zur Vollständigkeit der Diskussion jetzt noch Antworten auf die folgenden zwei Fragen:

- (1) Ist es *notwendig*, dass f holomorph ist, damit sie auf konvexen Mengen eine Stammfunktion besitzt?
- (2) Gibt es notwendige und hinreichende Charakterisierungen von Mengen U dafür, dass jede holomorphe Funktion auf U eine Stammfunktion besitzt?

Die Intention der Frage (1) ist *lokal*, d.h. man denkt an “kleine” Umgebungen eines gegebenen Punktes $z_0 \in U$, insbesondere Kreisscheiben $B_R(z_0)$. Die Antwort ist Ja, siehe 17.5.

Die Antwort auf die globale Frage (2) ist, dass genau dann jede auf einer offenen zusammenhängenden Menge U holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt, wenn U “einfach zusammenhängend” ist. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass U keine “Löcher im Inneren” hat oder, etwas präziser gesagt, dass sich jeder geschlossene Weg in U stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Eine vollständige Untersuchung würde uns hier zu weit führen. Ein Teil der Probleme rührt auch von der Mathematiker Wunsch her, möglichst allgemeine (auch nicht differenzierbare...) Wege zur Integration zuzulassen, und für solche ist es nicht so einfach zu zeigen, dass Inneres und Äusseres wohldefiniert sind.

In der Praxis werden stückweise stetig differenzierbare Wege genügen, und wir beschränken uns ausserdem auf solche, die nie stoppen und sich nicht selbst schneiden (sog. “einfache Kurven”). Dann lässt sich intuitiv bequem fassen die

Aussage: Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ einfach geschlossen (d.h. $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, aber $\gamma|_{[\alpha, \beta]}$ ist injektiv) und stückweise stetig differenzierbar mit $\dot{\gamma} \neq 0$ auf allen Stücken. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, die $\gamma([\alpha, \beta])$ und ihr gesamtes Innere enthält. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(w) dw = 0 \tag{17.11}$$

Der nächste entscheidende Schritt ergibt sich aus der Verbindung von (17.11) mit dem Integral (17.6):

Theorem 17.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Angenommen, für $z_0 \in U$ und $R > 0$ liegt $\overline{B_R(z_0)} \subset U$. Dann gilt für alle $z \in B_R(z_0)$:

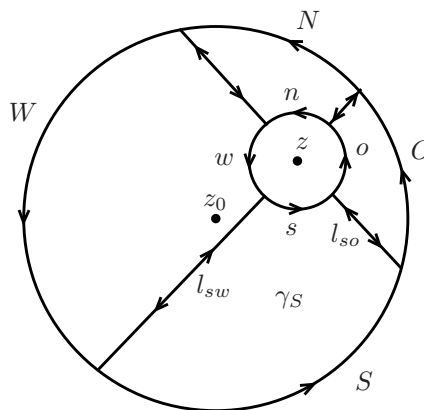
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (17.12)$$

Beweis: Beh.: Für $r > 0$ mit $B_r(z) \subset B_R(z_0)$ gilt

$$\int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (17.13)$$

Bew.: Wir zerlegen wie skizziert

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+(z_0)} &= \int_O + \int_N + \int_W + \int_S \\ \int_{C_r^+(z)} &= \int_o + \int_n + \int_w + \int_s \end{aligned} \quad (17.14)$$



und addieren und subtrahieren die geraden Stücke in die Nebenhimmelsrichtungen, sodass

$$\int_{C_R^+(z_0)} - \int_{C_r^+(z)} = \int_{\gamma_O} + \int_{\gamma_N} + \int_{\gamma_W} + \int_{\gamma_S} \quad (17.15)$$

wo z.B.

$$\int_{\gamma_S} = \int_S - \int_{l_{so}} - \int_s + \int_{l_{sw}} \quad (17.16)$$

Nun liegt jeder der vier Wege mit seinem Inneren in einer (anderen) offenen konvexen Menge $\subset U$, auf der der Integrand

$$w \mapsto \frac{f(w)}{w - z} \quad (17.17)$$

jeweils holomorph ist. Damit folgt aus (17.11), dass $\int_{\gamma_S} = 0$ etc., und daraus dann (17.13).

