<u>Notation:</u> $\mathrm{Res}_H^G V$. (ρ wird dazu gedacht.)

Offensichtlich ist $\mathrm{Res}_H^G V$ nicht notwendigerweise irreduzibel, selbst wenn V dies ist. (z.B. $H = \{e\}$.) Etwas weniger offensichtlich ist, dass wir in der Situation $H \subset G$ auch in natürlicher Weise aus einer Darstellung (W, σ) von H eine Darstellung von G "induzieren" können.

Wir wählen dazu ein vollständiges System $R \ni r$ von Repräsentanten der Nebenklassen G/H, d.h. wir schreiben

$$G/H = \dot{\bigcup_{r \in R}} r \cdot H$$

(Beachte dass diese Schreibweise R nicht eindeutig festlegt, gegebenenfalls muß man die Unabhängigkeit von der Wahl verifizieren. Jedenfalls ist es vernünftig, H durch $e \in R$ vertreten zu lassen).

Nach Definition der Nebenklassen können wir dann für jedes $g \in G$, $r \in R$ in eindeutiger Weise $r^{(g)}$ und $h^{(r,g)} \in H$ finden, sodass gilt

$$g r = r^{(g)} h^{(r,g)} \qquad r^{(g)} \in R \qquad h^{(r,g)} \in H.$$

Sei nun (W, σ) eine Darstellung von H. Wir führen zunächst $|G/H| = |R|$ isomorphe Kopien von W ein,

---

Beachte, dass $r^{(h)} \neq r$ nicht notwendigerweise selbst für $h \in H$, ausser H ist normale Untergruppe.

die wir durch $r \in R$ indizieren (mit $W_e \cong W$) und definieren den Vektorraum, auf dem die induzierte Darstellung operieren soll, ~~als~~ durch

$$\mathrm{Ind}_H^G W := \bigoplus_{r \in R} W_r$$

Die Wirkung ρ von G auf diesen Raum erklären wir schrittweise:

- Zunächst einmal erledigen wir die Darstellung von H auf $W = W_e$ durch die gegebene Darstellung σ: $\rho(h)(w) = \sigma(h)(w)$ $h \in H, w \in W$
- Sodann identifizieren wir für $r \in R$

  $$\rho(r) : W \to W_r$$

  als den Isomorphismus $W \cong W_r$ den wir durch Anschreiben eines Index ~~notieren~~ abkürzen können:

  $$\rho(r)(w) = w_r$$

- Nun liegt der Rest durch die Homomorphismeneigenschaft schon fest: Für $g \in G$, $w_r \in W_r \subset \mathrm{Ind}_H^G W$ müssen wir haben

$$\rho(g)(w_r) = \rho(g)\,\rho(r)\,(w)$$

$$= \rho(gr)\,w = \rho(r^{(g)})\,\rho(h^{(r,g)})\,w$$

$$= \rho(r^{(g)})\;\sigma(h^{(r,g)})\,w =$$

$$= \left(\sigma(h^{(r,g)})\,w\right)_{r^{(g)}}.$$

- Es bleibt dann noch zu prüfen, dass dies ein Homomorphismus $\rho : G \to GL(\mathrm{Ind}_H^G W)$ ist, ~~was~~ was wir aber als Übung lassen.

Ein Ausdruck der Frobenius Reziprozität ist die Aussage, dass falls V eine Darstellung von G und W eine Darstellung von H ist, dann gilt:

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G V) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V)$$

Beweisskizze: • Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V)$ erhalten wir ein Element von $\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G V)$ offensichtlich durch Einschränken von φ auf $W \cong W_e \subset \bigoplus_{r \in R} W_r = \mathrm{Ind}_H^G W$

• Sei umgekehrt $\psi \in \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G V)$. Zur Verträglichkeit mit der G-Wirkung müssen wir für die Fortsetzung $\tilde\psi$ nach $\mathrm{Ind}_H^G W \ni w_r$ setzen:

$$\tilde\psi(w_r) = \rho(r)\,\psi(w)$$

und damit liegt bereits alles fest.

Ein anderer Ausdruck ist die Formel

$$(\chi_W, \chi_{\mathrm{Res} V})_H = (\chi_{\mathrm{Ind} W}, \chi_V)_G$$

die man ~~durch~~ nach Rückführen auf irreduzible W und V sofort aus der obigen Identifikation erhält.

