Plenarübung

Das Tensorprodukt

Sei K ein Körper (hier: $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), V, W K-Vektorräume sowie E ein K-Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung

$$\Phi \colon V \times W \to E.$$

Idee: Definiere einen Vektorraum T in Abhängigkeit von V, W sodass jede bilineare Abbildung $\Phi \colon V \times W \to E$ eine *umkehrbar eindeutige* K*-lineare* Abbildung $\Psi \colon T \to E$ induziert.

Definition 1 (Tensorprodukt) Ein Tensorprodukt zweier K-Vektorräume V, W ist ein K-Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau \colon V \times W \to T$, welche die folgende *universelle Eigenschaft* besitzt:
Zu jeder bilinearen Abbildung $\Phi \colon V \times W \to E$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Psi \colon T \to E$ mit $\Phi = \Psi \circ \tau$.

Die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) folgt direkt aus der universellen Eigenschaft: Angenommen es gäbe einen Vektorraum T', der ebenfalls die universelle Eigenschaft erfüllt. Dann dient dieser als Testraum $E = T'$. Rest: Übung.
Das Bild des Paares $(v, w) \in V \times W$ unter τ wird einfach mit $v \otimes w$ bezeichnen, $\tau(v, w) := v \otimes w$. Elemente dieser Bauart heißen *faktorisierbare Tensoren.* Insbesondere sind Tensoren bilinear in beiden Faktoren, da es τ ist, es gilt etwa:

$$(\lambda v + \lambda' v') \otimes (\mu w + \mu' w') = \lambda\mu(v \otimes w) + \lambda\mu'(v \otimes w') + \lambda'\mu(v' \otimes w) + \lambda'\mu'(v' \otimes w'),$$

für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in K$.

Theorem 2 *Das Tensorprodukt $T = V \otimes W$ existiert für alle K- beliebigen Vektorräume V, W.*

Beweis. Wir betrachten $\mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K)$ und bilden den Quotienten

$$\mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K) / L$$

bzgl. dem „kleinsten“ Untervektorraum L, sodass die Restklassen die Eigenschaft von Tensoren haben: Sei also $L \subset \mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K)$ erzeugt von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned}
(\delta_{v+v'}, \delta_w) - (\delta_v, \delta_w) - (\delta_{v'}, \delta_w),\\
(\delta_v, \delta_{w+w'}) - (\delta_v, \delta_w) - (\delta_v, \delta_{w'}),\\
(\delta_{\lambda v}, \delta_w) - \lambda(\delta_v, \delta_w),\\
(\delta_v, \delta_{\mu w}) - \mu(\delta_v, \delta_w),
\end{aligned}$$

für alle $\lambda, \mu \in K$, $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. [Hier ist (δ_v, δ_w) diejenige Abbildung f in $\mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K)$, für die gilt $f(x, y) = 1$ falls $(x, y) = (v, w)$ und $= 0$ sonst. Man beachte, dass die Gesamtheit aller f dieser Gestallt eine Basis von $\mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K)$ bildet. Man vergleiche auch mit Aufgabe 1.4]. Wir setzen nun

$$T := \mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K) / L$$

und müssen zeigen, dass T die *universelle Eigenschaft* für Tensorprodukte erfüllt. Für τ wählen wir die (in gewisser Hinsicht kanonische) Abbildung

$$\tau\colon V \times W \to T, \quad (x, y) \mapsto [(\delta_x, \delta_y)].$$

Sei also $\Phi\colon V \times W \to E$ eine bilineare Abbildung in einen K-Vektorraum E. Diese induziert eine lineare Abbildung ϕ, welche durch Auswertung an den Basiselementen eindeutig festgelegt ist:

$$\phi\colon \mathcal{F}^{\text{fin}}(V \times W, K) \to E, \quad \phi(\delta_v, \delta_w) := \Phi(v, w), \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Aus der Bilinearität von Φ sowie der Definiton von L folgt, dass $L \subset \ker(\phi)$. Aus dem Homomorphiesatz folgt nun, dass ϕ eine lineare Abbildung

$$\Psi\colon T \to E$$

induziert mit $\Phi = \Psi \circ \tau$. Damit ist Ψ eindeutig festgelegt, denn

$$\Psi([(\delta_v, \delta_w)]) = \Psi(\tau(v, w)) = \Phi(v, w) \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Also ist Ψ auf einem Erzeugendensystem von T eindeutig festgelegt und damit insgesamt eindeutig. □

Bemerkung 3
- Jedes Element $z \in V \otimes W$ lässt sich als endliche Summe von faktorisierbaren Tensoren schreiben, etwa $z = \sum_{i=1}^N v_i \otimes w_i$. Dies sieht man beispielsweise dadurch, dass der Unterraum $U \subseteq V \otimes W$, der von allen endlichen Summen faktorisierbarer Tensoren aufgespannt wird, selbst die universelle Eigenschaft erfüllt und somit mit $V \otimes W$ übereinstimmen muss.

