Plenarübung

Die Gamma-Funktion – Konvergenz, Stetigkeit und Holomorphie

Idee: Wir wollen die für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ definierte Fakultätsfunktion $n!$ auf reelle und komplexe Argumente erweitern.

Ansatz: Das Euler'sche Integral zweiter Gattung: Für komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ sei

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t,$$

wobei

$$\begin{aligned} t^{z-1} &:= \exp(\log(t)(z-1)) \\ &= \exp(\log(t)(\mathrm{Re}(z)-1))(\cos(\log(t)\,\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\log(t)\,\mathrm{Im}(z))). \end{aligned} \tag{1}$$

Funktionalgleichung: Dass dies der richtige Ansatz ist, zeigt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{für alle } \mathrm{Re}(z) > 0.$$

In der Tat folgt für $z = n \in \mathbb{N}$ (unter der Annahme der Konvergenz des Γ-Integrals)

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!.$$

Die Funktionalgleichung selbst lässt sich mittels *partieller Integration* zeigen:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t - \underbrace{\left[t^z e^{-t}\right]_0^\infty}_{=0} = z\Gamma(z)$$

Heute wollen wir die Konvergenz, Stetigkeit und Holomorphie der Γ-Funktion mit Hilfe der in der Vorlesung behandelten Integrationstheorie zeigen. Konkret werden wir Gebrauch von Theorem 22.3 (Beppo Levi), Theorem 22.4 (Lebesgue), Theorem 22.8 (Fubini) und Theorem 22.9 (Stetige/differenzierbare Abhängigkeit von Parametern) machen. Im Folgenden ist darauf zu achten, dass die entsprechenden Sätze für Real- und Imaginärteile der betrachteten Integrale behandelt werden (gemäß 22.33 im Skirpt). Die Holomorphie von Γ lässt sich auch einfacher mit elementar-funktionentheoretischen Mitteln zeigen, etwa mit Hilfe des *Approximationssatzes von Weierstraß*. Wir beweisen das folgende

Theorem: *Die oben definierte Γ-Funktion konvergiert in der Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und ist dort holomorph.*

Konvergenz: Beppo Levi und Lebesgue. Wir zerlegen das uneigentliche Γ-Integral in die 2 Teile:

$$\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t}_{=:I_2}$$

und behandeln diese gesondert. Sei zunächst $z \in H$ fest gewählt und sei $x := \mathrm{Re}(z) > 0$.
Zu I_2: Wir setzen mit Hinblick auf den Satz von Lebesgue:

$$f_k(t) := t^{z-1}e^{-t}\chi_{[1,k]}(t) \quad \text{und} \quad f(t) := t^{z-1}e^{-t}\chi_{[1,\infty)}(t).$$

Offenbar gilt $f_k(t) \to f(t)$ punktweise. Für die Majorante F wählen wir geschickterweise eine Funktion, die den Betrag von f majorisiert, da diese dann als Majorante für den Realteil und Imaginärteil des Integrals Verwendung findet. Dazu verwenden wir (vgl. Gl. (1))

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t}$$

Es gibt daher eine Konstanten $C = C(x) > 0$ (die von x abhängt), sodass $t^{x-1} \leq C(x)e^{t/2}$. Somit setzen wir $F(t) := C(x)e^{t/2}e^{-t}\chi_{[1,\infty)}(t) = C(x)e^{-t/2}\chi_{[1,\infty)}(t)$ (reellwertig!). Nach Konstruktion ist dann $|f_k(t)| \leq F(t)$ für alle t und k. Dass $F \in \overline{\mathcal{L}}(\mathbb{R})$ gilt, folgt mit Beppo-Levi: Die Multiplikation von F mit $\chi_{[1,k}(t)$ erzeugt eine Folge von monoton konvergenten Funktionen, die punktweise gegen F konvergieren. Die Aussage folgt dann, falls die entsprechende Folge der Integrale beschränkt ist:

$$\int_{[1,k]} F(t)\,\mathrm{d}t = C(x)\int_{[1,k]} e^{-t/2} = -2C(x)\left[e^{-t/2}\right]_1^k < 2C(x)e^{-1/2} < \infty.$$

Die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue sind erfüllt und es folgt die Konvergenz von I_2.
Zu I_1: Wir gehen so vor wie oben: Sei

$$f_k(t) := t^{z-1}e^{-t}\chi_{[1/k,1]}(t), \quad f(t) := t^{z-1}e^{-t}\chi_{[1/k,1]}(t) \quad \text{und} \quad F(t) := t^{x-1}\chi_{(0,1]}(t).$$

Die Wahl von F wird durch die Ungleichung $|t^{z-1}e^{-t}| < t^{x-1}$ für $t > 0$ gerechtfertigt (Beachte: Diese Wahl hätte im vorherigen Fall zu keiner gültigen Majorante F geführt). Wie oben auch betrachten wir die Integralfolge:

$$\int_{1/k}^{1} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[t^x\right]_{1/k}^{1} < \frac{1}{x} < \infty,$$

da $x > 0$. Nach Beppo Levi ist also $F \in \overline{\mathcal{L}}(\mathbb{R})$ und damit ist nach Lebesgue I_1 konvergent.

