Kapitel 4 Kontinuierliche und differenzierbare Gruppen

Um uns den für die Differentialgeometrie, die Physik sowie die allgemeine Anschauung wichtigen Beispielen schneller zu nähern, stellen wir dies Mal die allgemeine Untersuchung kompakter topologischer Gruppen und ihrer Darstellungstheorie (Satz von Peter-Weyl) etwas zurück, und führen noch in diesem Kapitel die Lie-Gruppen ein. Nur auf die Definition wollen wir nicht verzichten.

§4.1. Topologische Gruppen

Def: Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe G, welche mit einer Topologie ausgestattet ist (d.h. ein System von Teilmengen von G, welches die leere Menge und ganz G enthält und unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist) derart dass die Gruppen-Operationen

$$m: G \times G \longrightarrow G \qquad (x,y) \longmapsto m(x,y) = x \cdot y$$

$$\iota: G \longrightarrow G \qquad x \longmapsto \iota(x) = x^{-1}$$

stetige Abbildungen sind, d.h. Urbilder offener Mengen sind offen.

Bem: · In der Definition ist $G\times G$ als mit der Produkttopologie versehen aufzufassen, d.h. der gröbsten Topologie, in welcher die Projektionen auf die Faktoren stetig sind. Mit anderen Worten ist dies die Topologie, welche von Produktmengen der Form $U_1\times U_2$ mit $U_{1,2}\subset G$ offen, erzeugt wird.

· Es genügt offenbar, die Stetigkeit von $(x,y)\mapsto xy^{-1}$ zu prüfen.

Lemma. Sei G eine topologische Gruppe. Für jedes $x\in G$ ist die Linkstranslation

$$L_x = m(x,\cdot) : G \to G$$

$$y \mapsto m(x,y) = L_x y = xy$$

stetig.

Bew: Sei W eine (offene) Umgebung von xy in G. Wegen der Stetigkeit von $m: G\times G\to G$ ist $m^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von $(x,y)\in G\times G$. Gemäss der Definition der Produkttopologie gibt es offene Umgebungen $U\ni x$, $V\ni y$ sodaß $U\times V\subset m^{-1}(W)$. Dann ist aber $x\cdot V\subset W$, d.h. $V\subset L_x^{-1}(W)$. Also ist L_x stetig.

Alternativ ist L_x als Verknüpfung der stetigen Abbildungen

$j: G\to G\times G$, $\quad y\mapsto (x,y)$

$m: G\times G\to G$, $\quad L_x = m\circ j$, stetig.

Bem: · Im Prinzip lassen sich alle Konzepte der elementaren Topologie mit der Gruppenstruktur verbinden, wie zum Beispiel die Begriffe der stetigen Abbildungen, des Zusammenhangs, der Kompaktheit. (def. über Heine-Borel)

· Für gewöhnlich verlangt man, dass die Topologie auf G Hausdorffsch ist (d.h. das Trennungsaxiom $T2$ erfüllt, dass je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen). Es ist wohl interessant zu sehen, dass dies gar keine schwerwiegende Annahme ist.

Prop: Sei G eine topologische Gruppe.

(i) Falls Punkte in G abgeschlossen sind (d.h. G ist $T1$) so ist G bereits Hausdorffsch.

(ii) Falls G nicht $T1$ ist, sei H der Abschluß von $\{e\}$. Dann ist H eine normale Untergruppe von G, und G/H, versehen mit der Quotiententopologie ist $T1$, und daher eine Hausdorffsche topologische Gruppe.

Bew: (i) Die wesentliche Idee ist die Ausnutzung der Translationsinvarianz der Topologie, d.h. $L_x U$ ist offen $\Leftrightarrow U$ ist offen, siehe auch Beweis des obigen Lemmas.

- Wir müssen zeigen, dass für beliebige $x \neq y$ Umgebungen $U \ni x$, $V \ni y$ existieren mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen der Translationsinvarianz genügt es, dies für $y = e$ zu zeigen, $x \in G$ beliebig $\neq e$.
- Da G T_1 ist, ist $W = G \setminus \{x\}$ offen (und eine Umgebung von e)
- Wegen der Stetigkeit der Multiplikation $m: G \times G \to G$ ist $m^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von $(e,e) \in G \times G$.
- Nach der Definition der Produkttopologie existieren offene Umgebungen U_1, U_2 von e mit $U_1 \times U_2 \subset m^{-1}(W)$, d.h. $U_1 \cdot U_2 \subset W$.
- Setzen wir $\tilde{U} = U_1 \cap U_2$, so gilt $\tilde{U}\tilde{U} \subset W$, $e \in \tilde{U}$.
- $U = \tilde{U} \cap \tilde{U}^{-1}$ erfüllt dann nebst $U \cdot U \subset W$ auch $U = U^{-1}$.
- U ist eine offene Umgebung von e und xU eine offene Umgebung von x. Wir behaupten, dass $U \cap xU = \emptyset$: Tatsächlich folgt aus $xu_1 = u_2$, ~~dass~~ mit $u_{1,2} \in U$, dass $x = u_2 u_1^{-1} \subset U \cdot U^{-1} = U \cdot U \subset W$ was aber im Widerspruch zu $x \notin W$ steht.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass H eine Untergruppe von G ist, d.h. für alle $x, y \in H$ ist auch $x \cdot y \in H$, und $x^{-1} \in H$.