2. Schritt: Aus (17.7) folgt, dass für jedes $r > 0$ wie oben

$$f(z) = f(z) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{1}{w - z} dw}_{=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(z)}{w - z} dw \quad (17.18)$$

sodass zusammen mit (17.13) für jedes solches r

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \quad (17.19)$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es daher aus, wenn wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $r > 0$ angeben, für das wir zeigen können, dass der Betrag der rechten Seite kleiner als ϵ ist.

§17. CAUCHY-FORMELN

Bew.: Da f in z holomorph ist, ist der Differenzenquotient $w \mapsto \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ per Definition 11.1 stetig in z fortsetzbar, und daher nach 7.6 auf der folgenkompakten Menge $\overline{B_R(z_0)}$ beschränkt, sagen wir durch $M > 0$. Sei nun für $\epsilon > 0$ $r > 0$ so klein, dass $Mr < \epsilon$. Dann folgt aus der Standardabschätzung (16.22) des Integrals

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} M \cdot \underbrace{l(C_r^+(z))}_{=2\pi r} < \epsilon \quad (17.20)$$

□

Folgerungen

Man prüft nach, dass der Integrand von (17.12), z.B. in der Standardparametrisierung $w(t) = z_0 + Re^{it}$, $\dot{w}(t) = Rie^{it}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{z_0 + Re^{it} - z} \cdot Rie^{it} dt \quad (17.21)$$

die Voraussetzungen der Proposition 14.8 über parameterabhängige Integrale erfüllt. Insbesondere ist für festes t der Integrand in jedem $z \in B_R(z_0)$ komplex differenzierbar und die Abbildung auf die Ableitung nach z

$$(t, z) \mapsto \frac{d}{dz} \left(\frac{f(z_0 + Re^{it})}{z_0 + Re^{it} - z} \cdot Rie^{it} \right) = \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(z_0 + Re^{it} - z)^2} \cdot Rie^{it} \quad (17.22)$$

ist stetig. Es folgt zunächst

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw, \quad (17.23)$$

und daraus durch vollständige Induktion, dass f unendlich oft komplex differenzierbar ist mit

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad (17.24)$$

Insbesondere folgt daraus wie angekündigt: Besitzt eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion, so ist f bereits holomorph. (Denn: Eine Stammfunktion F von f ist holomorph und daher wie eben gezeigt unendlich oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist $f = F'$ holomorph.)

Holomorphie ist also notwendig und hinreichend für die lokale Existenz einer Stammfunktion, und damit ist die Frage (1) auf Seite 135 beantwortet. Aus der folgenden Verbindung zu 11.4 wird klar, warum Kreise als Integrationswege eine besondere Rolle spielen.

Proposition 17.5. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ und $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset U$. Dann besitzt f eine für alle $z \in B_R(z_0)$ konvergente Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (17.25)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = a_k^{(z_0)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad (17.26)$$

Bemerkungen. · Hier ist R stets kleiner (und nie gleich) als der Konvergenzradius der Potenzreihe (17.25): Da U offen ist, existiert stets noch eine etwas grössere Kreisscheibe $\overline{B_{R'}(z_0)} \subset U$ mit $R' > R$, in deren Inneren die Potenzreihe (17.25) immer noch konvergiert.

Beweis. Wie oben nutzen wir die Trennung zwischen f und z in der Integraldarstellung (17.12) aus. Für festes $z \in B_R(z_0)$ ist

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} =: \rho < 1 \quad (17.27)$$

konstant für alle $w \in C_R(z_0)$. Dort gilt daher (geometrische Reihe)

$$\left| \frac{1}{w - z} - \sum_{k=0}^n \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right| = \left| \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^k} \right| \leq \frac{1}{R} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \quad (17.28)$$

Mit (17.12) und der Standardabschätzung des Integrals folgt

$$\begin{aligned} & \left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \cdot (z - z_0)^k \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} f(w) \left(\frac{1}{w - z} - \sum_{k=0}^n \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right) dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max\{|f(w)| \mid w \in C_R(z_0)\} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \cdot (2\pi R) \\ &\leq \max\{|f(w)| \mid w \in C_R(z_0)\} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \end{aligned} \quad (17.29)$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert also die Reihe wie behauptet gegen $f(z)$. \square

Bemerkungen. Mittels (17.11) und (17.7) lässt sich als Verallgemeinerung von 17.4 zeigen, dass für einen einfach geschlossenen Weg γ , der mitsamt seinem Inneren ganz in U liegt, und einen Punkt $z \in U$ im Inneren von γ

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \pm 2\pi i \cdot f(z) \quad (17.30)$$

je nach Orientierung von γ . Für z im Äusseren von γ ist das Integral 0. Und für einen ganz neugierigen geschlossenen Weg, der sich in U zu einem Punkt zusammenziehen lässt und z nicht trifft, gilt

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2\pi i \cdot f(z) \cdot W(\gamma, z) \quad (17.31)$$

wobei für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$

$$W(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw \in \mathbb{Z} \quad (17.32)$$

die ‘‘Windungszahl’’ von γ um z berechnet.