Eine weitere Übung ist

$$\chi_{\mathrm{Ind} W}(g) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1} g r \in H}} \chi_W(r^{-1} g r)$$

Example of use of characters

$\underline{S_3}$ $\qquad |G| = 6$

	$\overset{}{1}$	$\overset{3}{(12)}$	$\overset{2}{(123)}$
ρ_+	1	1	1
ρ_-	1	-1	1
ρ_2	2	0	-1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 \otimes \rho_2 = \ ?$$

$$(\chi_2, \chi_2^2) = (4\cdot 2 - 2)\tfrac{1}{6} = \underline{1}$$

$$(\chi_+, \chi_2^2) = (4 + 2)\tfrac{1}{6} = 1$$

$$(\chi_-, \chi_2^2) = (4 + 2)\tfrac{1}{6} = 1$$

$$\rho_2 \otimes \rho_2 = \rho_2 \oplus \rho_+ \oplus \rho_- .$$

Lie groups and Representation Theory – ~~Lecture 4~~ Kapitel 3

Representation theory of the symmetric group ~~II~~

~~The irreducible representations~~

Motivation:

- a large class of finite groups on which the general theory we have developed can be put to work in a highly non-trivial way. *
- any finite group is a subgroup of a symmetric group (this does not help in general to find and describe irreps, however for alternating group it does; simple groups).

* what's more, irreps and characters can be described explicitly.

- useful for working with irreps of classical groups. (Schur-Weyl duality).
- It's good to be aware of the theory of symmetric functions. Although purportedly "complete", new applications are still being found (e.g. in last decade in GW theory of toric manifolds).

§3.1 Bereitstellung

Facts and Definitions

- Let n be a positive integer. The symmetric group on n elements, denoted S_n is the group of bijections of the set $N = \{1,2,\dots n\}$

- The order of S_n is $|S_n| = n!$

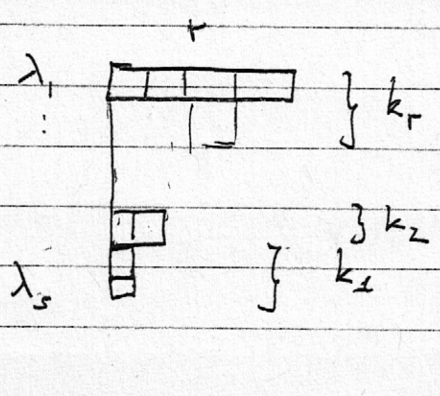
- If $\sigma \in S_n$, $N = \{1,2,\dots n\}$ decomposes under the action of the subgroup generated by σ into orbits known as cycles. Letting k_i be the number of cycles of length i, we associate to σ its cycle type

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots k_n)$$

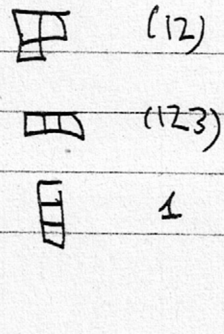
$$\sum_{i=1}^{r} i k_i = n$$

- Two elements of S_n are conjugate iff they have the same cycle type.
  We denote by $C_{\vec{k}}$ the conjugacy class of cycle type $\vec{k}$.

- We visualize a cycle type (and hence, conjugacy class) by a Young diagram



e.g. S_3



Wir behaupten, dass es

- We know from the general theory that S_n has as many irreducible representations as conjugacy classes. ~~It~~ is "natural" to try to label them by Young diagram also.
- For this purpose, it turns out to be better to think of a Young diagram in terms of a partition.

$$\lambda = \left(\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_s \right)$$

a sequence of non-increasing integers of sum n

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = n.$$

- So, we want to describe irreps of S_n, $(V_\lambda, \rho_\lambda)$ associated with partitions of n and to give a formula for the value of the character

$$\chi_{V_\lambda}(C_{\vec{k}}) = \chi_\lambda(\vec{k})$$

on the conjugacy class of cycle type $\vec{k}$.

- In other words, we want to turn Young diagrams into an inner product space.

- another fact: S_n is generated by transpositions. The number mod 2 of transpositions ~~is invariant~~ needed to write any given permutation σ is invariant and known as the signature of σ

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1. \qquad \text{even/ odd permutation.}$$

<u>Another fact</u>: S_n is generated by transpositions.

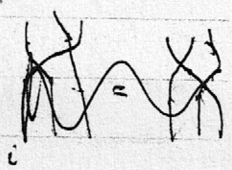
→ This can be proved for instance by induction on n.

