HöMa 3 - Plenarübung 22. 11. 2016

Die Topologie des $\mathbb{R}^n$ – Offene Mengen, stetige Abbildungen, kompakte Mengen, Zusammenhang

Allg. Definition einer Topologie:

Potenzmenge := Die Familie aller Teilmengen von X

X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen.

Dann heißt das Paar $(X, \mathcal{T})$ "topologischer Raum", falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

2) I eine bel. Indexmenge $U_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I$, dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

3) $m \in \mathbb{N}$, $U_k \in \mathcal{T}$ für $k = 1, \dots, m$, dann ist $\bigcap_{k=1}^{m} U_k \in \mathcal{T}$.

Diese Eigenschaften wollen wir für die offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ prüfen. (Behauptung 1)

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen auch "offene Mengen".

Behauptung 1: Sei $\mathcal{T} := \{ U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ offen in } \mathbb{R}^n \}$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(offen: vergl. mit Gl. (21.13) im Skript)

Bew.: 1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ sind offen in $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall r > 0 : B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r \} \subset \mathbb{R}$$

Diese Bedingung ist gleichermaßen für die leere Menge $\emptyset$ erfüllt.

Hier gibt es kein $x \in \emptyset$, daher gilt jede Aussage, die mit "$\forall x \in \emptyset \ \exists \dots$" beginnt.

2) Eine bel. Vereinigung offener Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist offen:

Sei I eine beliebige Indexmenge und zu jedem $i \in I$ sei $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Klar: $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sei $x \in U$ beliebig, dann $\exists i \in I : x \in U_i$. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $r>0$: $B_r(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } U_i \text{ offen}}}{\subseteq} U_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEF. von } U}}{\subseteq} U$. Somit ist U offen.

3) endliche Schnitte offener Mengen sind offen:

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $U_k \subset \mathbb{R}^n$ offen für alle $k \in \{1, \dots, m\}$. Setze $\tilde{U} := \bigcap_{k=1}^{m} U_k$. Sei $x \in \tilde{U}$, dann ist insb. $x \in U_k \ \forall k \in \{1, \dots, m\}$.

Nach Vorauss. gibt es also Radien $r_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$:

$$B_{r_k}(x) \subset U_k \quad \forall k.$$

Setze $\check{r} := \min \{ r_k \mid k \in \{1, \dots, m\} \}$, dann ist

$$B_{\check{r}}(x) \subset \bigcap_{k=1}^{m} B_{r_k}(x) \subset \bigcap_{k=1}^{m} U_k,$$ und damit ist $\tilde{U}$ offen. $\square$

- Obiges Beweis lässt sich genau so auf metrische Räume (X, d) übertragen. Hierbei ersetzt man $\mathbb{R}^n = X$, $\|x-y\| = d(x,y)$. . .
- Auf metrischen Räumen haben wir in HöMA 2 stetige Abbildungen definiert:

Zur Erinnerung: Eine Funktion $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heißt stetig falls es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta := \delta(x, \varepsilon) > 0$ existiert, sodass:

$$\boxed{d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in X}$$ Def 6.2

Äquivalent dazu: Für alle $x \in X$ und jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x).$$ Prop. 6.5

· Die kommende Beh. ist in Wahrheit eine Umformulierung der Def. von Stetigkeit. Auch hier lässt sich der Beweis auf den Fall fast Wort für Wort auf den metrischen Fall übertragen; X, Y nehmen hier die Rolle der metr. Räume an:

<u>Behauptung 2:</u> Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jeweils offene Mengen.

Eine Funktion $f: X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn Urbilder offener Mengen von Y offen in X sind, d.h. m.a.W.:

$\forall\, V \subseteq Y$ offen gilt: $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$ offen.