§ 18 Residuensatz

Im vorigen § hatten wir aus der Cauchy-Formel 17.4 gefolgert, dass holomorphe Funktionen unendlich oft differenzierbar sind, und sich die Ableitungen nach den Formeln (17.24) durch Mittelung über geeignete Kreise berechnen lassen. Nun wollen wir die Logik umkehren, um Integrale durch Ableiten zu berechnen. Dabei beruht nach wie vor alles auf

- (i) der Invarianz des Integrals einer holomorphen Funktion unter stetigen Deformationen des Integrationsweges, solange entweder die Endpunkte festgehalten werden oder der Weg geschlossen ist und ausserdem die Deformation innerhalb der Menge stattfindet, in der die Funktion holomorph ist, und
- (ii) der nun elementaren Feststellung, dass für $n \in \mathbb{Z}$ und $R > 0$

$$\int_{C_R^+(0)} w^n dw = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (18.1)$$

Denn für $n \neq -1$ hat die Funktion $z \mapsto z^n$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Stammfunktion $\frac{1}{n+1}z^{n+1}$, und für $n = -1$ gilt (17.6).

· Ist beispielsweise eine Funktion f durch eine auf $\overline{B_R(0)}$ konvergente Potenzreihe $\sum a_n z^n$ gegeben, so lässt sich die Formel (17.26) als direkte Konsequenz von (18.1) auffassen:

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+(0)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw &= \int_{C_R^+(0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n-k-1} dw = \int_{C_R^+(0)} \sum_{n=-k-1}^{\infty} a_{n+k+1} w^n dw \\ &= \underbrace{\sum_{n=-k-1}^{-2} a_{n+k+1} \int_{C_R^+(0)} w^n dw}_{=0} + \int_{C_R^+(0)} \frac{a_k}{w} dw + \underbrace{\int_{C_R^+(0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k+1} w^n dw}_{=0 \text{ s. (17.11)}} \\ &= 2\pi i \cdot a_k \end{aligned} \quad (18.2)$$

da der Rest der Potenzreihe eine holomorphe Funktion darstellt.

· Und noch ein Physiker-Argument für (18.1): Das Integral ist wegen der im Beweis von 17.4 benutzten Version von (i) unabhängig von R , andererseits transformiert sich der Integrand unter der Substitution $w \rightarrow Rw$ mit einem Faktor R^{n+1} . Das Integral kann also nur für $n = -1$ von null verschieden sein.

Definition 18.1. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und zwei komplexe Folgen $(a_n)_{n=0,1,\dots}$, $(a_{-n})_{n=1,2,\dots}$ heisst das Paar von Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (18.3)$$

Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt z_0 . Sie heisst konvergent, wenn beide Reihen in (18.3) getrennt konvergieren. In diesem Fall ist der Wert der Laurent-Reihe die Summe der Grenzwerte. Man schreibt für die Laurent-Reihe bzw. ihre Werte auch $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

· Gemäss 5.19, (5.45) konvergiert die Reihe mit positiven Potenzen von $z - z_0$ für

$$|z - z_0| < R := (\limsup |a_n|^{1/n})^{-1} \quad (18.4)$$

und analog die mit negativen Potenzen für

$$|z - z_0|^{-1} < S^{-1} := (\limsup |a_{-n}|^{1/n})^{-1} \quad (18.5)$$

und nach Anwendung von Proposition 11.3 folgt daraus, dass die Laurent-Reihe $L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ auf dem Kreisring

$$A_{R,S}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid S < |z - z_0| < R\} \quad (18.6)$$

konvergiert, dort eine holomorphe Funktion darstellt, und gliedweise abgeleitet werden darf. (Interessant ist dies natürlich eigentlich nur dann, wenn $S < R$.) Ein wesentlicher Unterschied zu Potenzreihen ist, dass Laurent-Reihen mit $a_{-1} \neq 0$ auf ihrem Konvergenz-Kreisring keine Stammfunktion besitzen.