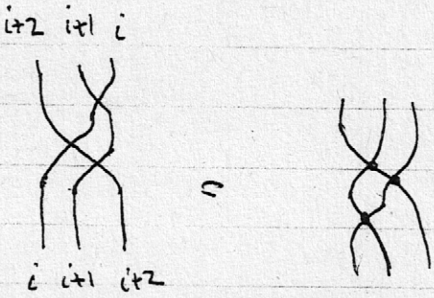
→ Abstractly S_n is the group generated by transpositions

$$t_i : \{1, 2, \ldots\ i, i+1, \ldots\ n\} \to \{1, 2, \ldots\ i+1, i, \ldots n\}$$

with Relations: $\cdot\ t_i^2 = e$; $t_i t_j = t_j t_i \quad |i-j| > 1$

$$t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$$





Invariance of signature follow from homogeneity of relations mod 2.

<u>Strategie</u> · Wir assoziieren zu jedem Young Diagramm eine Unterdarstellung der linksregulären Darstellung durch Projektion aus der Gruppenalgebra.

· Dann vergewissern wir uns, dass zwei verschiedene Young Diagramme nicht-isomorphe Darstellungen geben und sie alle irreduzibel sind.

· Aus der allgemeinen Theorie folgt dann, dass wir alle Darstellungen gefunden haben.

· Zum Schluss geben wir einen Algorithmus zur Berechnung der Charaktere an.

§3.2. Die irreduziblen Darstellungen

- Unser Ausgangspunkt ist die Gruppenalgebra

$$\mathbb{C}S_n = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)\,\sigma, \quad f(\sigma) \in \mathbb{C} \right\}$$

ausgerüstet mit Linksmultiplikation als die reguläre Darstellung L von S_n.

- Wir werden nun für jede Partition λ von n (welche wir uns als Young-Diagramm vorstellen) eine Unterdarstellung von L definieren als das Bild unter Rechtsmultiplikation mit einem speziellen Element von $\mathbb{C}S_n$, dem sogenannten Young Symmetrisierer $c_\lambda \in \mathbb{C}S_n$:

$$V_\lambda := Y_\lambda(\mathbb{C}S_n) := \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda .$$

(Da Links- und Rechtsmultiplikation vertauschen, wäre $\mathbb{C}S_n \cdot x$ ein invarianter Unterraum von $(\mathbb{C}S_n, L)$ für jedes Element $x \in \mathbb{C}S_n$. $x = \sigma \in S_n$ beispielsweise tut gar nichts. Wir wählen c_λ speziell so daß V_λ irreduzibel ist.)

- Zur Definition von c_λ sowie zur Durchführung der kombinatorischen Beweise führen wir noch das Konzept eines Young-Tableaus der Form λ ein als ein mit den Zahlen $1, \dots n$ gefülltes Young-Diagramm λ.

Z.B. ist

1	3	4
5	2	

ein Young Tableau der form (3,2) als Partition von 5.

- Etwas formaler ist ein Young-Tableau der Form λ eine Zerlegung von N in disjunkte und geordnete Mengen

$$N = t_1 \cup \dots \cup t_s$$

der Mächtigkeit $|t_i| = \lambda_i$

Das kanonische Tableau sei das zur offensichtlichen Zerlegung gehörige und ein standard Tableau habe monoton wachsende Zeilen und Spalten.

- Wir denken uns ein Tableau als die Permutation, die es aus dem kanonischen erzeugt, "auf die Form λ gebracht".

$$T = \begin{matrix} T(1) \dots & T(\lambda_1) \\ T(\lambda_1+1) \dots & \\ \vdots & \\ T(n) \dots & \end{matrix}$$

- S_n wirkt auf die Tableaus der Form λ, {und der Vektorraum der von den Tableaus aufgespannt wird, ist isomorph zu $\mathbb{C}S_n$}. Ein (schwer zu beweisendes) Korollar wird sein, dass unter diesem Isomorphismus V_λ von den Standard-Tableaus aufgespannt wird.

- Für ein Young-Tableau $T = \{t_1, \dots t_s\}$ definieren wir nun den <u>Zeilen-Stabilisator</u> als die Untergruppe

$$P_T = \{\pi \in S_n,\ \pi(t_j) = t_j \ \forall j \text{ (als ungeordnete Menge)}\}$$

$$\cong \prod_{j=1}^{s} S_{\lambda_j} \qquad (\text{Produkt von Gruppen})$$

und (analog) den <u>Spalten-Stabilisator</u> als den Zeilen-Stabilisator des transponierten Tableaus

$$Q_T = \{\xi \in S_n,\ \xi(t_j^*) = t_j^*\} \cong \prod_{j=1}^{s^*} S_{\lambda_j^*}$$

$$\Big\lceil \quad \lambda_j^* = |\{i, \lambda_i \geq j\}|$$

und entsprechende Definition für T^*

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}\right)^* = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \Big\rfloor$$

Man beachte, dass P_T, Q_T als abstrakte Gruppen nur von λ abhängen, die Einbettung in S_n aber auch von T.

