§2.3. Charaktere

Als ersten Schritt auf dem Weg zu unserem Ziel, alle irreduziblen Darstellungen endlicher Gruppen zu beschreiben, halten wir fest:

Lemma: Sei $\rho: G \to GL(V)$ eine (nicht-triviale) Darstellung einer endlichen Gruppe G. Dann existiert in V ein endlich-dimensionaler invarianter Unterraum (eine endlich-dim. Unterdarstellung) Insbesondere ist jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe endlich-dimensional.

Bew: ist simpel, aber höchst interessant: Sei $v \in V$, $v \neq 0$. Dann ist $v \cdot \mathbb{C} \subset V$ ein ein-dimensionaler Unterraum, dessen "G-orbit",

$$\rho(G)(v\mathbb{C}) = \sum_{g \in G} (\rho(g)v) \cdot \mathbb{C} \quad \text{(keine direkte Summe!)}$$

$$= \langle \rho(g)v,\ g \in G \rangle_{\mathbb{C}} \quad \text{(erzeugter Vektorraum)}$$

ein endlich-dimensionaler invarianter Unterraum von V ist. □

Das Auftreten "G-indizierter formaler Linearkombinationen" kann nun in natürlicher Weise die Einführung der folgenden universellen Darstellung von G motivieren:

~~Main Theorem in representation theory of finite groups~~

Def. Let G be a finite group. The group algebra of G, denoted $\mathbb{C}G$ is the vector space of functions

$$f : G \to \mathbb{C}$$

on G, with product defined via convolution

$$f * f'(g) = \cancel{\sum_{g \in G}} \sum_h f(h) f'(h^{-1}g)$$
$$= \sum f(gh^{-1}) f'(h).$$

Equivalently, we can define $\mathbb{C}G$ as the vector space of formal linear combinations of elements of G

$$f = \sum f(g)\, g$$

with product inherited from G.

$$\cancel{f f' = \sum_{g,g'} f(g) f'(g')\, gg'} \qquad \cancel{gg' = h}$$

$$\cancel{= \sum}$$

$$f \cdot f' = \sum_{h,h'} f(h) f'(h')\, hh' \qquad hh' = g$$
$$h' = h^{-1} g$$

$$= \sum_{h,g} f(h) f'(h^{-1}g)\, g$$

<u>Beobachtung</u> $\mathbb{C}G$ ist in natürlicher Weise mit zwei Darstellungen von G ausgestattet, welche links- und rechtsreguläre Darstellung genannt werden.

$$L(g)f = g\cdot f = \sum_{h\in G} f(h)\, gh = \sum_{h\in G} f(g^{-1}h)\, h$$

$$\text{i.e. } \big(L(g)f\big)(h) = f(g^{-1}h)$$

$$R(g)f = fg^{-1} = \sum f(hg)\, h$$

$$R(g_1g_2)\, f = f g_2^{-1} g_1^{-1} = R(g_1)\left(f g_2^{-1}\right) = R(g_1)R(g_2) f.$$

("Psychologie").

<u>Vereinbarung</u> $\mathbb{C}G$ ist die Gruppenalgebra von G, versehen mit der linksregulären Darstellung.

<u>Man zeigt (Übung)</u> Jede irreduzible Darstellung von G ist Unterdarstellung von $\mathbb{C}G$.

<u>Genauer gilt der Satz:</u> ⊗ Eine endliche Gruppe hat endlich viele Isomorphismenklassen von irreduziblen Darstellungen $V_1 \ldots V_k$, welche alle in der Zerlegung der linksregulären Darstellung auftreten. Genauer ist

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i \otimes \mathbb{C}^{\dim V_i}$$

Zur Ausreduktion von $\mathbb{C}G$ und anderer Darstellungen benutzt man Charaktere und zugehörige Projektoren. (Lemma von Schur).

⊗ über die Zerlegung der regulären Darstellung.