Beispiel: Für $|z| > 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{1 - z}$

· Für $|z| > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

Umgekehrt gilt aber auch:

Proposition 18.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\infty \geq R > S \geq 0$ mit $A_{R,S}(z_0) \subset U$. (Im Allgemeinen muss z_0 nicht in U sein!) Dann besitzt f eine für alle $z \in A_{R,S}(z_0)$ konvergente Entwicklung in eine Laurentreihe:

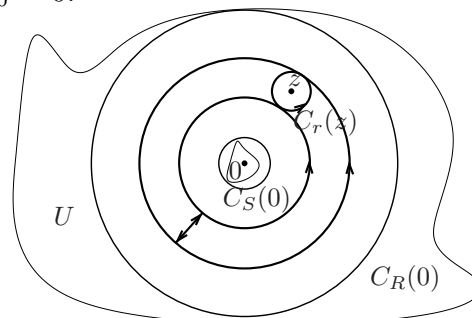
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in A_{R,S}(z_0) \quad (18.7)$$

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit halber $z_0 = 0$.

Sei $r > 0$ so, dass $\overline{B_r(z)} \subset A_{R,S}(0)$. Dann gilt nach 17.4

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (18.8)$$

Durch Nachahmen von (17.13) anhand der Skizze wird dies gleich



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{|z|+r}^+(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{|z|-r}^+(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (18.9)$$

Im ersten Integranden gilt $|z| < |w|$, d.h. $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$ im zweiten $|z| > |w|$ und $\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{w^{n+1}}$. Mit dem gleichen Konvergenzargument wie im Beweis von 17.5 folgt die Behauptung, wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} \int_{C_{|z|+r}^+(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw & n \geq 0 \\ \int_{C_{|z|-r}^+(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw & n < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (18.10)$$

für jedes $S < \rho < R$, da die Integrale von solchen ρ unabhängig sind. □

§ 18. RESIDUENSATZ

Mit Zuversicht erweitern wir nun erstmals unseren Begriff von Funktionen auf solche, die streng genommen gar nicht überall definiert sind.

Definition 18.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine *holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten* auf U ist eine endliche oder abzählbare Teilmenge $\{z_1, z_2, \dots\}$ von (verschiedenen) Punkten $z_i \in U$, welche keinen Häufungspunkt in U hat, zusammen mit einer holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_1, z_2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$.

· Aus der Tatsache, dass die Ausnahmemenge $\{z_1, z_2, \dots\}$ keinen Häufungspunkt in U hat, folgt, dass für jedes z_i ein $R_i > 0$ existiert so, dass $B_{R_i}(z_i) \subset U$ und f auf der “punktierten Scheibe” $B_{R_i}(z_i) \setminus \{z_i\}$ definiert und holomorph ist. Aus 18.2 folgt dann, dass f auf $B_{R_i}(z_i) \setminus \{z_i\} = A_{R_i,0}(z_i)$ durch eine Laurentreihe dargestellt wird, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(i)}(z - z_i)^n \quad \forall z \in B_{R_i}(z_i) \setminus \{z_i\} \quad (18.11)$$

Man nennt dabei

$$H_i(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(i)}(z - z_i)^n \quad (18.12)$$

den *Hauptteil* der Laurentreihe ($\sum_{n=0}^{\infty}$ den Nebenteil), und

$$a_{-1}^{(i)} =: \text{Res}_{z_i}(f) \quad (18.13)$$

das *Residuum* von f in z_i . Gemäss (18.10) gilt nämlich

$$\text{Res}_{z_i}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+(z_i)} f(w) dw \quad (18.14)$$

für alle $0 < \rho < R_i$ (was man aber für die Berechnung selten benutzt).

· Verschwindet der Hauptteil, d.h. gilt $a_n^{(i)} = 0 \forall n < 0$, so nennt man die zugehörige Singularität *hebbar*. Das ist genau dann der Fall, wenn sich f in z_i holomorph fortsetzen lässt. (Es liegt also gar keine Singularität vor.)

· Ist der Hauptteil endlich, d.h. gilt für ein $k_i > 0$ $a_n^{(i)} = 0$ für $n < -k_i$ und $a_{-k_i}^{(i)} \neq 0$, so nennt man die zugehörige Singularität einen *Pol der Ordnung k_i* .

· Ist der Hauptteil unendlich, so heisst die Singularität *wesentlich* (oder auch “von unendlicher Ordnung”).

· Im Folgenden interessieren uns nur Pole endlicher Ordnung. Eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten auf U , welche allesamt Pole (sc. endlicher Ordnung) sind, heisst *meromorphe Funktion* auf U .

· Bei meromorphen Funktionen macht es Sinn, den Wertebereich von \mathbb{C} auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu erweitern und den Polen formal den Wert ∞ zuordnend $f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu schreiben.

Diese Vorbereitungen versetzen uns nun in die Lage, eine für alle praktischen Zwecke hinreichende Version des Residuensatzes zu formulieren. Zuvor noch eine Formel zur Berechnung von Residuen meromorpher Funktionen, welche direkt aus der Laurententwicklung und der Taylorformel (17.26) herzuleiten ist.

Lemma 18.4. *Ist $z_0 \in U$ ein Pol der Ordnung k einer meromorphen Funktion f auf U , so gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} ((z - z_0)^k f(z)) \quad (18.15)$$

Persönlich finde ich das direkte Einsetzen von Potenzreihen ineinander ökonomischer, da es die für die Benutzung der Formel (18.15) sowieso benötigte Ordnung der Polstelle gleich mitliefert.

Beispiel: Für kleines z ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(\exp(z) - 1)} &= \frac{1}{z(z + \frac{z^2}{2} + \dots)} = \frac{1}{z^2 + \frac{z^3}{2} + \dots} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \dots} \\ &= \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2) \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(1) \\ \Rightarrow \operatorname{Res}_0 \frac{1}{z(\exp(z) - 1)} &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (18.16)$$

Theorem 18.5. *Sei f eine meromorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Dann gilt für jeden positiv orientierten einfach geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ , der mitsamt seinem Inneren ganz in U liegt und nicht die Pole von f trifft,*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{\text{Pole } z_i \text{ im} \\ \text{Inneren von} \\ \gamma}} \operatorname{Res}_{z_i}(f) \quad (18.17)$$

Bemerkungen. Der in der Aussage vorkommende Begriff des “Inneren” eines einfach geschlossenen Wegs kann mit Hilfe der Windungszahl (17.32) sauber definiert werden. In den Anwendungen ist es aber wichtiger, sich über die Orientierung Rechenschaft abzulegen. Es sei auch darauf hingewiesen, dass wir im Beweis die Aussagen (17.11), (17.30) benutzen, die wir nicht für alle fraglichen Wege streng bewiesen haben.

Beweis. · Zunächst wollen wir begründen, dass die Summe auf der rechten Seite von (18.17) endlich ist: Da γ zusammen mit seinem Inneren beschränkt und abgeschlossen sind (das folgt aus der genauen Definition des “Inneren”, siehe etwa (17.30)), so müssten, falls unendlich viele Polstellen von f im Inneren lägen, diese einen Häufungspunkt in U haben (s. 4.25), im Widerspruch zur Definition einer meromorphen Funktion.

· Es seien für $r \in \mathbb{N}$ (oder allenfalls 0) $z_1, \dots, z_r \in U$ die Polstellen von f im Inneren von γ , und für $i = 1, \dots, r$

$$H_i(z) = \sum_{n=-k_i}^{-1} a_n^{(i)} (z - z_i)^n \quad (18.18)$$

$a_n^{(i)} \in \mathbb{C}$, der Hauptteil von f am i -ten Pol. $H_i(z)$ ist eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit einem Pol bei z_i , insbesondere holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$.

§ 18. RESIDUENSATZ

· In einer Umgebung eines jeden z_i verschwindet dann der Hauptteil von

$$\tilde{f}(z) := f(z) - \sum_{i=1}^r H_i(z) \quad (18.19)$$

so dass sich \tilde{f} zu einer holomorphen Funktion auf einer Umgebung von γ mitsamt seinem Inneren fortsetzen lässt. Aus (17.11) folgt $\int_{\gamma} \tilde{f}(w)dw = 0$ und daher

$$\int_{\gamma} f(w)dw = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma} H_i(w)dw \quad (18.20)$$

