Fortsetzung vom 22.11.2016

Satz + Def: kompakte Mengen (vergleiche auch mit der Plenarübung vom 22.11.)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) Folgenkompaktheit: K ist folgenkompakt. (vgl. S. 49 im HöMa 2-Skript)

2) (Überdeckungs-)kompakt: Sei I ein Indexmenge, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen $\forall i \in I$, sodass

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{, dann gibt es eine endl. TM } J \subset I: K \subset \bigcup_{j \in J} U_j.$$

3) Heine-Borel: K ist beschränkt und abgeschlossen.

Bew.: siehe letztes Mal. □

Beispiele:

- Heine-Borel charakterisiert anschaulich alle kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (vollständiger normierter Vektorraum endlicher Dimension)
- In allgemeinen Räumen finden obige Äquivalenzen keine Gültigkeit.

  z.B.: $V = \ell^2(\mathbb{R}) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ Folgen} \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < \infty\}$.

  $3) \not\Rightarrow 1)$

  Wir haben $\dim(\ell^2(\mathbb{R})) = \infty$. V ist vollständig und normiert mit

  $$\|(x_i)_{i \in \mathbb{N}}\| := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2\right)^{1/2}.$$

  Der Ball $\overline{B_1(0)} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$

  ist abgeschlossen und beschränkt, aber die Folge

  $e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}} \in \overline{B_1(0)}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

- $f: X \to Y$ stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. $K \subset X$ erfülle die Bedingung der Überdeckungskompaktheit. Dann erfüllt auch $f(K) \subset Y$ diese Bedingung: (im Folgenden: "kompakt" $\triangleq$ "überdeckungskompakt")

Bew.: Wir wollen von der Kompaktheit von K auf die Kompaktheit des Bildes schließen: Sei $V_i \subset Y$ offen, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge), sodass $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$. Da f stetig ist $U_i := f^{-1}(V_i) \subset X$ offen $\forall i \in I$ und es gilt $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Verwende nun Kompaktheit von K: $\exists J \subset I$ endl. mit $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Insbesondere ist $(V_j = f(U_j))_{j \in J}$ eine endl. Teilüberdeckung der Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ $\square$

Erweiterung des Integrals durch monotone Konvergenz

Ziel: • Ausdehnung des Integralbegriffs auf "allgemeinere" Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Werkzeug: Als Grundlage soll der Integralbegriff $C_c(\mathbb{R}^n)$ dienen.

Vorgehen: Hierzu wollen wir diese "allgemeineren" Funktionen geeignet durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ approximieren, sodass die dazugehörigen Integralwerte eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ bilden.

Hinweis: - Die gleichmäßige Konvergenz ist dafür nicht geeignet, denn jede Grenzfunktion gleichmäßig konvergenter Folgen in $C_c(\mathbb{R}^n)$ ist stetig! (Sehr leicht mit der Dreiecksungleichung.) Der Raum der stetigen Funktionen kann so nicht verlassen werden.

- Punktweise Konvergenz ist ebenfalls nicht geeignet, vgl. Aufgabe 6.4 (b).

Zentrale Idee:

Definition (Monotone Konvergenz)

Eine Folge $(f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen heißt monoton (nach oben) konv. gegen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (kurz $f_n \uparrow f$), wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f_j(x) \le f_{j+1}(x) & \forall j \in \mathbb{N} \quad (\text{kurz: } f_j \le f_{j+1}) \\ f_k(x) \longrightarrow f(x), & k \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Speziell für stetige Funktionen auf kompakten Mengen wird glm. Konvergenz durch monotone impliziert! Dies ist gerade der folgende

<u>Satz</u> (Satz von Dini) (Skript S. 54)

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $(f_m : K \to \mathbb{R})_{m\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen, mit : $f_m \uparrow 0$.

Dann konv $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0.

<u>Bemerkung</u>: Für obigen Satz sind alle Voraussetzungen notwendig.

Für jeweilige Gegenbeispiele vgl. Aufgabe 5.2.

Ein Indiz dafür, dass uns die monotone Konvergenz zum (eingangs definiert) Ziel führt ist Prop. 21.7: Die <u>Integrale</u> monoton konvergenter, stetiger Funktionen mit stetiger Grenzfunktion f konv. gegen den Wert $\int f(x)dx$. Dies führt zum Begriff der monotonen Hüllen von $C_c(\mathbb{R}^n)$: Sei $\mathcal{V} := C_c(\mathbb{R}^n)$ (wie im Skript)

<u>Def</u>:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gehört zum Kegelverband $\mathcal{V}^+$, falls es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow f$.

<u>Analog</u>: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \in \mathcal{V}^- \Leftrightarrow -f \in \mathcal{V}^+$.

Bemerkungen: 1) $C_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{V}^+$,

2) $\mathcal{V}^+$ enthält ein "größtes" Element: Die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$x \mapsto \infty$ lässt sich monoton durch stetige Funktionen

$$f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -|x| + k, & \text{falls } |x| \leq k \\ 0, & \text{falls } |x| > k \end{cases}$$

mit komp. Träger approximieren.

3) Analog zu $C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt für $f, g \in \mathcal{V}^+$:

$\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{V}^+$.

Def. (Fortsetzung des Integrals I auf $\mathcal{V}^+$)

Sei $f \in \mathcal{V}^+$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ mit $f_k \uparrow f$. Das Integral von f ist definiert durch

$$I^+(f) := \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

welches (natürlich) unabhängig von der Wahl von $(f_k)_k$ ist (Wie der Beweis zu Prop. 21.11 zeigt.). In der Tat stimmt obige Def. genau mit Gl (21.65) im Skript überein.

- Die Beziehung $\mathcal{V}^- = -\mathcal{V}^+$ lässt sich für $f \in \mathcal{V}^-$ die Fortsetzung des Integrals auf $\mathcal{V}$ angeben durch $I^-(f) := -I^+(-f)$.

Wir haben an dieser Stelle bereits das Regel-Integral erweitert, also den Raum der stetigen Funktionen mit komp. Trägern verlassen und das Integral auf $\mathcal{V}^+$ erweitert, d.h. wir können nun unterhalbstetige Funktionen mit eines Vorzeichenbed. für betragsmäßig große Argumente integrieren (vgl. Aufgabe 7.3 (d)).

Das war der <u>1. Schritt</u> zu einem allg. Integralbegriff

Der <u>2. Schritt</u> besteht nun darin die Klasse der Funktionen $\mathcal{V}^+$ (bzw. $\mathcal{V}^-$) erneut zu verlassen, und zwar so, dass

1) die resultierenden Funktionen nicht nur unterhalbstetig sind, und

2) das Integral endlich (also $\in \mathbb{R}$).

Um dies zu erreichen machen wir wieder Gebrauch von der monotonen Konvergenz.

<u>Aber</u>: Dieses Mal dieses Mal werden nicht die Funktionen monoton approximiert [nach Prop. 21.11 (iii) im Skript würden wir so nicht den den Verband $\mathcal{V}^+$ verlassen], sondern durch monotone Konvergenz der <u>Integrale</u>: Dies führt zur Def. des Ober- und Unterintegrals (vgl. Def 21.15)

Dies führt schließlich zum Ziel: Def (Lebesgue-Integral)

$f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^n)$ heißt integrierbar $\Leftrightarrow$ $\overline{I}(f) := \overline{I}^+(f) = \overline{I}^-(f)$.

Wir schreiben dann $\overline{I}(f) =: \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.