Def. Let (V,ρ) be a representation (finite-dim.) of G. The character $\chi_{(V,\rho)}$ (or χ_V, or χ_ρ or just χ) is the complex valued function

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}_V\, \rho(g)$$

The idea of the character is that it captures invariant information about the representation, such as stored in the eigenvalues of $\rho(g)$. The main property is (*)

Lemma χ_V is a class function – i.e. it is constant on conjugacy classes in G.

Pf.

$$\chi_V(h^{-1}gh) = \mathrm{tr}\ \rho(h^{-1}gh)$$
$$= \mathrm{tr}\ \rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h) = \mathrm{tr}\ \rho(g)$$
$$= \chi_V(g).$$

Lemma. Let V_1, V_2 be representations of G. Then

$$\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$$

$$\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2} \quad \text{(point wise addition and multiplication)}$$

$$\chi_{V^*} = \overline{\chi_V} \quad \text{(complex conjugate!)}$$

(*) obviously, $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$ as a function on conjugacy classes if $V_1 \cong V_2$. Our main task is to show that this is only if statement.

Pf: Only non-trivial is the last statement. It follows on account of the fact that because G is finite, all eigenvalues are roots of unity ~~as~~ where inverse and complex conjugation coincide.

We like to put characters into tables. E.g. S_3

	1	(12)	(123)
ρ_+	1	1	1
ρ_-	1	-1	1
ρ_2	2	0	-1

§2.4. Orthogonalitätssätze

(1st) Orthogonality theorem.

Let V_1, V_2 be irreducible representations of a finite group G. Then

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_1(g)\, \chi_2(g) = \begin{cases} 1 & \text{if } V_1 \cong V_2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{C \text{ conj. class}} |C|\, \bar{\chi}_1(C)\, \chi_2(g)$$

Proposition. Let W be a representation of G. Then

$$\pi : W \to W$$

$$\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

is the projector onto the invariant subspace of G.

$$W^G = \{ w \in W, \ \rho(g) w = w \ \forall g \in G \}$$

Pf. $\pi(W) \subset W^G$

$$\rho(h)\, \pi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg)\, w$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\, w$$

$$= \pi(w).$$

$W^G \subset \pi(W)$ $\qquad w = \frac{1}{|G|} \sum \rho(g)\, w = \pi(w).$

$\pi^2 = \pi.$ $\leftarrow$ Nachrechnen

To prove the orthogonality theorem, we apply this proposition to the representation $V_1^* \otimes V_2$. Schur's Lemma says that

$$(V_1^* \otimes V_2)^G = \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 0 & V_1 \not\cong V_2 \\ \mathbb{C} & V_1 \cong V_2 \end{cases}$$

So $$\pi = \frac{1}{|G|} \sum \rho_1^*(g) \otimes \rho_2(g)$$

is 0 if $V_1 \not\cong V_2$, and a rank 1 projector if $V_1 \cong V_2$.

taking traces, we obtain

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \bar{\chi}_1(g)\, \chi_2(g) = \begin{cases} 0 & V_1 \not\cong V_2 \\ 1 & V_1 \cong V_2 \end{cases}.$$

$\blacksquare$

<u>Corollary</u> If (V, ρ) is any representation of G, and V_1 an irreducible representation, then the multiplicity of V_1 in V is the inner product of characters

$$V = V_1^{\oplus a_1} + \dots$$

$$a_1 = (\chi_1, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_g \bar{\chi}_1(g)\, \chi(g).$$

Da die irreduziblen Charaktere Klassenfunktionen sind, gilt

$$\frac{1}{|G|}\sum_g \overline{\chi_1}(g)\chi_2(g) = \frac{1}{|G|}\sum_C |C|\,\overline{\chi_1}(C)\,\chi_2(C)$$

Dies ist (fast) das standard innere Produkt auf Klassenfunktionen. Eine Folgerung aus dem 1ten Orthogonalitätssatz ist daher, dass es nicht mehr Isomorphismenklassen irreduzibler Darstellungen geben kann als Klassenfunktionen (und damit als Konjugations-klassen). Wir zeigen gleich, dass diese Anzahlen gleich sind. Zunächst aber beweisen wir die Zerlegung der linksregulären Darstellung:

Sei $V_1, \dots V_k$ die Liste der Isomorphismenklassen irreps. (wir wissen ja schon, dass es endlich viele sind).