· Nun ist für jedes i

$$\int_{\gamma} \sum_{n=-k_i}^{-2} a_n^{(i)} (z - z_i)^n = 0 \quad (18.21)$$

denn der Integrand besitzt auf ganz \mathbb{C} die Stammfunktion

$$\sum_{n=-k_i}^{-2} \frac{a_n^{(i)}}{n+1} (z - z_i)^{n+1} \quad (18.22)$$

Es folgt

$$\int_{\gamma} f(w)dw = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^{(i)}}{w - z_i} dw \stackrel{(17.30)}{=} 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^r \text{Res}_{z_i}(f) \quad (18.23)$$

□

Bemerkungen. Die Verallgemeinerung von ?? für einen nicht notwendig einfach geschlossenen Weg γ , der sich in U zu einem Punkt zusammenziehen lässt und die isolierten Singularitäten der (sonst) holomorphen Funktion f auf U vermeidet, lautet

$$\int_{\gamma} f(w)dw = 2\pi i \cdot \sum_i \text{Res}_{z_i}(f) \cdot W(\gamma, z_i) \quad (18.24)$$

wobei in der Summe die Windungszahl (17.32) weiter nur für endlich viele Singularitäten z_i von null verschieden ist.

Auswertung reeller Integrale

Die folgenden Beispiele enthalten als gemeinsame Zutaten:

(1) die Identifikation eines gegebenen reellen Integrals als Kurvenintegral einer meromorphen Funktion. Dabei muss der reelle Integrand nicht unbedingt “erhalten” bleiben, sondern kann als Real-/Imaginärteil, oder auch eine sonstige Linearkombination von komplexen Integranden auftauchen.

(2) das Schliessen der Wege in der komplexen Ebene unter Berücksichtigung von (3). Bei uneigentlichen Integralen werden häufig Grenzwerte über Familien von Wegen gebildet.

(3) das Abschätzen von bei (2) eingeführten zusätzlichen Beiträgen, gegebenenfalls mit einer Anpassung der gewählten Schliessung.

(4) die Auswertung des geschlossenen Kurvenintegrals mit dem Residuensatz.

Die genauen Rezepte der gängigen Klassen unterscheiden sich allerdings in den Details, was man am besten durch eigenes Ausprobieren schätzen lernt.

Beispiel 18.6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > |b|$. Dann erkennen wir in

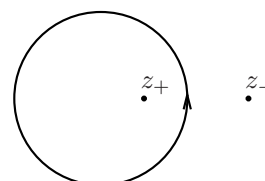
$$I(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos \varphi} d\varphi \quad (18.25)$$

die Parametrisierung eines Integrals über den positiv orientierten Einheitskreis

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{b}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} \frac{1}{i} e^{-i\varphi} \frac{d}{d\varphi} e^{i\varphi} = \frac{1}{i} \int_{C_1^+(0)} \frac{1}{a + \frac{b}{2}(w + w^{-1})} \cdot \frac{1}{w} dw \quad (18.26)$$

eines auf \mathbb{C} meromorphen Integranden mit Polen bei

$$\frac{b}{2}z^2 + az + \frac{b}{2} = 0 \quad (18.27)$$



Für $b = 0$ ist dies genau der Ursprung mit Residuum 1, d.h.

$$I(a, 0) = \frac{2\pi}{a} \quad (18.28)$$

Für $b > 0$ lösen wir $\frac{b}{2}z^2 + az + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(z - z_+)(z - z_-)$ mit $z_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. Wegen $z_+ - z_- = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \neq 0$ und $z_+z_- = 1$ liegt genau ein Pol (nämlich z_+) in $B_1(0)$, und das Residuum dort ist

$$\lim_{z \rightarrow z_+} \frac{z - z_+}{\frac{b}{2}(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{1}{\frac{b}{2}(z_+ - z_-)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (18.29)$$

Es folgt

$$I(a, b) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (18.30)$$

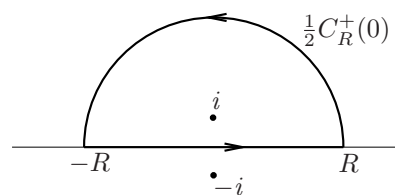
(was bei $b \rightarrow 0$ noch in (18.28) übergeht).

Beispiel 18.7. Das uneigentliche Integral (vgl. (14.34))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1 + x^2} dx \quad (18.31)$$

dessen Konvergenz man durch Vergleich mit $\int_1^{\infty} 1/x^2$ leicht verifiziert, und das sich auch elementar berechnen lässt, betrachten wir als den Grenzwert eines komplexen Kurvenintegrals von $-R$ nach R der auf \mathbb{C} meromorphen Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ mit Polen bei $\pm i$.