- Seien V und W endlichdimensional der Dimension n respektive m. Seien $\{e_i \,|\, i = 1, \dots, n\}$ und $\{\epsilon_j \,|\, j = 1, \dots, m\}$ Basen von V und W. Dann ist

  $$\{e_i \otimes \epsilon_j \,|\, i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}$$

  eine Basis von $V \otimes W$, insbesondere ist $\dim(V \otimes W) = n \cdot m$. Seien $v = \sum_{\nu=1}^n v^\nu e_\nu \in V$ und $w = \sum_{\mu=1}^m w^\mu e_\mu \in W$ Vektoren mit $v^\nu, w^\mu \in K$. Der faktorisierbare Tensor $v \otimes w$ lässt sich dann in der Form

  $$v \otimes w = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m v^\nu w^\mu e_\nu \otimes \epsilon_\mu \tag{1}$$

  schreiben.

Tensorprodukt von Hilberträumen

Zunächst benötigen wir ein hermitesches inneres Produkt $\langle -, - \rangle_\otimes$ auf

$$\mathcal{H} := H_1 \otimes H_2$$

induziert durch die inneren Produkte $\langle -,-\rangle_1$ auf H_1 und $\langle -,-\rangle_2$ auf H_2. Sei $\{e_k\}$ eine Hilbertraumbasis von H_1 und $\{\epsilon_\kappa\}$ eine Hilbertraumbasis von H_2. Dann sollte $\{e_k \otimes \epsilon_\kappa\}$ eine Hilbertraumbasis von $\mathcal{H}$ definieren, d.h. insbesondere, dass

$$\langle e_k \otimes \epsilon_\kappa, e_l \otimes \epsilon_\lambda\rangle_\otimes = \delta_{(k,\kappa),(l,\lambda)} = \delta_{k,l}\cdot\delta_{\kappa,\lambda} = \langle e_k, e_l\rangle_1 \cdot \langle \epsilon_\kappa, \epsilon_\lambda\rangle_2.$$

Wir setzen also

$$\langle -,-\rangle_\otimes \colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}, \quad (v\otimes w, v'\otimes w') \mapsto \langle v,v'\rangle_1\cdot\langle w,w'\rangle_2,$$

und setzen (konjugiert-)linear im (ersten) zweiten Argument fort. Nach Konstruktion des Tensorproduktes reicht dies aus, da die Menge $\{v\otimes w \,|\, v\in H_1,\, w\in H_2\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{H}$ bildet. Wie eine Rechnung zeigt, liegt $\operatorname{span}_\mathbb{C}(\{e_k\otimes\epsilon_\kappa\})$ in der Tat dicht in $\mathcal{H}$ (Übung).
Wir wollen hier zeigen, dass das Tensorprodukt zweier Hilberträume nicht notwendigerweise vollständig ist (bzgl. der durch $\langle -.-\rangle_\otimes$ induzierten Norm $\|-\|_\otimes$). Wir wählen hier

$$H_1 = H_2 = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_k |x_k|^2 < \infty \right\},$$

und geben eine Cauchy-Folge an, welche nicht konvergiert. Bekanntlich bildet das System $\{e_k = (\delta_{k,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}\}$ eine Hilbertbasis von $\ell^2(\mathbb{N})$. Sei $x_k\in\ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch

$$x_k = \left(\nu^{-1/2}\delta_{k,\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} = k^{-1/2}\cdot e_k,$$

und sei

$$\xi^{(n)} := \sum_{k=1}^n x_k\otimes x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_k\otimes e_k \in \mathcal{H}.$$

Behauptung. *Die Folge $\left(\xi^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ bildet eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass die angegebene Folge beschränkt ist:

$$\|\xi^{(n)}\|_\otimes^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_k\otimes e_k \right\|_\otimes^2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{kl}\langle e_k\otimes e_k, e_l\otimes e_l\rangle = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{kl}\delta_{k,l} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

somit ist die Folge beschränkt (da $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konvergiert). Die gleiche Rechnung zeigt, dass $(\xi^{(n)})$ eine Cauchy-Folge bildet: Sei ohne Einschränkung $m>n$, dann

$$\|\xi^{(m)}-\xi^{(n)}\|_\otimes^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} e_k\otimes e_k \right\|_\otimes^2 = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \to 0 \quad (m,n\to\infty),$$

was zu zeigen ist. □

Behauptung. $\left(\xi^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert nicht.*