Wenn wir schreiben

$$L \cdot \mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus a_i}$$

so können wir mit unserer Formel berechnen, dass

$$a_i = (\chi_i, \chi_L) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_i}(g)\,\chi_L(g)$$

Nun gilt aber, dass eine Matrixdarstellung von L mit $g, \in G$ als Basis keine Einträge auf der Diagonale hat, ausser wenn $g = e$. Also ist

$$\chi_L(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ |G| & g = e \end{cases}$$

und $a_i = \frac{1}{|G|} |G| \overline{\chi_i}(e) = \dim V_i$. $\square$

Als Korollar $|G| = \sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2$

wo die Summe über alle Isomorphismenklassen von irreps läuft.

Zum Schluss beweisen wir noch die bereits gefallene Aussage, dass die Anzahl irreduzibler Darstellungen gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in der Gruppe ist, d.h. nicht nur unterscheiden Konjugationsklassen vermittels der Charaktere irreps, sondern irreps unterscheiden auch Konjugationsklassen.
Dies ist jetzt die Aussage des

Theorem: Sei $\alpha: G \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion, d.h.

$$\alpha(hgh^{-1}) = \alpha(g) \quad \forall g, h$$

Falls $(\alpha, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum \overline{\alpha}(g) \chi_i(g) = 0 \quad \forall$ irreps ρ_i, dann ist $\alpha \equiv 0$

Beweis: Für jede irreduzible Darstellung (V_i, ρ_i) gilt

"Herauo-projektor der zu α gehörenden Darstellung"

$$\varphi_{\alpha,i} := \frac{1}{|G|} \sum \overline{\alpha}(g)\, \rho_i(g) : V_i \to V_i$$

ist ein G-Morphismus $\left(\sum_g \overline{\alpha}(g) \rho_i(gh) \right.$

$$\left. = \sum_g \overline{\alpha}(hgh^{-1})\, \rho_i(hg) = \sum \overline{\alpha}(g)\, \rho_i(hg) \right)$$

Aus dem Lemma von Schur folgt, dass $\varphi_{\alpha,i} = x \cdot id_{V_i}$, und wir können den Proportionalitätsfaktor durch Bilden der Spur ermitteln:

$$\varphi_{\alpha,i} = id_{V_i} \cdot \frac{(\alpha, \chi_i)}{\dim V_i} = 0$$

Falls nun (V,ρ) irgendeine Darstellung ist, so folgt ~~dass~~ nach Zerlegen in irreduzible Teile, dass

$$\varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\alpha}(g) \rho(g) = 0$$

Insbesondere gilt für die linksreguläre Darstellung

$$\varphi_{\alpha,L} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\alpha}(g) g = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}G$$

Da aber $\{g, g \in G\}$ eine Basis von $\mathbb{C}G$ ist, folgt $\alpha = 0$.

Falls also $(\alpha, \chi_i) = 0$ $\forall$ irreduziblen Charaktere, so ist schon $\alpha = 0$. Da $(\cdot,\cdot)$ ein nicht-entartetes inneres Produkt auf dem Raum der Klassenfunktionen ist, folgt daraus, dass der Raum der Klassenfunktionen von den irreduziblen Charakteren aufgespannt wird.