- Per Definition ist H der Durchschnitt aller abgeschlossenen ~~Umgebungen~~ Mengen, die e enthalten. Mit anderen Worten ist

$$H = G \setminus \bigcup_{\substack{U \not\ni e \\ U \text{ offen}}} U$$

- Angenommen, es gäbe $x, y \in H$ mit $x \cdot y \in G \setminus H$.
- Dann existiert eine offene Umgebung W von xy mit $e \notin W$.
- Andererseits ist $m^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von (x,y) in $G \times G$, also existieren offene Umgebungen U von x und V von y mit $U \times V \subset m^{-1}(W)$, also $U \cdot V \subset W$. Da aber e sowohl in U als auch in V enthalten ist (andernfalls wären sie in $G \setminus H$) folgt ~~aus~~

$$e = e \cdot e \in U \cdot V \subset W$$

was im Widerspruch zu $e \notin W$ steht.

- Der Beweis, dass H unter Inversenbildung abgeschlossen ist, geht analog.

- H ist eine normale Untergruppe, denn für jedes $x \in G$ ist $xHx^{-1} \ni e$ abgeschlossen, so daß $H \subset xHx^{-1}$ gilt. Da dies auch mit $x \to x^{-1}$ gilt, folgt

$$H \subset xHx^{-1} \subset x(x^{-1}Hx)x^{-1} = H.$$

also $xHx^{-1} = H$.

- Damit ist also G/H eine Gruppe und man prüfe als Übung nach, dass die Gruppenstruktur mit der Quotiententopologie ($U \subset G/H = \pi(G)$ ist offen $\iff$ $\pi^{-1}(U)$ ist offen in G) verträglich ist, dass also G/H eine topologische Gruppe ist.

- Um zu zeigen, dass G/H T_1 ist genügt es dann zu zeigen, dass $[e] = e \cdot H = H \in G/H$ abgeschlossen ist. Dies folgt aber aus der Tatsache, dass ($G = H \uplus$ übrige Nebenklassen) und dass $\pi^{-1}(G/H \setminus [e]) = G \setminus H$ per Definition offen in G ist.

$\square$

Der Beweis dieser Prop. gibt einen kleinen Eindruck davon, wie man Pathologien aus der topologischen Struktur ausdividieren kann. Wir zeigen nun noch eine Konsequenz aus der Kompaktheit einer top. Gruppe, welche für die Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes nützlich ist.

<u>Prop:</u> Sei G eine kompakte topologische Gruppe und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion (wir schreiben $f \in C(G)$). Dann ist f <u>gleichmässig stetig</u> in dem Sinne, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine (symmetrische) Umgebung $V \ni e$ ($V = V^{-1}$) existiert so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\forall\, x, y \in G \quad \text{mit} \quad x^{-1}y \in V \quad \text{oder} \quad yx^{-1} \in V$$

<u>Bew.</u> • Die Aussage ist äquivalent zu

$$|f(xz) - f(x)| < \varepsilon$$

und $$|f(zx) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall\, x \in G,\ z \in V.$$

• Betrachte hierzu die Funktion

$$F : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$F : (x, z) \longmapsto f(xz) - f(x)$$

• Diese Funktion ist als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig mit $F(x,e) = 0$ für jedes $x \in G$. Daher gibt es für **jedes** $x \in G$ Umgebungen $U_x \ni x$, $V_x \ni e$ so daß

$$|F(x', z)| < \varepsilon \qquad \forall\, (x', z) \in U_x \times V_x.$$

OBdA sei $V_x = V_x^{-1}$.