Alsdann schliessen wir den Weg durch einen Halbkreis in der oberen Halbebene, auf dem (für $R > 1$)



$$\left| \frac{1}{1 + w^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \quad (18.32)$$

so dass durch Standardabschätzung

$$\left| \int_{\frac{1}{2}C_R^+(0)} \frac{1}{1 + w^2} dw \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (18.33)$$

§ 18. RESIDUENSATZ

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}_i \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \quad (18.34)$$

Beispiel 18.8. Das Integral

$$S := \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (18.35)$$

ist Prototyp einer Klasse, die in der kanonischen Mechanik als Wirkungs- oder Periodenintegrale eine grosse Rolle spielen. Zur seiner Berechnung schieben wir (ganz unintuitiv) als erstes das Integral hinaus in die komplexe Ebene, d.h. wir schreiben unter Berufung auf 14.8

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{1-(x-i\epsilon)^2} dx \quad (18.36)$$

wobei $\sqrt{\cdot}$ die auf S. 128 diskutierte Fortsetzung der Wurzelfunktion in die komplexe Ebene ist: $\sqrt{1-z^2} > 0$ für $1-z^2 > 0$, d.h. $z \in (-1, 1)$, und nicht definiert für $z \in [1, \infty) \cup (-\infty, -1] \subset \mathbb{C}$. Nach dem Hinausschieben ändert sich dann nichts, wenn wir den Integranden durch $i\sqrt{z^2-1}$ ersetzen, wo jetzt $\sqrt{z^2-1} > 0$ für $z > 1$, $\sqrt{z^2-1} < 0$ für $z < -1$, und nicht definiert für $z \in [-1, 1]$. Nach dem Rotieren des Schnitts ist also

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} i\sqrt{w^2-1} dw \quad (18.37)$$

oder bildlich

$$\int \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} -1 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} \\ [-1, 1] - i\epsilon \end{array} = \int \begin{array}{c} -1 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} \\ [-1, 1] - i\epsilon \end{array}$$

Nun unterscheidet sich der Integrand auf der gegenüberliegenden Seite des Schnittes im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ gerade durch ein Vorzeichen, sodass

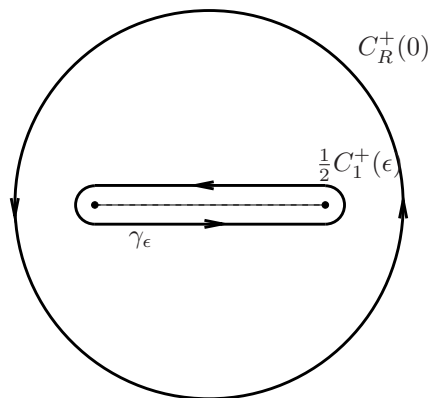
$$S = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} i\sqrt{w^2-1} dw - \int_{-1+i\epsilon}^{1+i\epsilon} i\sqrt{w^2-1} dw \right) \quad (18.38)$$

Auf den kleinen Halbkreisen $\frac{1}{2}C_{\pm 1}^+(\epsilon)$ bleibt im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ der Integrand beschränkt, sodass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}C_{\pm 1}^+(\epsilon)} i\sqrt{w^2-1} dw = 0 \quad (18.39)$$

Es folgt durch Schliessen des Weges

$$S = \frac{i}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \sqrt{w^2-1} dw \quad (18.40)$$



Nun liegt aber ein Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vor, sodass dieses unabhängig von ϵ ist, und auch gleich dem Integral über den Kreis $C_R^+(0)$ für $R > 1$. Es konvergiert dort die Entwicklung

$$\sqrt{w^2 - 1} = w - \frac{1}{2w} - \frac{1}{8w^3} + \dots \quad (18.41)$$

die wir gliedweise integrieren können, um als Endergebnis

$$S = \frac{i}{2} \int_{C_R^+(0)} \left(w - \frac{1}{2w} - \frac{1}{8w^3} + \dots \right) dw = \frac{i}{2} \int_{C_R^+(0)} \frac{-1}{2w} dw = -\frac{i}{2} \cdot \frac{2\pi i}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (18.42)$$

zu erhalten. (Auch dieses Integral geht natürlich mit elementaren Mitteln...)