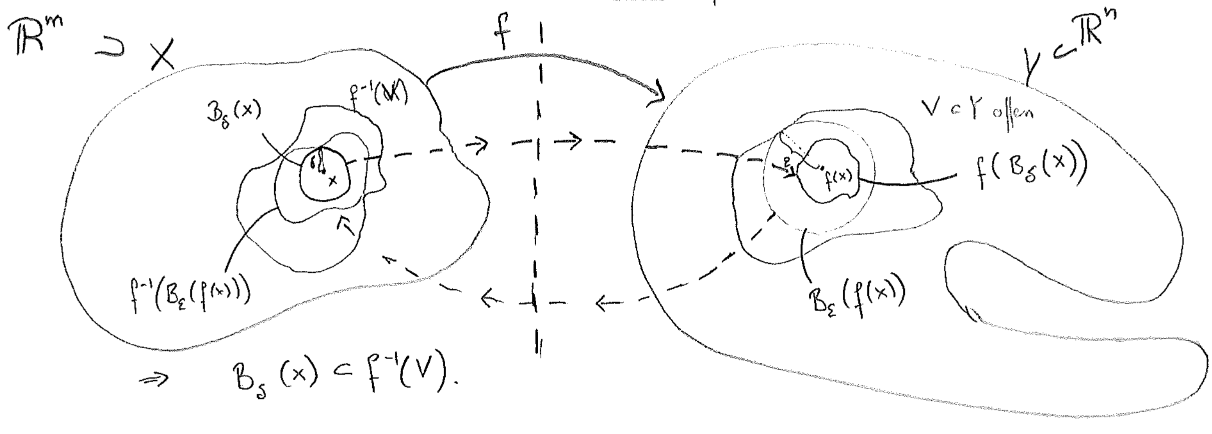
<u>Bew.:</u> „$\Longrightarrow$": Sei $f: X \to Y$ stetig und $V \subset Y$ offen. Ist $f^{-1}(V) = \emptyset$, so sind wir fertig, da $\emptyset$ immer offen. OE: $U := f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Sei
"ohne Einschränkung"
$x \in U$ und $f(x) \in V$. N.V. ist V offen, also gibt es insbesondere ein $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Sei nun δ wie in der Def. der Stetigkeit gewählt: $\delta := \delta(x, \varepsilon)$.

Dann folgt für alle $y \in B_\delta(x)$

(aufgrund der Def. des δ-Balls um x und der Stetigkeit von f), dass $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$.

Also gilt $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(V) \quad \forall\, y \in B_\delta(x)$

$\Longleftrightarrow \boxed{B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)}$.



„$\Leftarrow$": Seien Urbilder offener Mengen unter f offen. Wir wollen zeigen, dass dann f stetig ist. Sei also $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Es ist $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ offen und nach Voraussetzung ist $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset X$ offen mit $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, d.h. es gibt ein $\delta > 0$: $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

M.a.W.:

$$\|x-y\| = d_X(x,y) < \delta \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} y \in B_\delta(x) \Longrightarrow y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$$

$$\overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \|f(x)-f(y)\| = d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

$\square$

<u>Satz + Def</u>: (kompakte Mengen)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) <u>Folgenkompaktheit</u>: K ist folgenkompakt (vgl. S. 49 im HöMA 2-Skript), d.h.
Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit GW in K!)

2) <u>(Überdeckungs-)kompakt</u>: Jede bel. Überdeckung von K durch offene Mengen enthält eine endl. Teilüberdeckung von K, d.h.:
Sei I bel. Indexmenge, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen, sodass $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, dann gibt es bereits eine <u>endl.</u> TM $J \subset I$: $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

3) <u>Heine-Borel</u>: K ist <u>beschränkt</u> und <u>abgeschlossen</u>, d.h.:

Beschränktheit: $\exists R > 0 \ \forall \vec{x} \in K: \ \|x\| \le R$.

Abgeschlossenheit: $\mathbb{R}^n \setminus K$ ist offen.

K heißt kompakt, falls einer der äquiv. Bed. 1)-3) erfüllt ist.

Bemerkung: · Die obige Äquivalenz gilt nur in endlich-dim. reellen Vektorräumen ausgestattet mit der euklidischen Metrik $\|-\| = \sqrt{\langle -,- \rangle}$.