• Da $\bigcup_{x \in G} U_x = G$ und G kompakt ist, existieren endlich viele $(x_i)_{i=1,\dots N}$ s.d. $G = \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}$

Setzt man dann $V = \cap V_{x_i} \ni e$ so ist für jedes $x' \in G$ und $z \in V$, $x' \in U_{x_i}$ für ein i und $z \in V_{x_i}$, also

$$|F(x', z)| = |f(x'z) - f(x')| < \varepsilon$$

(Die Stetigkeit links kann entweder im Anschluß durch eine analoge Argumentation sichergestellt werden, oder direkt durch betrachten von

$$|f(xz) - f(x)| + |f(zx) - f(x)|$$

an Stelle von F.) $\square$

§4.2. Lie-Gruppen und ihre Lie-Algebren

Die folgende Definition wurde bereits im Kapitel 1 gegeben:

Def: Eine Lie-Gruppe ist eine mit einer kompatiblen differenzierbaren Struktur versehene topologische Gruppe, derart dass die Gruppenoperationen m, ι differenzierbare Abbildungen sind.

Bem: Bekanntermaßen kann man bei der Differenzierbarkeit Unterscheidungen treffen im Grad und Definitionsbereich ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Es stellt sich heraus, dass im Falle der Lie-Gruppen der Grad der Differenzierbarkeit irrelevant ist, da C^1 bereits C^∞ und reell analytisch impliziert. (es ist sogar so, dass unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen schon die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit differenzierbarkeit impliziert. Dies ist die Aussage von Hilbert 5^{th} problem, auf die genaue Formulierung will ich also nicht eingehen)

Die Unterscheidung zwischen reell und komplex ist hingegen wichtig und für die Klassifikation und Darstellungstheorie sogar von zentraler Bedeutung.

Zunächst einmal reden wir nur von reellen Mannigfaltigkeiten.

~~Wir werden~~ · Differentialkalkül auf Mannigfaltigkeiten

Zur Erinnerung Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist ein (Hausdorffscher, zweitabzählbarer) topologischer Raum M, welcher mit einer ~~diff~~ (verträglichen) differenzierbaren Struktur ausgestattet ist, d.h. einer Äquivalenzklasse von Atlanten-Systeme $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von offenen Mengen U_α mit $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ und stetigen Abbildungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, welche Homöomorphismen auf ihr Bild sind derart dass $\forall \alpha, \beta \in A$

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

differenzierbare Abbildung (von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$) sind.

- Wesentliches Beispiel sind Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, welche ~~lokal als~~ nach dem Satz über die Umkehrabbildung lokal als Verschwindungsort glatter Funktionen oder auch als Graphen glatter Funktionen dargestellt werden können.

- Die wesentliche Idee der Differenzierbarkeit ist die Approximation glatter Funktionen durch lineare Algebra. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^m$ und einen Punkt $p \in U$ spielt sich diese lineare Abbildung im umgebenden Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ab, welchen wir uns als "an p angeheftet" vorstellen und den Tangentialraum an U in p bezeichnen – $T_pU = \mathbb{R}^n$.

Entgegen gegenteiliger Gerüchte ist diese Definition ganz kanonisch, und nicht "abhängig von der Einbettung $U \subset \mathbb{R}^n$".

- In der Tat liefert ja für einen Diffeomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \Phi : & U & \xrightarrow{\sim} & V \\ & \cap & & \cap \\ & \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

das Differential $D\Phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ eine kanonische Identifikation der beiden Vektorräume, so dass dieser dann als "abstrakter Vektorraum wohldefiniert" ist.

- Unter Ausnutzung der Tatsache, dass
  - diese Definition "lokaler Natur" ist, und dass
  - "abstrakte Mannigfaltigkeiten" gerade so definiert sind, dass sie "lokal diffeomorph zu offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind",

definiert man dann allgemein, für M eine diff'bare Mf. und $p \in M$, ~~Φ~~ den Tangentialraum zu M in p als

$$T_pM := T_{\varphi(p)}\, \varphi(U) \cong \mathbb{R}^n$$

für eine beliebige Karte (U, φ) um p.

- Obwohl diese Definition im Prinzip durchaus zufriedenstellend ist, hat es sich allgemein eingebürgert, auch bei differentialgeometrischen Argumenten dem algebraischen Standpunkt den Vorzug zu geben, in dem die Algebra (Garbe) der Funktionen auf M die erste Stelle einnehmen. Man erspart sich dadurch das "Rechnen in Karten".

Once the dust of technicalities has settled, the most important geometric notion on a differentiable manifold is the tangent space, one possible definition being as follows:

Def: • If M is diff. mf., and $p \in M$, the germs of functions at p, $\mathcal{F}_p$ are equivalence classes of C^∞-functions in nbhd. of p modulo equality ~~of~~ on a smaller nbhd:

$$\mathcal{F}_p = \{ f : U \to \mathbb{R},\ U \ni p \text{ nbhd},\ f \in C^\infty \} /_\sim$$

$$f \sim g \iff \exists\, W \ni p \ (W \subset U \cap V,\ f : U \to \mathbb{R},\ g : V \to \mathbb{R})$$
$$\text{s.t. } f|_W = g|_W .$$

(while $\mathcal{F}_p$ is a ring;)