Beispiel 18.9. Das Gausssche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (18.43)$$

spielt eine grundlegende Rolle unter anderem in der Fouriertransformation, der Wellenmechanik, der Wahrscheinlichkeitstheorie und dem Pfadintegralzugang zur Quantenfeldtheorie. Es gibt eine Vielzahl von Tricks zur Berechnung von (18.43), von denen der Residuensatz einer der weniger bekannten (und auch wenigst offensichtlichen) ist. Andererseits ist die Methode ziemlich rein ein-dimensional⁷, sodass wir sie hier vorführen können.

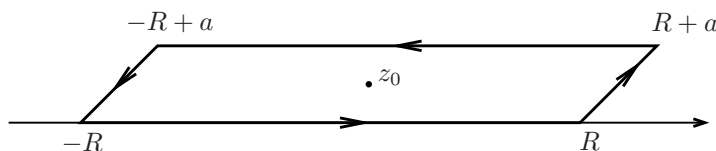
Wir setzen unser Vorwissen über das Ergebnis ein in die Zahl

$$a := \sqrt{\pi} e^{\pi i/4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i) \quad \text{mit der Eigenschaft} \quad a^2 = \pi i \quad (18.45)$$

Dann erfüllt die auf \mathbb{C} meromorphe Funktion $f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} f(z) - f(z + a) &= \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} - \frac{e^{-z^2 - 2az - a^2}}{1 + e^{-2az - 2a^2}} = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} - \frac{e^{-z^2 - 2az - \pi i}}{1 + e^{-2az - 2\pi i}} \\ &= \frac{e^{-z^2}(1 + e^{-2az})}{1 + e^{-2az}} = e^{-z^2} \end{aligned} \quad (18.46)$$

Wir betrachten nun für $R > 0$ das Integral von f über den Rand $\square(R)$ des Parallelogramms mit den Ecken $-R, R, R + a, -R + a$.



⁷Die schnellste Methode wertet das Quadrat des Integrals durch zwei-dimensionale Integration in Polarkoordinaten aus:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \quad (18.44)$$

§ 18. RESIDUENSATZ

Einerseits enthalten dann wegen (18.46) die langen Seiten das gewünschte Integral:

$$\int_{-R}^R f(w)dw + \int_{R+a}^{-R+a} f(w)dw = \int_{-R}^R f(x)dx - \int_{-R}^R f(x+a)dx = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \quad (18.47)$$

Auf der rechten kurzen Seite ist mit $w = R + ta$, $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |e^{-2aw}| &= e^{\operatorname{Re}(-2a(R+ta))} = e^{-R\sqrt{2\pi}} \\ \text{und } |e^{-w^2}| &= e^{-\operatorname{Re}(R+ta)^2} = e^{-R^2 - tR\sqrt{2\pi}} \leq e^{-R^2} \end{aligned} \quad (18.48)$$

und daher gilt für R gross genug

$$\left| \frac{e^{-w^2}}{1 + e^{aw}} \right| \leq \frac{e^{-R^2}}{1 - e^{-R\sqrt{2\pi}}} \longrightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \quad (18.49)$$

Nach einer analogen (bitte nachzuprüfenden) Abschätzung auf der linken kurzen Seite von $\square(R)$ folgt mittels Standardabschätzung des Integrals

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_R^{R+a} f(w)dw + \int_{-R+a}^{-R} f(w)dw \right) = 0 \quad (18.50)$$

Andererseits liegen die Pole von $f(z)$ bei $-2az_n = (2n+1)\pi i = (2n+1)a^2$ für $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $z_n = \frac{2n+1}{2}a$. Im Inneren des Parallelogramms befindet sich genau $z_0 = \frac{a}{2}$, und das Residuum ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{e^{-z_0^2}}{\frac{d}{dz} \Big|_{z=z_0} (1 + e^{-2az})} = \frac{e^{-\pi i/4}}{-2ae^{-a^2}} = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \quad (18.51)$$

Es folgt aus obigen Beziehungen und dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\square(R)} f(w)dw = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_0} f = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (18.52)$$

wie behauptet. □

KAPITEL 6. FUNKTIONENTHEORIE

KAPITEL 7

SYMMETRIEN

§ 19 Multi-lineare Algebra

Sei \mathbb{K} ein Körper (s. Def. [1.1](#)).