· z.B. Sind abg. + beschränkte Mengen in unendl.-dim. eukl. Vektorräumen nicht folgenkompakt.

Beweis des Satzes:

1) $\Rightarrow$ 3): Wir verwenden hier Thm. 7.5. wobei wir die Abb. $\|\cdot\|: K \longrightarrow \mathbb{R}$ als stetige Abb. identifizieren.

[In der Tat: sei $x \in K$, $\varepsilon > 0$ bel. Setze denn $\varepsilon =: \delta > 0$, dann gilt $\forall y \in K$: Aus $\|x-y\| < \delta = \varepsilon$

$$\Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| < \varepsilon. \quad]$$

Damit ist im Kontext von Thm 7.5 $\|K\| = \{\|x\| \mid x \in K\}$ eine beschränkte Menge und $\|K\| \subseteq [m, M]$. Nach Bem. 2 sind Urbilder abg. Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen, also ist ins. $\|\cdot\|^{-1}([m, M])$ abg.

3) => 2): Sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von K und K abg + besch. Ang. es gäbe keine endl. Teilüberdeckung. Da K beschränkt, gibt es einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, $Q = [-R, R] \times \ldots \times [-R, R]$, sodass $K \subset Q$. Wir zerlegen K in 2^n Quadrate der halben Kantenlänge. Unter diesen kleineren Quadern muss es aber einen geben, gen. Q_1 in $\{U_i \mid i \in I\}$ keine endl. Teilüberdeckung findet. Diesen zerlegen wir in gleicher Weise in 2^n Quadrate der halben Kantenlänge

$\boxed{n = \dim \mathbb{R}^n}$ hier geht die Dim. des Vektorraums ein.

und finden einen kleineren Quader Q_2, der keine endl. TÜ in

$\{U_i \mid i \in I\}$ zulässt, u.s.w..

Wir erhalten eine absteigende Kette von Quadern:

$$Q \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \dots$$

Wähle $x_k \in \underbrace{Q_k \cap K}_{\neq \emptyset}$ bel., dann ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge

Der Grenzwert $x := \lim_{k \to \infty} x_k \in \mathbb{R}^n$ liegt aber in K, da K abgeschlossen.

Damit enthält der Ball $B_\varepsilon(x)$ fast alle Folgenglieder von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

und fast alle Q_k. Insb. gibt es eine offene Menge U_i, $i \in I$,

mit $x \in U_i$ und somit ex ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_i$ $\lightning$.

$\Rightarrow$ $\{U_i \mid i \in I\}$ enthält eine endl. Überdeckung von K.

<u>2) $\Rightarrow$ 1)</u>: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K und $\varepsilon > 0$ bel.

Setze $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (offen in $\mathbb{R}^n$)

und $U_k := B_\varepsilon(x_k)$, dann ist

$K \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$, also $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K.

N.V. enthält $\{U_k\}$ eine endl. Teilüberdeckung von K,

etwa: $\exists m \in \mathbb{N}$: $K \subset \bigcup_{k=0}^{m} U_k$. Nach dem "Schubfachprinzip"

muss es mind. ein $\tilde{k} \in \{1, m\}$ geben, sodass $U_{\tilde{k}}$ fast

alle Folgenglieder enthält, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ also eine konv. TF.

besitzt (da ε bel. gewählt). $\square$

Bem: $f: X \to Y$ stetige Abb. zwischen metr. Räumen

$K \subset X$ kompakt (im Sinne der Überdeckungskompaktheit). Dann ist

$f(K) \subset Y$ kompakt.

Bew.:

$\square$

Def: (zusammenhängende Mengen)

$D \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. D heißt <u>zusammenhängend</u>, falls

es <u>keine</u> offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit:

1) $U \cap V = \emptyset$, 2) $U \cap D, V \cap D \neq \emptyset$, 3) $(U \cap D) \cup (V \cap D) = D$.

Def.: (wegzusammenhängend)

$D \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in D$ eine

stetige Abb $p: [0,1] \to D$ gibt mit $p(0) = x$ und $p(1) = y$.

Bsp.: • wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend