4.2.3 **Def.** • Eine Lie-Algebra ist ein Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer anti-symmetrischen bilinearen Verknüpfung (die Lie-Klammer) $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ welche die Jacobi-Identität erfüllt:

$$[x,y] = -[y,x] \qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}$$

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \qquad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$$

• Eine Lie-Algebra heißt abelsch (kommutativ) falls $[\cdot,\cdot]\equiv 0$

• Eine Derivation einer Lie-Algebra ist eine lineare Abbildung $\delta: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ mit

$$\delta[x,y] = [\delta x, y] + [x, \delta y]$$

• Für einen Vektorraum V bezeichne $\mathrm{End}(V)$ der mit dem Kommutator $[x,y] = x\circ y - y\circ x$ ($x,y\in \mathrm{End}\,V$) ausgerüstete Vektorraum der Endomorphismen von V.

• Eine Darstellung einer Lie-Algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Lie-Algebra Homomorphismus $\rho: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$.

• Für eine diff. Mf. M ist $\mathfrak{X}(M)$ ausgerüstet mit der Klammer aus 4.2.2. eine Lie-Algebra (welche nicht von einer assoziativen Algebra stammt).

- Diese Definitionen sind im wesentlichen dazu geeignet, um sich die Jacobi-Identität leichter merken zu können:

Sei für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $x \in \mathfrak{g}$, $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die lineare Abbildung

$$ad_x(y) = [x, y]$$

Dann ist die Jacobi-Identität äquivalent zu eine der Aussagen:

(i) $\forall\, x \in \mathfrak{g}$ ist ad_x eine Derivation

$$ad_x([y,z]) = [ad_x y, z] + [y, ad_x z]$$

(ii) die Abbildung $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$

$$x \mapsto ad_x$$

ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf sich selbst:

$$ad_{[x,y]}(z) = ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z))$$

- Die Lie-Algebra $\mathfrak{X}(M)$ ist ein Beispiel dafür, dass der Vektorraum der Derivationen einer assoziativen Algebra (wie $\mathfrak{F}(M)$, muss aber nicht kommutativ sein) in natürlicher Weise eine Lie-Algebra ist.

4.2.4 Zurück zum Thema wollen wir nun zu jeder Lie-Gruppe G eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ assoziieren, welche die infinitesimale Struktur von G beschreibt und in einer genau zu beschreibenden Weise "G erzeugt".

- Der zugrunde liegende Vektorraum ist einfach

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

- Die Klammer kann auf zwei verschiedene Weisen erklärt werden, von welchen die zweite die Idee der infinitesimalen Struktur ~~klarer~~ herausstellt, aber technisch etwas aufwendiger ist. Für die erste benutzen wir einfach die Lie-Algebra Struktur auf dem Raum der Vektorfelder $\mathcal{X}(G)$:

- Betrachte für jedes $x \in \mathfrak{g} = T_e G$ das Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(G)$ definiert via

$$X_g = (DL_g)_e(x) \qquad g \in G$$

wo $L_g : G \to G$ die glatte Linkstranslation ist, und $(DL_g)_e$ die Ableitung an dem neutralen Element.

- Wegen der Kettenregel $(DL_g)_h (DL_h)_e x = (DL_{gh})_e x$ ist X links-invariant in dem Sinne dass

$$(DL_g)_h X_h = X_{gh}$$

Lemma/Def. Sei $\mathfrak{X}^L(G)$ der Vektorraum der links-invarianten Vektorfelder auf G.

(i) Es existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{X}^L(G)$$

(ii) $\mathfrak{X}^L(G)$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(G)$ und für $x, y \in \mathfrak{g}$ erhalten wir

$$[x,y] = [X,Y]_e$$

wo $[X,Y]$ die Lie-Klammer der zu x,y gehörenden $X,Y \in \mathfrak{X}^L(G)$ ist.

Bew: (i) klar durch Auswerten am neutralen Element.

(ii) wird einfach, wenn wir die Linksinvarianz zunächst abstrakt umschreiben: Sei für $g \in G$, $L_g^*: \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G)$

$$L_g^*(f)(h) = f(L_g h) = f(gh)$$

(nicht zu verwechseln mit der regulären Darstellung

$$L_g(f)(h) = f(g^{-1}h) \;!!)$$

Dann ist per Definition

$$(DL_g)_h X_h(f) = X_h L_g^*(f) = (X \circ L_g^*(f))(h)$$

$$\left(X \circ L_g^* : \mathbb{R}\text{-lineare Abbildung } \mathcal{F}(G) \circlearrowleft ! \right)$$

$\left(\begin{array}{l} X: \text{ Derivation von } \mathcal{F}(M), \\ L_g^*: \text{ Algebra-Homomorphismus} \end{array} \right)$

und andererseits

$$X_{gh}(f) = X(f)(gh) = (L_g^* X(f))(h)$$

Also ist Linksinvarianz äquivalent zu $X \circ L_g^* = L_g^* \circ X$

Dann aber folgt die Linksinvarianz von $[X, Y]$ aus der Linksinvarianz von X und Y durch direktes Nachrechnen.

Bem: Natürlich hätten wir anstatt der linksinvarianten Vektorfelder auch die rechtsinvarianten Vektorfelder benutzen können: Sei für $x \in \mathfrak{g} = T_e G$, $\tilde{X}$ das rechtsinvariante Vektorfeld

$$\tilde{X}_g = (DR_g)_e(x) \qquad \text{(NB: hier taucht kein } g^{-1} \text{ auf!)}$$

und die zugehörige Klammer

$$\tilde{[}x, y\tilde{]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$$

Beh: $\tilde{[}\cdot, \cdot\tilde{]} = -[\cdot, \cdot]$.

Bew: Der Schlüssel ist $\iota \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ \iota$

$$\left((L_g(h))^{-1} = h^{-1} g^{-1} = R_{g^{-1}}(h^{-1}). \right)$$

gemäß dem

$$(D\iota)_g (DL_g)_e x = (DR_{g^{-1}})_e \underbrace{(D\iota)_e (x)}_{= -x \quad (\text{s. S. } 84)}$$

$$(D\iota)_g X_g = -\tilde{X}_{g^{-1}}$$

d.h. $$X \circ \iota^* = -\iota^* \circ \tilde{X}$$

oder (da $\iota^2 = id$) $$\tilde{X} = -\iota^* \circ X \circ \iota^*$$

Daher ist $$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [-\iota^* \circ X \circ \iota^*, -\iota^* \circ Y \circ \iota^*]$$

$$= \iota^* [X, Y] \iota^*$$

$$= -\tilde{Z}$$

wo $\tilde{Z}$ das zu $z = [x, y]$ gehörige rechtsinvariante Vektorfeld ist. Auswerten bei e ergibt die Behauptung.

—

Bevor wir ~~uns~~ nun die Theorie weiterentwickeln, schauen wir uns Beispiele an.

§4.3 Beispiele

~~Examples~~: (Closed linear groups, the classical groups.)

- Certainly from the point of view of applications, groups more often than not arise as groups of symmetries of say a physical system. In other words, they are given as groups of transformations that leave invariant some mathematical structure.

4.3.1. Die Allgemeine Lineare Gruppe und ihre Lie-Algebra

- A prototypical example, and the most readily defined Lie groups are the ~~special~~ general linear groups, which only require a linear structure, i.e. a vector space.

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{ \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

Since $g \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ is invertible $\Leftrightarrow$ $\det g \neq 0$, $GL(n, \mathbb{C})$ is an open subset of $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ hence it is certainly a Lie group, a complex one.

~~matrix~~

- ~~Given a real structure, we can define~~

- Similarly,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \}$$

— a real Lie group.

Group operations are given by polynomial (or perhaps rational) operations on matrix entries, so are differentiable.

- As in any vector space, the tangent space at any point $g \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ is identified with the vector space itself.
- Concretely, if e_{ij} is a basis of $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ with coordinates a^{ij}, we get a basis of the tangent space as

$$\frac{\partial}{\partial a^{ij}}$$

obviously in correspondence with e_{ij}.
(If f is a function on $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, $\frac{\partial}{\partial a^{ij}} f$ is just what it is.)

- Moreover, since with this identification, the differential of any linear map of vector spaces is just the linear map itself, and since left multiplication

$$L_g : Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$$
$$h \mapsto h$$

is linear (in h), we have

$$DL_g = g$$

so that the left-invariant vector field corresponding to $X \in T_e\, GL(n, \mathbb{C})$ is simply

$$X_g = g \cdot X$$

This puts us in a position to calculate the Lie bracket in terms of only operations on $T_e GL(n,\mathbb{C})$. Say $x, y \in \mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ and X, Y be corresponding left-invariant vector fields. f be a smooth function.

Then

$$(Xf)(g) = (gx)^{ij}\,\partial_{ij} f(g) \qquad \left(g = g^{ij} e_{ij}\right).$$

So

$$Y(Xf)(g) = (gy)^{kl}\,\partial_{kl}\,(gx)^{ij}\,\partial_{ij} f(g)$$

$$= (gyx)^{ij}\,\partial_{ij} f + (gy)^{kl}(gx)^{ij}\,\partial_{kl}\partial_{ij} f$$

while

$$X(Yf)(g) = (gxy)^{ij}\,\partial_{ij} f + (gx)^{ij}(gy)^{kl}\,\partial_{ij}\partial_{kl} f$$

By symmetry of second derivative, we find

$$[X,Y]f = \left(g\,(xy - yx)\right)^{ij}\,\partial_{ij} f$$

and evaluation at identity gives indeed

$$[x,y] = xy - yx$$

i.e. the matrix commutator.

4.3.2. Matrix-Lie-Gruppen

Es ist wahr, wenn auch nicht ganz leicht zu zeigen dass die allermeisten (whatever this means) Lie-Gruppen als Untergruppen der allgemein linearen Gruppen auftreten, wobei man den Begriff der Untergruppe sogar noch etwas einschränken kann:

<u>Def.</u> Eine Matrix-Lie-Gruppe ist eine topologisch abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ oder $GL(n,\mathbb{C})$ für irgendein n.

<u>Beispiel.</u> $SL(n,\mathbb{R}) = \{ g \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det g = 1 \}$

Dies ist wegen der Multiplikativität der Determinante eine Untergruppe, und wegen der Stetigkeit abgeschlossen

~~d.h.~~ $\cancel{g_n \xrightarrow{n\to\infty} g \text{ mit } g_n \in SL(n,\mathbb{R})}$ $\cancel{\in GL(n,\mathbb{R})}$

d.h. z.B. falls $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $g_n \in SL(n,\mathbb{R})$ ist mit $\lim_{n\to\infty} g_n = g \in GL(n,\mathbb{R})$ so ist bereits $g \in SL(n,\mathbb{R})$.

<u>Beh.:</u> $SL(n,\mathbb{R})$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $GL(n,\mathbb{R})$, d.h. eine Unter-Lie-Gruppe.

<u>Bew.:</u> Wir berechnen die Ableitung der Determinante und benutzen dann den Satz über die Umkehrabbildung.

Sei also $g \in GL(n,\mathbb{R})$ und $x \in T_g GL(n,\mathbb{R}) = Mat(n,\mathbb{R})$
Wir berechnen $(D\det_g)(x) \in T_{\det g}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ über die glatte Kurve $t \to g + tx$ durch g:

$$(D\det)_g(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g+tx)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g)\det(id + tg^{-1}x)$$

$$= \det(g)\ tr(g^{-1}x).$$

Dies ist als lineare Abbildung $Mat(n,\mathbb{R}) \ni x \mapsto \det(g)\, tr\, g^{-1}x \in \mathbb{R}$ offensichtlich nicht null, hat also konstanten maximalen Rang. $\Rightarrow$ Beh.
Durch Auswerten bei $e = id_{\mathbb{R}^{n\times n}}$ erhalten wir die Lie-Algebra als

$$sl(n,\mathbb{R}) = T_e SL(n,\mathbb{R}) = \{x \in Mat(n,\mathbb{R}),\ tr\, x = 0\}.$$

- Eine ähnliche Betrachtung ist für $GL(n,\mathbb{C}) \rightsquigarrow SL(n,\mathbb{C})$ anwendbar. $SL(n,\mathbb{C})$ ist eine reelle (und auch komplexe) Lie-Gruppe.
- ~~Man beachte, dass in~~
- Es ist zu betonen, dass in der Definition keine Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Tatsächlich gilt nach dem „Satz von Cartan über abgeschlossene Untergruppen" ganz allgemein, dass abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen

automatisch differenzierbar und regulär eingebettete Untermannigfaltigkeiten, d.h. Unter-Lie-Gruppen sind.

Das Wesen der Abgeschlossenheit sei am Beispiel des irrationalen Torus illustriert: Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Untergruppe

$$T_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(2,\mathbb{C})$$

Bch: T_α ist nicht abgeschlossen: Die Folge $\begin{pmatrix} e^{i(2n+1)\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha(2n+1)\pi} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha(2n+1)\pi} \end{pmatrix}$$

hat, wie aus der Analysis bekannt eine gegen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ konvergente Unterfolge (jedes $x \in [0,2]$ ist Häufungspunkt von $\alpha(2n+1) \mod \mathbb{Z}$)

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist aber nicht in T_α.

Als abstrakte Gruppe ist natürlich $T_\alpha = (\mathbb{R},+)$ und diese lässt sich natürlich auch als Matrix-Gruppe realisieren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(n,\mathbb{R})$$

• Weitere interessante Beispiele von Matrix-Lie-Gruppen sind verschiedene Gruppen von Dreiecksmatrizen, z.B.

$$B_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & + & \cdots & + \\ & * & & + \\ & & \ddots & + \\ 0 & & & * \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} * \neq 0 \\ + \text{ beliebig} \end{matrix} \right\}$$

oder
$$N_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & + & + \\ & 1 & + \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \right\}$$

wobei zu bemerken ist, dass B_n zwar in $GL(n,\mathbb{R})$ abgeschlossen ist, aber nicht in $Mat(n,\mathbb{R})$.

• Als geometrische Einsicht bemerken wir, daß man $SL(n,\mathbb{R})$ interpretieren kann als die Untergruppe der volumenerhaltenden linearen Transformationen des $\mathbb{R}^n$, d.h. die Volumenform

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

ist invariant unter $x^i \to g^i_j x^j$.

• B_n und T_n erhalten Flaggen. (Folgen von Unterräumen)
~~Dies lässt sich auf andere geometrische Strukturen verallgemeinern,~~
~~es kann gibt aber interessanterweise nur in einem~~
~~Fall ein~~

Diese Idee lässt sich auf andere geometrische Strukturen verallgemeinern, führt aber bis auf singuläre (interessante!) Ausnahmen nur in einem Fall zu einem reichhaltigen Ergebnis.

4.3.3 Klassische Gruppen

- The other natural structure on a vector space to demand invariance of are non-degenerate bilinear forms.
  - Say V is n-dimensional vectorspace over $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and $Q: V \times V \to F$ is non-degenerate bilinear form (i.e. $Q(v,w) = 0 \ \forall w \Rightarrow v = 0$).
  - It then makes sense to consider the subgroup of $GL(V) = GL(n,F)$ preserving Q, ie.

$$G = \{ g \in GL(V), Q(gv, gw) = Q(v,w) \ \forall v,w \in V \}$$

- It's of course best to look at examples before reflecting on the general case. The only one point I want to bring home again is the general form of the Lie algebra (obtained by the principle that derivative of linear maps are the maps themselves).

$$\mathfrak{g} = \{ x \in \underset{\substack{\shortparallel \\ End(V)}}{gl(V)}, \quad Q(xv,w) + Q(v,xw) = 0 \ \forall v,w \in V \}$$

- With a specific identification $V = F^n$, $Q(v,w) = v^T M w$ the conditions are

$$g^T M g = M$$

$$x^T M + M x = 0$$

- Auch ist es nicht schwer einzusehen, dass solche G abgeschlossen in $GL(V)$ und auch glatte Unf. von $End(V)$ sind.

(Der Rang der Ableitung ist zumindestens konstant.)

Es sind dann wesentlich zwei Fälle zu unterscheiden:

The two basic cases to consider are

1) Q symmetric, leading to the orthogonal groups (where in the real case, $F=\mathbb{R}$, we have to distinguish in addition by the signature of Q.

$\rightsquigarrow$ $O(n,k;\mathbb{R})$ vs. $O(n,\mathbb{C})$)

(note also that $(\det)^2=1$ $\Rightarrow$ O is disconnected

$$SO = O \cap SL$$
)

2) Q anti-symmetric, leading to the symplectic groups (where there's no signature to distinguish, and moreover the determinant is always one.

(this follows from

$$g^T M g = M \rightsquigarrow \mathrm{Pfaff}(M) = \det g \; \mathrm{Pfaff}\, M$$

$$\Rightarrow \det g = 1$$

$$M^T = -M \rightsquigarrow \text{Pfaffian is well-defined}$$

$$\mathrm{Pfaff}\, M = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod M_{\sigma(2i-1)\,\sigma(2i)}$$

Terminology: These Lie groups – SL, SO, Sp, and their Lie algebras, receive the epitheton "classical".

außerdem muss für die Nicht-entartheit n gerade sein.

$\longrightarrow$ $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{C})$.

- One can (and should probably) ask about Q neither symmetric nor anti-symmetric. Some comments:
    - * basically, symmetric, S, and anti-symmetric, A part of Q are separately invariant. However, might be degenerate.
    - * If Q is "normal" (i.e. S and A "commute") we get basically combinations of the above types. See below for some interesting interactions.
    - * In general, we'll get a bit of a mess. For example consider

$$Q \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = M$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix} \right\}$$

- Similar comments about degenerate Q. $\to \operatorname{Ker} Q = \{v,\ Q(v,w)=0\ \forall w\}$ is invariant under G preserving Q
- The "correct" way to think of Q from the point of view of representation theory (if you want, the modelling of algebraic structures on vector spaces) is as invariant tensors:

    * $Q \in V^* \otimes V^* \cong S^2 V \oplus \Lambda^2 V$

    * volume form $\in \Lambda^n V$

    (flags ~ preserve linear subspaces)

Es stellt sich dann die Frage, ob es "zwischen" den quadratischen und den determinantischen (Top) Formen noch andere Strukturen gibt, deren Invarianz zu weiteren Lie-Gruppen führt. Das wesentliche Ergebnis der Klassifikation (der einfachen Lie-Algebren über $\mathbb{C}$) wird sein, dass es mit fünf Ausnahmen (genannt E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2) keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Hingegen ist es interessant, noch einmal zwischen linear und bilinear die sesqui-linearen Formen anzuschauen. Die zugehörigen Lie-Gruppen sind reelle Mannigfaltigkeiten, die Vektorräume komplex oder sogar quaternionisch und das Ergebnis daher ein gewisses Mischmasch. Die Motivation kommt wieder aus der Darstellungstheorie, wo wir im endlichen (und kompakten) Fall gesehen haben (oder hätten) dass alle Darstellungen über $\mathbb{C}$ eine invariante sesquilineare Form zulassen (ein hermitesches inneres Produkt), das Bild einer Darstellung also a priori gar nicht in ganz $GL(n,\mathbb{C})$ landet, sondern in der unitären Gruppe.

So consider $V = \mathbb{C}^n$ with a hermitian form

$$H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

(which we might as well think standard $H(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i$.)

Identifying $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ (which is non-canonical...) we find

$$Q = \mathrm{Re}\, H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \quad \text{- symmetric}$$

$$\Omega = \mathrm{Im}\, H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \quad \text{- antisymmetric}$$

$$\Omega(iv,w) = \mathrm{Im}(H(iv,w)) = \mathrm{Im}(-i\, H(v,w))$$
$$= \mathrm{Re}\, H(v,w) = Q(v,w).$$

- in other words Ω and Q are related on the real vector space $\mathbb{R}^{2n}$ via

$$\Omega(Jv,w) = Q(v,w)$$

where $J = i$ in the given identification $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$

\# Usually this structure is written as the data of $Q : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ and $J : \mathbb{R}^{2n} \circlearrowleft$ of $J^2 = -1$ and

$$Q(J\cdot, J\cdot) = Q(\cdot,\cdot).$$

complex structure.

(standard. $Q = id_{2n\times 2n}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$)

$$\Rightarrow \quad U(n) = O(2n, \mathbb{R}) \cap Sp(2n, \mathbb{R})$$