Stetigkeit: Parameterabhängiges Integral. Wir wollen die Stetigkeit in einem Punkt $z_0 \in H$, $\mathrm{Re}(z_0) =: x_0$. Sei nun $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass der Abschluss der offenen Umgebung $B_\epsilon(z_0)$ von z_0 in H enthalten ist:

$$\overline{B_\epsilon(z_0)} \subset H. \tag{2}$$

Im Kontext von Theorem 22.9 im Skript setzen wir $U := B_\epsilon(z_0)$ und $f\colon \mathbb{R} \times U \to \mathbb{C}$ mit $f(t,z) := t^{z-1}e^{-t}\chi_{[1,\infty)}(t)$. Dann ist:

(i) Für jedes feste $z \in U$ (aufgrund der *Konvergenz*) $f(\cdot, z)$ integrierbar (bzgl. t).

(ii) Für jedes fest gewählte $t \in \mathbb{R}$ ist $f(t, \cdot)$ (offenbar) stetig (bzgl. z).

(iii) Wir brauchen nun eine integrierbare Majorante die $f(t,z)$ für alle $z \in U$ majorisiert und selbst unabhängig von z ist. Dank $\overline{U} \subset H$ und der Konvergenz der Γ-Funktion bildet die folgende Funktion eine passende Majorante:

$$F(t) := t^{\check{x}-1}\chi_{(0,1]}(t) + C(\hat{x})e^{-t/2}\chi_{[1,\infty)}(t),$$

wobei $\check{x} := x_0 - \epsilon$ und $\hat{x} := x_0 + \epsilon$. Dass dies eine passende Majorante ist haben wir bereits bei der Konvergenz der Integrale I_1 und I_2 nachgerechnet.

Aus Theorem 22.9 folgt nun, dass Γ stetig in z_0 ist und damit stetig auf ganz H.

Holomorphie: Fubini und Leibniz-Regel. Sei wieder $U = B_\epsilon(z_0)$. Eine Möglichkeit, die Holomorphie zu zeigen, wäre mit Hilfe von Theorem 22.9 die stetige partielle Differenzierbarkeit in x bzw. y zu prüfen (hier: $z = x + iy$) und schließlich die *Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen* nachzuweisen (vgl. Lemma 11.2 im Skript). Für Theorem 22.9 müsste man dann eine integrierbare Majorante $F(t)$ der Ableitung $\log(t)t^{z-1}e^{-t}$ finden. Dies geht aber analog zur Stetigkeit.

Eine weitere Möglichkeit ist hingegen der Satz von Fubini: (Idee) Falls wir zeigen können, dass für $z \in U$ die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \times \partial B_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}, \quad (t,w) \mapsto \frac{t^{w-1}e^{-t}}{w-z}$$

integrierbar ist, dann führt die folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{t^{w-1}}{w-z}\,\mathrm{d}w\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{1}{w-z}\left(\int_0^\infty t^{w-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\Gamma(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

zur Identität

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\Gamma(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \tag{3}$$

Da, wie wir bereits gezeigt haben, der Integrand auf $\partial B_\epsilon(z_0)$ stetig ist, folgt die Holomorphie von Γ in z (vgl. Gl. (16.22) im Skript). Wir müssen also unser Problem in den Kontext von Theorem 22.8 (Fubini) rücken: Dazu definieren wir die Funktion

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(t,s) := f(t, z_0 + \epsilon e^{is})\epsilon i e^{is}\chi_{[0,\infty)}(t)\chi_{[0,2\pi]}(s).$$

Wir haben hier $\partial B_\epsilon(z_0)$ parametrisiert durch die Kurve $s \mapsto z_0 + \epsilon e^{is}$ für $s \in [0, 2\pi]$. Dies führt zur Gestallt von $\tilde{f}$. Wir brauchen nun eine Majorante $F(t,s)$ des Betrags $|\tilde{f}(t,s)|$. Diese ist aber gegeben durch

$$F(s,t) := \frac{t^{\check{x}-1}\chi_{(0,1]}(t) + C(\hat{x})e^{-t/2}\chi_{[1,\infty)}(t)}{r}\epsilon\chi_{[0,2\pi]}(s),$$

mit $r := \min\{|w-z| \mid w \in \partial B_\epsilon(z_0)\}$ und $\check{x} = x_0 - \epsilon$ und $\hat{x} = x_0 + \epsilon$. Es gilt offenbar $F \in \overline{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^2)$, also ist nach Lebesgue $\tilde{f} \in \overline{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^2)$. Nach Theorem 22.8 gilt somit

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t,s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t,s)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.$$

Insbesondere ist nach Rücktransformation $w = z_0 + \epsilon e^{is}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t,s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \Gamma(z),$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t,s)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\Gamma(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$