Wir halten fest, dass für $T' = \sigma T$ $(\sigma \in S_n)$

$$P_{T'} = \sigma P_T \sigma^{-1}$$

$$Q_{T'} = \sigma Q_T \sigma^{-1}$$

(Betrachte z.B. T das kanonische Tableau, $T' = \sigma = \begin{array}{ccc} \sigma(1) & \cdots & \sigma(\lambda_1) \\ \vdots & & \\ \sigma(n) & & \end{array}$

$$\pi' T' = \begin{array}{|c|c|c|} \pi'\sigma(1) & \cdots & \pi'\sigma(\lambda_1) \\ \vdots & & \\ \pi'\sigma(n) & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \sigma(\pi(1)) & \cdots & \sigma(\pi(\lambda_1)) \\ \vdots & & \\ \sigma\pi(n) & & \end{array}$$

~~Frisch~~ Zeilen

π stabilisiert die Zeilen des kanonischen Tableaus

$\Leftrightarrow$ $\pi' = \sigma\pi\sigma^{-1}$ stabilisiert die Zeile von T'.)

Wir konzentrieren uns nun auf das kanonische Tableau und lassen das Subskript weg.

Setze:

$$p = \sum_{\pi \in P} \pi \quad \in \mathbb{C} S_n$$

$$q = \sum_{\xi \in Q} \operatorname{sgn}(\xi)\, \xi \quad \in \mathbb{C} S_n$$

und den Young-Symmetrisierer

$$c = c_\lambda = p \cdot q \quad \in \mathbb{C} S_n$$

Der Schlachtruf ist: "Antisymmetrisiere über die Spalten, symmetrisiere über die Zeilen!" und der Satz ist:

Theorem: $\exists\, N \in \mathbb{Q}$ so daß $c_\lambda^2 = N c_\lambda$, d.h. bis auf ein skalares Vielfache ist c_λ eine Projektion, und

$$V_\lambda = \mathbb{C} S_n \cdot c_\lambda$$

aufgefaßt als Unterdarstellung von $(\mathbb{C}S_n, L)$ ist irreduzibel. ~~Alle~~ Jede Irrep von S_n ~~sind~~ ist isomorph zu solch einem V_λ für ein eindeutiges Young-Diagramm λ.

<u>Bemerkung:</u> Hätten wir statt dem kanonischen Tableau T ein anderes Tableau $T' = \sigma T$ benutzt, so wäre wie oben festgehalten

$$c_{\lambda,\sigma} = \sigma c_\lambda \sigma^{-1}$$

und daher

$$V_{\lambda,\sigma} = \mathbb{C}S_n \cdot c_{\lambda,\sigma} = \underbrace{\underbrace{\mathbb{C}S_n \sigma}_{=\mathbb{C}S_n} c_\lambda}_{=V_\lambda} \sigma^{-1} = V_\lambda \cdot \sigma^{-1}$$

durch Rechtsmultiplikation mit σ^{-1} isomorph zu V_λ als Darstellung von S_n, im allgemeinen aber nicht identisch mit V_λ als Unterraum von $\mathbb{C}S_n$.

Aufgrund der allgemeinen Theorie des Kapitels 2 ist ja der Raum der S_n-Einbettungen von V_λ in $\mathbb{C}S_n$ ein Vektorraum der Dimension $\dim V_\lambda$ (Lemma von Schur). Wir werden zeigen, dass dieser Raum von

$$\{ \text{Rechtsmultiplikation mit } \sigma^{-1},\ \sigma T \text{ Standard-Tableau} \}$$

aufgespannt wird.

