Plenarübung

Die L^p-Räume – Definition und Eigenschaften

Heute wollen wir die sogenannten *Lebesgue-Räume* für Parameter $1 < p < \infty$ einführen und deren Vollständigkeit bzgl. der p-Norm zeigen.

Definition 1 (L^p-Räume) Sei $p \in \mathbb{R}$ eine *reelle* Zahl $1 \leq p < \infty$. Wir definieren:

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ [f] \in {}^{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\!/\!_{\{\text{Nullfunktionen}\}} \;\middle|\; |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \right\}$$

und setzen

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Bemerkung 2 Wir werden im Folgenden anstelle von $[f]$ einfach f schreiben, vergessen dabei aber nicht, dass wir nur einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[f]$ betrachten. Wir werden auch prüfen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf L^p definiert. Das folgende Schema zeigt unser Vorgehen:

$$\begin{gathered} \text{Young-Ungleichung} \\ \Downarrow \\ \text{Hölder-Ungleichung} \\ \Downarrow \\ \text{Dreiecks-Ungleichung von } \|\cdot\|_p \text{ a.k.a.Minkowski-Ungleichung.} \end{gathered}$$

Die Vollständigkeit der $L^p(\mathbb{R}^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ folgt mit Hilfe der in Kapitel 8 entwickelten Integrationstheorie, der Beweis verwendet den Satz über monotone Konvergenz von *Beppo-Levi*, sowie den Satz der majorisierten Konvergenz von *Lebesgue*.

Notation. Sei $1 < p < \infty$, dann heißt q der *duale Exponent* zu p, falls

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{1}$$

Insbesondere gilt $1 < q < \infty$.

Lemma 3 (Young'sche Ungleichung) *Seien $a, b \geq 0$ nicht-negative, reelle Zahlen und $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$ab \leq t a^{1/t} + (1-t) b^{1/(1-t)}.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz der *Konkavität* der Logarithmus-Funktion. Für belibige $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in [0,1]$ ist

$$\log(tx + (1-t)y) \geq t\log(x) + (1-t)\log(y).$$

Für $x := a^{1/t}$ und $y = b^{1/(1-t)}$ folgt:

$$\log\left(ta^{1/t} + (1-t)b^{1/(1-t)}\right) \geq t\log\left(a^{1/t}\right) + (1-t)\log\left(b^{1/(1-t)}\right) = \log(a) + \log(b) = \log(ab),$$

und somit die Behauptung. □

Theorem 4 (Hölder'sche Ungleichung) *Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $1 < p < \infty$. Dann gilt $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\|f \cdot g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Wie angekündigt, werden wir die *Young'sche Ungleichung* verwenden: Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, die die Unendlichkeitsstellen von f und g enthält:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |f(x)| = \infty \text{ oder } |g(x)| = \infty\} \subset N.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gilt dann die Young'sche Ungleichung (setze $a = |f(x)|$, $b = |g(x)|$, $t = \frac{1}{p}$ sowie $(1-t) = \frac{1}{q}$):

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Somit gilt für das Integral von $|fg|$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\|f\|_p + \frac{1}{q}\|f\|_q < \infty. \tag{2}$$

Insbesondere ist $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Strecken wir nun f um einen Faktor $\lambda > 0$ ($f \rightsquigarrow \lambda f$), so erhalten wir aus Gleichung (2):

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q.$$

Das Minimum der Funktion $\phi(\lambda) := \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q$ befindet sich bei

$$\lambda_0 = \|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p}$$

mit

$$\phi(\lambda_0) = \|f\|_p\|g\|_q,$$

womit die Hölder-Ungleichung bewiesen ist. □

Theorem 5 (Minkowski-Ungleichung) *Für $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt die Minkowski-Ungleichung:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Insbesondere ist $L^p(\mathbb{R}^n)$ ein komplexer Vektorraum und $\|\cdot\|_p \colon L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. *Schritt 1: L^p ist ein Vektorraum.* Wie oben auch sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Aufgrund der Konkavität der Exponentialfunktion haben wir für $a, b \geq 0$, $1 < p < \infty$ und $t \in [0,1]$:

$$(ta + (1-t)b)^p \leq ta^p + (1-t)b^p.$$

Für $a = |f(x)|$, $b = |g(x)|$ und $t = \frac{1}{2}$ in Kombination mit der Dreiecksungleichung bzgl. der Norm in $\mathbb{C}$ folgt:

$$\left|\frac{1}{2}f(x) + g(x)\right|^p \underset{\triangle\neq}{\leq} \left(\frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|g(x)|\right)^p \underset{\text{Konkavität}}{\leq} \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p.$$

Somit ist

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus N, \tag{3}$$

und es folgt $f + g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (da $|f+g|^p$ integrierbar mittels Ungleichung (3)).

Schritt 2: Minkowski-Ungleichung. Zunächst gilt: Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ so folgt $f^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *denn:* Mit $f \in \mathcal{M}$ ist auch $f^{p-1} \in \mathcal{M}$. Weiter gilt (unter Verwendung von Gleichung (1)):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)^{p-1}|^q \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{p-1}{q}} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty, \text{ da } f \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Die Minkowski-Ungleichung folgt nun aus der Hölder'schen Ungleichung. Da $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist nach Rechnung (4) $|f+g|^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und somit folgt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\underset{\triangle\neq}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leq} \||f+g|^{p-1}\|_q \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \\
&\underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{=} \|f+g\|_p^{p-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right),
\end{aligned}$$

oder äquivalent $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (natürlich unter der Voraussetzung, dass $f+g$ keine Nullfunktion darstellt). Insbesondere definiert $\|\cdot\|_p \colon L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ eine Norm. $\square$

Theorem 6 (Fischer-Riesz) *$L^p(\mathbb{R}^n)$ ist ein vollständiger Vektorraum bzgl. $\|\cdot\|_p$.*

Beweis. Wir imitieren den Beweis zu Theorem 24.13 im Skript: Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Um die Konvergenz dieser Folge zu sichern, reicht es die Konvergenz einer Teilfolge zu zeigen. Daher werden wir (nach Übergang zu einer Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) davon ausgehen, dass

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Sei

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\|g_n\|_p \leq 1.$$

Der *Satz von Beppo-Levi* (Theorem 22.3) sichert die Existenz einer punktweisen Grenzfunktion g, welche in der p-Potenz betragsintegrabel ist, d.h. $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $x \notin N$) haben wir (O.E. $m \geq n$):

$$|f_m(x) - f_n(x)| \underset{\triangle\neq}{\leq} \sum_{\nu=1}^{m-n-1} |f_{n+\nu}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Damit ist $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ für fast alle x eine Cauchy-Folge und der punktweise Limes von f_k lässt sich definieren durch $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, für fast alle x. Insbesondere erhalten wir fast überall

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_n(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq g(x) - |f_n(x)|, \tag{5}$$

d.h. $|f| \leq g - |f_n|$ fast überall. Somit ist $|f|^p$ ein punktweiser Limes Lebesgue-integriebarer Funktionen $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ mit integriebarer Majorantenfunktion $(g - |f_n|)^p$. Nach dem *Satz von Lebesgue* (Theorem 22.4) ist also $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Wiederum mit dem Satz von Lebesgue sehen wir ein, dass $f_k \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_p$,
denn: Die Funktionenfolge $(|f - f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen „die" Nullfunktion (bis auf Äquivalenzklasse) und wird durch g majorisiert (vgl. mit ersten Teil von Gleichung (5).□