• the tangent space at p is the space of $\mathbb{R}$-linear maps from $\mathcal{F}_p$ to $\mathbb{R}$ satisfying Leibnitz rule w.r.t. multiplication.

$$T_pM = \{ v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}),\ v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \}$$

[In the favorable C^∞ case, this definitions agrees with the algebraic tangent space

$$(m_p / m_p^2)^*$$

where $m_p = \{ f \in \mathcal{F}_p,\ f(p) = 0 \}$ is the maximal ideal]

With T_pM under our belts, we can define

- the differential of a differentiable map
$$F: M \to N$$
of differentiable manifolds (not necessarily of the same dimension) as the linear map between tangent spaces:
$$(DF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$
$$DFv(g) = v(F^*g) = v(g \circ F)$$
$$g \in \mathcal{F}_{F(p)} \qquad v \in T_pM.$$

- the most important version of which is perhaps the notion of tangent vector to a curve
$$\gamma : [-1,1] \to M$$
$$\dot{\gamma}(0) = (D\gamma)_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Important remark: any vector field at $p \in M$ arises as tangent vector to some curve through p

- the notion of C^∞-vector fields: $X \in \mathcal{X}(M)$ is the data of $X_p \in T_pM$ for every $p \in M$ such that
$$X(f)(p) = X_p(f) \in C^\infty(M)$$
$$\forall f \in C^\infty(M).$$

(where we are using restriction map
$$C^\infty(M) \to \mathcal{F}_p$$

Eigenschaften der Ableitung

1) $\mathcal{D}(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$

2) $\mathcal{D}$ (konstante Abbildung) $= 0$

3) $\mathcal{D}$ (linearen Abbildung) $=$ die lineare Abbildung selbst

4) Falls $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} O$ gilt

$$\mathcal{D}(G\circ F)_p = \mathcal{D}G_{F(p)} \circ \mathcal{D}F_p$$

(Kettenregel)

5) Für $M = M_1 \times M_2$ und $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ ~~gilt~~ ist

$$T_pM = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$$

Dann gilt für

$$F: M \to N_1 \times N_2 \quad , F = F_1 \times F_2$$

$$\mathcal{D}F_p = (\mathcal{D}F_1)_p \oplus (\mathcal{D}F_2)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

"Umgekehrt" sei $F: M_1 \times M_2 \to N$. Dann definieren wir für $p_{1,2} \in M_{1,2}$:

$$F_{p_1} : M_2 \to N \qquad F_{p_1}(p_2) = F(p_1, p_2)$$

$$F_{p_2} : M_1 \to N \qquad F_{p_2}(p_1) = F(p_1, p_2)$$

und es gilt die "Produktregel".

$$DF_p = (DF_{p_2})_{p_1} + (DF_{p_1})_{p_2}$$

Beispiel: • $m: G \times G \to G$

$$L_g(h) = m(g,h) \qquad R_h(g) = m(g,h)$$

Für $x \in T_gG$ $y \in T_hG$ gilt dann

$$(Dm)_{(g,h)}(x,y) = (DL_g)_h(y) + (DR_h)_g(x) \in T_{g\cdot h}G$$

• Durch Verkettung mit $\iota: G \to G$ erhalten wir

$$m(g, \iota(g)) = e = \text{const.}$$

und daher für $x \in T_gG$ die Gleichung

$$0 = (DL_g)_{\iota(g)}(D\iota)_g(x) + (DR_{\iota(g)})_g(x) \in T_eG$$

was, ~~ausgewertet~~ bei $g = e$, ~~ist dann~~ ~~~~ zu

$$0 = (D\iota)_e(x) + x \in T_eG$$ wird, d.h. $(D\iota)_e = -id$.

Die Lie-Klammer als Derivation

- Important observation: $\mathcal{X}(M)$ has the structure of a Lie algebra: a vector space endowed with an antisymmetric bilinear map statisfying Jacobi identity.

- $[\cdot,\cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$

- $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

- Obviously, $[X,Y] = -[Y,X]$, and $\mathbb{R}$-linearity in X,Y. But it's non-trivial to check the Leibnitz-rule

$$
\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(f)g + fY(g)) \\
&\quad - Y(X(f)g + fX(g)) \\
&= X(Y(f))g - Y(X(f))g \\
&\quad + X(Y(g))f - Y(X(g))f \\
&\quad + X(g)Y(f) + X(f)Y(g) - Y(g)X(f) - Y(f)X(g) \\
&= ([X,Y]f)g + ([X,Y]g)f
\end{aligned}
$$

- When $[\cdot,\cdot]$ is defined in terms of commutators, the Jacobi identity is trivial, but of course the point is that we ~~can~~ define Lie algebras abstractly (~~thinking as as as~~