Beweis. Angenommen $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{H}$ mit $\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)} = \xi$. Damit lässt sich ξ schreiben als endliche Linearkombination faktorisierbarer Tensoren:

$$\xi = \sum_{k=1}^{N} v_k \otimes w_k$$

Wir schreiben $v_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_k^\nu e_\nu$ und $w_k = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_k^\mu e_\mu$ (welche konvergente Summen in $\ell^2(\mathbb{N})$ darstellen). Es gilt dann

$$\langle \xi, e_\nu \otimes e_\mu\rangle_\otimes = \sum_{k=1}^{N}\langle v_k \otimes w_k, e_\nu \otimes e_\mu\rangle_\otimes = \sum_{k=1}^{N}\langle v_k, e_\nu\rangle\langle w_k, e_\mu\rangle = \sum_{k=1}^{N}\overline{v_k^\nu w_k^\mu}.$$

Andererseits ist

$$\langle \xi, e_\nu \otimes e_\mu\rangle_\otimes = \lim_{n\to\infty}\langle \xi^{(n)}, e_\nu \otimes e_\mu\rangle = \lim_n \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\langle e_k\otimes e_k, e_\nu \otimes e_\mu\rangle = \begin{cases}\frac{1}{\nu}, & \text{falls } \nu=\mu, \text{ und}\\ 0, & \text{falls } \nu\neq\mu.\end{cases}$$

d.h. wir erhalten die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{N} v_k^\nu w_k^\mu \stackrel{!}{=} \begin{cases}\frac{1}{\nu}, & \text{falls } \nu=\mu, \text{ und}\\ 0, & \text{falls } \nu\neq\mu.\end{cases}$$

Wenn wir die Koeffizienten v_k^ν, w_k^μ als Einträge von Vektoren $v^\nu, w^\mu \in \mathbb{C}^N$ interpretieren so sagt obige Relation, dass $v^\nu, w^\mu \neq 0$ für alle ν,μ und es gilt eine gewisse Orthogonalitätsbedingung. Beispielsweise steht $\overline{w^{N+1}}$ (konjugierte Einträge) orthogonal zum System $\{v^1,\dots,v^N\}$. Insbesondere ist das System $\{v^1,\dots,v^N\}$ linear abhängig bzgl. dem Standard hermiteschem Produkt. Schreiben wir etwa (OE.)

$$v^1 = \sum_{i=2}^{N}\lambda_i v^i, \quad \text{für } \lambda_i \in K,$$

so führt eine skalare Multiplikation mit $\overline{w^1}$ zu einem Widerspruch:

$$1 = \sum_{k=1}^{N} w_k^1 v_k^1 = \langle \overline{w^1}, v^1\rangle = \sum_{i=2}^{N}\lambda_i\langle\overline{w^1}, v^i\rangle = 0.$$

Damit kann die Annahme, dass $(\xi^{(n)})_n$ in ℓ^2 konvergiert, nicht stimmen. □

Partielle Spur

Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume sowiedie bilineare Abbildung

$$\mathrm{tr}_V\colon \hom_K(V,V)\times\hom_K(W,W)\to\hom_K(W,W), \quad \mathrm{tr}_V(A,B) := \mathrm{tr}(A)\cdot B$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts induziert tr_V eine Abbildung Tr_V auf dem Tensorprodukt

$$\mathrm{Tr}_V\colon \hom_K(V,V)\otimes\hom_K(W,W)\to\hom_K(W,W)$$

die für faktorisierbare Tensoren gegeben ist durch $\mathrm{Tr}_V(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \cdot B$ und sich K-linear fortsetzt. Da

$$\begin{aligned}\hom_K(V,V) \otimes \hom_K(W,W) &\cong (V^* \otimes V) \otimes (W^* \otimes W)\\ &\cong (V^* \otimes W^*) \otimes (V \otimes W)\\ &\cong \hom_K(V \otimes W, V \otimes W),\end{aligned}$$

lässt sich Tr_V somit auffassen als lineare Abbildung

$$\mathrm{Tr}_V \colon \hom_K(V \otimes W, V \otimes W) \to \hom_K(W,W).$$