Mit noch anderen Worten kann man die Gleichung

$$\sum \frac{|C|}{|G|} \overline{\chi}_i(C)\, \chi_j(C) = \delta_{ij}$$

als die Aussage auffassen, dass die Matrix

$$\left(\sqrt{\frac{|C|}{|G|}}\, \chi_i(C) \right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ C \,\in\, \text{Konjugationsklassen}}}$$

unitär ist. Die Folgerung

$$\sum_i \overline{\chi}_i(C)\, \chi_i(C') = \begin{cases} \dfrac{|G|}{|C|} & C = C' \\ 0 & C \neq C' \end{cases}$$

wird manchmal auch 2ter Orthogonalitätssatz genannt.

§2.5 Weitere Anwendungen

1) allgemeine Projektionsformel: Sei V eine e.d. Darstellung von G, und V_1 eine irreduzible Darstellung. Dann ist

$$\psi_{1,V} = \dim V_1 \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi}_1(g)\, \rho(g) : V \to V$$

die Projektion auf die "V_1-isotypische Komponente von V", d.h. den Unterraum $V_1^{\oplus a_1} \subset V$, wo a_1 die Multiplizität von V_1 in V ist.

Bew: • Da $\psi_{1,V}$ ein G-Morphismus ist, können wir aufgrund des Lemmas von Schur bezüglich der Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i \otimes \mathbb{C}^{a_i}$$

$\psi_{1,V}$ schreiben als direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^{k} \psi_{1,V_i}$, wobei jedes $\psi_{1,V_i} : \mathbb{C}^{a_i} \circlearrowleft$.

• Vorausgesetzt, dass $\psi_{1,V}$ eine Projektion ist (was wir gleich verifizieren), können wir den Rang von ψ_{1,V_i} durch Spurbildung berechnen:

$$\mathrm{Rang}(\psi_{1,V_i}) = \frac{\dim V_1}{|G|} \sum \overline{\chi_1}(g)\, \chi_i(g) \cdot a_i$$

Aus der Orthogonalität der Charaktere folgt damit die Behauptung, falls wir noch $\psi_{1,V}^2 = \psi_{1,V}$ zeigen:

$$\psi_{1,V}^2 = \frac{(\dim V_1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h} \overline{\chi_1}(g)\, \overline{\chi_1}(h)\, \rho(gh)$$

$$= \frac{\dim V_1}{|G|} \sum_g \Big(\underbrace{\sum_h \frac{\dim V_1}{|G|} \overline{\chi_1}(gh^{-1})\, \overline{\chi_1}(h)}_{\text{Beh: dies ist gleich } \overline{\chi_1}(g)} \Big) \rho(g)$$

In der Tat gilt ja in V_1:

$$\frac{1}{|G|}\sum_h \bar{\chi}_1(h)\,\rho_1(h) = \lambda \cdot id_{V_1}$$

wobei $\lambda = \frac{1}{\dim V_1}$ wieder aus der Spurbildung folgt.

Also ist

$$\frac{\dim V_1}{|G|}\sum_h \bar{\chi}_1(h)\,\rho_1(h)\,\rho_1(g^{-1}) = \rho_1(g^{-1})$$

Spurbildung und $\chi_1(g^{-1}) = \bar{\chi}_1(g)$ ergibt dann die Behauptung.

2) Induzierte Darstellungen und Frobenius Reziprozität

Wir haben bereits am Anfang ~~darüber~~ über Operationen auf Darstellungen einer gegebenen Gruppe geredet. Im Zuge der Charaktertheorie haben wir gesehen, dass es interessant ist, die Darstellung festzuhalten und ein algebraisches Objekt (die Konjugationsklasse) zu variieren. Die folgende Variante dieser Idee tritt in vielen Anwendungen mehr oder weniger explizit auf.

- Sei G eine endliche Gruppe und (V,ρ) eine Darstellung. Falls nun $H \subset G$ eine Untergruppe von G ist, so erhalten wir durch einschränken von $\rho: G \to GL(V)$ auf H eine Darstellung von H (auf V), ~~welche~~

$$(V, \rho|_H)$$

welche natürlich die eingeschränkte Darstellung heisst.