Aufgabenblatt zur Klausurvorbereitung

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird auch nicht korrigiert.
Besprechung am 3.2.2017, 11h, KIP HS1.

(Die folgende Liste gibt eine Idee möglicher Einstiegsfragen und erschöpft nicht die für die Klausur relevanten Begriffe!)

(1) Was ist eine Basis eines Vektorraums?

(2) Was ist eine Gruppe? Was ist eine Darstellung einer Gruppe? Was ist eine irreduzible Darstellung?

(3) Was ist ein Hilbertraum?

(4) Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum, und $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Definieren Sie den Begriff der adjungierten Abbildung. Was ist eine selbst-adjungierte Abbildung? Was ist eine unitäre Abbildung?

(5) Was ist ein Eigenvektor einer linearen Abbildung?

(6) Was ist eine unitäre/orthogonale Matrix?

(7) Was ist eine hermitesche/symmetrische Matrix?

(8) Wie lautet die Transformationsformel für das Lebesgue-Integral?

(9) Was ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$? Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen kompakten Nullmenge.

(10) Was ist eine ein-Parameter Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$? Was ist eine infinitesimal Erzeugende?

(11) Geben Sie die Definition des Hilbertraums $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(12) Wie lautet der Stokessche Satz?

(13) Ist jede exakte Differentialform geschlossen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(14) Ist jede geschlossene Differentialform exakt? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Beachte: Die folgenden Aufgaben sind zum Teil technisch (und bei der allerletzten Teilaufgabe sogar erheblich) schwieriger als die, die Sie in der Klausur erwarten. Konzeptionell gibt es aber starke Resonancen.

1. Aufgabe (Lineare Algebra): Es sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$ die lineare Abbildung mit der darstellenden Matrix in der Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sei ferner $U \subset V$ der Unterraum $\{(x,x,x)^T \,|\, x \in \mathbb{Q}\} \subset V$, und $W := V/U$ der Quotient von V nach U.
Zuletzt sei $\mathfrak{F} = \{b, r\}$ und $F := \mathcal{F}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{F}, \mathbb{Q})$.

(a) Zeigen Sie, dass U ein A-invarianter Unterraum ist.

(b) Für $[v] \in W$ (mit $v \in V$) sei $B([v]) := [A(v)]$. Zeigen Sie, dass diese Vorschrift eine lineare Abbildung $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,W)$ (wohl-)definiert.

(c) Wählen Sie eine Basis von W und geben Sie die darstellende Matrix von B in dieser Basis an. Ein mögliches Ergebnis ist $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) Geben Sie eine lineare Abbildung $X \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,F)$ mit Spur 3 und Determinante 4 an.

(e) Geben Sie die darstellende Matrix von $B \otimes X$ bezüglich einer Basis Ihrer Wahl an.

2. Aufgabe (Zerlegung von Darstellungen):

$$S := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die von S und T erzeugte Untergruppe von $GL(3)$ isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ ist.

(b) Zerlegen Sie die durch S und T gegebene Darstellung von G in Irrdars (irreduzible Darstellungen).

3. Aufgabe (Fourier-Reihen): Für eine natürliche Zahl n sei

$$f(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f \in L^2_{\mathrm{per.}}(\mathbb{R})$.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten (a_k) der Fourierreihe $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i t}$

Hinweis: Euler-Formel und geometrische Summe.

4. Aufgabe (Integration): Es sei auf $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|$ die euklidische Norm. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert die Funktion $x \mapsto f_\alpha(x) := \min(1, \|x\|^\alpha)$ ein Element von $L^2(\mathbb{R}^n)$, und für welche nicht?

5. Aufgabe (Volumina): Wir betrachten zu gegebenem $h > 0$ die durch

$$\psi : U = [0,1] \times [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \psi(r,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta) \\ h\vartheta \end{pmatrix}$$

parametrisierte Wendelfläche $W = \psi(U)$.

(a) Zeigen Sie, dass W eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand ist. Beschreiben Sie den Rand ∂W.

(b) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $g = D\psi^T \cdot D\psi$ und ihre Determinante.

(c) Berechnen Sie den euklidischen Flächeninhalt $\mathrm{vol}(W)$.

(d) Berechnen Sie die euklidische Bogenlänge des Randes $l(\partial W)$.

6. Aufgabe (Vollständigkeit und Stetigkeit): (a) Entscheiden Sie (mit Begründung), welcher der Räume

$$V = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ stetig, } \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt} \}$$
$$W = \mathcal{C}^b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ stetig und beschränkt} \}\,,$$

ausgerüstet mit der Supremumsnorm, ein Banachraum ist.

(b) Entscheiden Sie (mit Begründung!), welche der Vorschriften

$$\mathrm{ev}_0(f) := f(0)$$
$$J(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

auf V bzw. W ein stetiges lineares Funktional definiert (oder definieren).

7. Aufgabe (Unitäre Darstellungen): Für $t \in \mathbb{R}$, f in $L^2(\mathbb{R})$ sei

$$(T_t(f))(x) := f(x+t)$$

Zeigen Sie:

(a) Für festes t ist $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ein unitärer Operator.

(b) Die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto T_t$ ist eine Darstellung der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.

(c) Für $f_0 = \chi_{[0,1]}$ ist

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{ T_t(f_0) \,|\, t \in \mathbb{R} \}$$

einer nicht-trivialer T-invarianter Unterraum.

(d) Ist U ein *abgeschlossener* T-invarianter Unterraum, so ist entweder $U = \{0\}$ oder $U = \mathcal{H}$.