Plenarübung

Die Cantor-Menge

Wir werden heute die sog. Cantor-Menge behandeln. Sie ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit besonderen Eigenschaften, von denen wir aber nur ausgewählte behandeln werden.

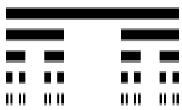
Definition. (Cantor-Menge) *Sei $C_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right\}.$$

Die Cantor-Menge ist dann definiert als der Schnitt über alle C_n:

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $C_n \subset C_{n-1}$. Die Iterationsschritte zur Konstruktion der Cantor-Menge sind im folgenden Bild dargestellt:



Aus der Definiton folgt auch (Übung), dass

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right\},$$

d.h. C ist *selbstähnlich*.

Die Cantor-Menge ist eine Nullmenge

Wir wollen das Volumen von $C \subset \mathbb{R}$ bestimmen. Unter der Annahme, dass χ_C integrierbar ist haben wir $\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1]\setminus C} + \chi_C$. In der Tat ist χ_C integrierbar.
Denn: Sei $f_k(x) := \chi_{[0,1]\setminus C_k}(x)$. Da $C_k \subset C_{k-1}$ ist $[0,1]\setminus C_{k-1} \subset [0,1]\setminus C_k$ und somit $f_{k-1} \leq f_k$. Nach Konstruktion der Cantor-Menge haben wir außerdem $f_k \to \chi_{[0,1]\setminus C}$ punktweise, also insgesamt die monotone Konvergenz

$$f_k \uparrow \chi_{[0,1]\setminus C}.$$

Das Volumen von $[0,1] \setminus C$ lässt sich leicht angeben (vgl. auch Abbildung). Es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{k} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{1-\frac{2}{3}} < \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Nach dem *Satz von Beppo Levi* ist $\chi_{[0,1]\setminus C}$ integrierbar und damit auch χ_C.
Für das Maß von C folgt unmittelbar:

$$\int_C \mathrm{d}x = 1 - \int_{[0,1]\setminus C} \mathrm{d}x = 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - 1 = 0.$$

Mächtigkeit von C

Definition. *(Abzählbarkeit) Sei M eine Menge. M heißt abzählbar (unendlich),falls es eine Bijektion $\Phi\colon \mathbb{N} \to M$ gibt. M heißt überabzählbar, falls M weder endlich, noch abzählbar ist.*

Wir werden zunächst eine Charakterisierung für die Elemente der Cantor-Menge angeben und mit Hilfe dieser die Überabzählbarkeit von C zeigen. Kurioserweise lässt sich sogar eine *Surjektion* von C auf $[0,1]$ angeben (und das obwohl C eine Nullmenge ist).

Theorem: (Charakterisierung der Cantor-Menge) *Alle $c \in C$ lassen sich im Ternärsystem schreiben mit Koeffizienten in $\{0,2\}$. Präziser gilt:*

$$c \in C \quad \Leftrightarrow \quad c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} \quad \textit{mit } \alpha_i \in \{0,2\}.$$

Proof. Zunächst müssen wir bemerken, dass sich *jede* Zahl $x \in [0,1]$ in der "3-adischen" Entwicklung schreiben lässt: Es gibt also für alle $x \in [0,1]$ eine Folge $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}.$$

Dies lässt sich zeigen, indem man die $\alpha_i \in \{0,1,2\}$ iterativ maximal groß wählt, sodass

$$\frac{\alpha_k}{3^k} \leq x - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{3^i} < \frac{\alpha_k + 1}{3^k}.$$

Z.B. ist für $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}.$$

„$\Rightarrow$": Angenommen $x \in C$, mit Entwicklungskoeffizienten $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \{0,1,2\}$, sodass

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}$$

und sodass es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\alpha_{i_0} = 1$.

Angenommen $i_0 = 1$. Dann ist

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{i+1}}{3^i}}_{\in[0,1]} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cap C = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Für $x = \frac{1}{3}$ lässt sich x schreiben als

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}}.$$

Für $x = \frac{2}{3}$ hat x bereits die gesuchte Darstellung.
Wir formulieren nun die Induktionsannahme:
Ist $x \in C$, dann lässt sich eine 3-adische Darstellung von x finden, für die alle Koeffizienten α_i mit $i < i_0$ Elemente in $\{0, 2\}$ sind.
Sei also i_0 der kleinste Koeffizient, für den $\alpha_{i_0} = 1$. Da $x \in C$ haben wir $x \in \frac{1}{3}C$ oder $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C$. D.h. $3x \in C$ oder $3x - 2 \in C$. Aus dem ersten Fall erhalten wir dass $\alpha_0 = 0$ sein muss; aus dem zweiten, dass $a_0 = 2$ gilt. In beiden Fällen erhalten wir aber durch die Multiplikation mit 3 einen Indexschift $i_0 \rightsquigarrow i_0 - 1$. Per Induktionsannahme können wir somit eine 3-adische Reihenentwicklung finden, die x darstellt, und für die $i_0 \in \{0, 2\}$ gilt.

„$\Leftarrow$“: Wir wissen $C_n \subset C_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x = \sum \frac{\alpha_i}{3^i}$ mit $\alpha_i \in \{0, 2\}$. Dann ist offenbar $x \in [0, 1] = C_0$.
Wir formulieren die Induktionsannahme:
Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in C_k$ für alle $k \leq n$.
Wir wollen schließen, dass dann $x \in C_{n+1}$. Wir rechnen:

$$x = \sum \frac{\alpha_i}{3^i} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{1}{3} \sum \frac{\alpha_{i+1}}{3^i} = \begin{cases} \frac{1}{3} \sum \frac{\alpha_{i+1}}{3^i} \in \frac{1}{3} C_n, & \text{falls } \alpha_1 = 0, \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum \frac{\alpha_{i+1}}{3^i} \in \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n \right\}, & \text{falls } \alpha_1 = 2. \end{cases}$$

D.h. $x \in \frac{1}{3} C_n \cup \frac{1}{3}\{2 + C_n\} = C_{n+1}$. Damit ist $x \in \cap C_n = C$. □

Beobachtung: *C ist überabzählbar.*

Proof. Angenommen, C wäre abzählbar, d.h. es gäbe eine Bijektion $\phi \colon \mathbb{N} \to M$. Wir werden hier Gebrauch von *Cantors Diagonalargument* machen. Die Idee ist, ein Element x zu konstruieren, das nicht im Bild von ϕ enthalten ist, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Seien $x^{(n)} := \phi(n)$ und deren 3-adischen Entwicklungen gemäß der Charakterisierung von Elementen in C gegeben:

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^{(n)}}{3^i}.$$

Wir definieren neue Koeffizienten $\beta_i := \{0, 2\} \setminus \{\alpha_i^{(i)}\}$ und setzen

$$x := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}.$$

Dann ist $C \ni x \notin \phi(\mathbb{N}) = C$, ein Widerspruch. □

Wir können obige Aussage sogar verschärfen: Wir definieren die folgende Abbildung

$$\phi \colon C \to \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i / 2}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}}.$$

Diese bildet C surjektiv auf $[0, 1]$ ab (leichte Übung). Sie ist allerdings nicht injektiv, z.B. ist $\frac{2}{3} \neq \sum_{i=2} \frac{2}{3^i}$ aber

$$\phi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} = \phi\left(\sum_{i=2} \frac{2}{3^i}\right).$$