Zur Vorbereitung des Beweises halten wir zunächst fest, dass

$$\forall\, \pi \in P \; : \; \pi p = p \pi = p$$

$$\forall\, \xi \in Q \; : \; \xi q = q \xi = \operatorname{sgn}(\xi) p$$

und daher:

$$\forall\, \pi \in P, \xi \in Q \; : \; \pi c \xi = \pi p q \xi = \operatorname{sgn}(\xi) \cdot c$$

<u>Lemma 1</u> Sei $x \in \mathbb{C} S_n$ derart, dass $\pi x \xi = \operatorname{sgn}(\xi)\, x$ $\forall\, \pi \in P, \xi \in Q$. Dann existiert eine komplexe Zahl α derart dass

$$x = \alpha \cdot c$$

<u>Bew</u>. Die wesentliche Beobachtung ist, dass $P \cap Q = \{e\}$.
(Man kann eine Permutation der Spalten nicht durch eine Zeilenoperation kompensieren.)

- Daher tritt in $c = \sum_{\pi, \xi} \operatorname{sgn}(\xi)\, \pi \xi$ jedes $\pi \xi$ genau einmal auf, und zwar mit dem Koeffizienten $c(\pi \xi) = \operatorname{sgn}(\xi)$. (Insbesondere ist $e \cdot c = c \neq 0$, also $\mathbb{C} S_n c \neq 0$.)

- Schreiben wir nun für x wie angenommen,

$$x = \sum x(\sigma)\, \sigma = \sum_{\pi, \xi} x(\pi \xi)\, \pi \xi + \sum_{\sigma \notin PQ} x(\sigma) \cdot \sigma$$

$$\left(x(\pi \sigma \xi) = x(\sigma) \operatorname{sgn}(\xi) \;\; \forall\, \xi \in Q, \; \pi \in P. \right)$$

so folgt zunächst aus $\pi x = x \;\forall\, \pi \in P$, dass $x(\pi\xi) = x(\xi)$ $\forall\, \pi, \xi \in P, Q$ ($\pi\sigma \notin PQ$ falls $\sigma \notin PQ$), und dann aus $x\xi = \mathrm{sgn}(\xi)\, x$ in analoger Weise $x(\xi) = \mathrm{sgn}(\xi)\, x(e)$.

Mit $\alpha = x(e)$ folgt daher $x = \alpha \cdot c$ falls wir noch zeigen, dass $x(\sigma) = 0 \;\forall\, \sigma \notin P \cdot Q$.

Zu diesem Zwecke betrachten wir (für $\sigma \in S_n$) das Young Tableau $T' = \sigma T$ und vergleichen es mit dem gegebenen (kanonischen) T:

(*) <u>Taubenschlagprinzip!:</u> Falls alle Elemente von $N = \{1, 2, .. n\}$ die in der gleichen Zeile von T vorkommen, in verschiedenen Spalten von T' sitzen, so können wir zunächst die Spalten von T' so umordnen, dass alle Elemente von N, die in der gleichen Zeile von T sitzen, ebenfalls in der gleichen Zeile von $\xi' T'$ sitzen, für geeignetes $\xi' \in Q_{T'}$. Dann können wir durch Umordnen der Zeilen von T erreichen, dass

$$\pi T = \xi' T' \qquad \text{mit } \pi \in P = P_T$$

Nach obigen Bemerkungen ist $\xi' = \sigma \xi \sigma^{-1}$, $\xi \in Q$, $T' = \sigma T$ also

$$\pi = \sigma \xi \quad \Rightarrow \quad \sigma = \pi \xi^{-1} \qquad \pi \in P,\ \xi^{-1} \in Q.$$

$$\Rightarrow \sigma \in PQ$$

Ist also $\sigma \notin PQ$, dann existieren Elemente $a, b \in N$, die in der gleichen Zeile von T ~~oder~~ und in der gleichen Spalte von T' sitzen. Damit gilt für die Transposition τ von a und b:

$$\tau \in P$$

$$\tau \in Q_{T'}, \quad \text{i.e.} \quad \sigma^{-1}\tau\sigma \in Q$$

also ist für solche σ

$$x(\sigma) = x(\tau^2\sigma) = x(\tau\sigma\,\sigma^{-1}\tau\sigma)$$

$$= x(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma) = -x(\sigma) = 0.$$

$\square_{\text{Lemma 1}}$

Ganz am Schluß brauchen wir noch ein zweites Lemma, welches ~~das~~ die folgende Ordnung auf den Partitionen benutzt:

Seien $\lambda = \{\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r\}$

und $\mu = \{\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_s\}$

Zwei Partitionen (von n) dann schreiben wir $\lambda > \mu$ falls die erste nicht-verschwindende $\lambda_i - \mu_i > 0$.

i.e. $\lambda_1 = \mu_1 \ldots \lambda_{i-1} = \mu_{i-1} \quad \lambda_i > \mu_i$

(alphabetische Ordnung).