Aufgabenblatt zur Klausurvorbereitung

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird auch nicht korrigiert.
Besprechung in der Plenarübung am 19.7.2018 (16h, INF 308 HS1)

(Die folgende Liste gibt eine *Idee möglicher Einstiegsfragen* und erschöpft in **keinster Weise** die für die Klausur relevanten Begriffe!)

(1) Was ist ein Körper?

(2) Was ist ein angeordneter Körper? Geben Sie ein Beispiel eines Körpers, der nicht angeordnet werden kann.

(3) Was ist ein metrischer Raum? Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?

(4) Was ist ein normierter Vektorraum? Dreiecksungleichung?

(5) Was ist der Zusammenhang zwischen Abstandsfunktion (Metrik), Norm, und euklidischem inneren Produkt auf einem reellen Vektorraum? Cauchy-Schwarz-Ungleichung?

(6) Wann heißt eine Folge konvergent?

(7) Was besagt das *Prinzip der monotonen Konvergenz*?

(8) Was besagt der *Satz von Bolzano-Weierstrass*?

(9) Ist jede Cauchy-Folge konvergent?

(10) Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raums *offen/abgeschlossen/beschränkt*?

(11) Was ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe?

(12) Was besagt das Wurzelkriterium bzw. Quotientenkriterium für (Potenz)-Reihen? Kennen Sie weitere Konvergenzkriterien?

(13) Konvergenz/Divergenz von geometrischer Reihe und harmonischer/Dirichlet Reihe?

(14) Wie sieht die Logarithmus-, Exponential-, Sinus- und Cosinusreihe aus?

(15) Wie hängen die Additionstheoreme, die Funktionalgleichung der exp-Funktion und die Euler-Formel zusammen?

(16) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wann heißt f stetig? Lipschitz-stetig?

(17) Was besagt der *Zwischenwertsatz*? Was besagt der *Mittelwertsatz*?

(18) Was besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*?

(19) Definition des "bestimmten Integrals von a nach b"?

(20) Was besagt der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*?

(21) Was sind die *Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen*? Schreiben Sie diese auf und erklären Sie alle auftretenden Komponenten.

(22) Was besagt der *Satz von der Umkehrabbildung*?

(23) Definition des totalen Differentials als lineare Abbildung auf dem Raum der Richtungen. Zusammenhang mit partiellen Ableitungen.

(24) Was ist eine konvexe Menge?

(25) Was ist eine konvexe Funktion? Geben Sie Kriterien aus der Differentialrechnung.

Beachte: Die folgenden Aufgaben sind zum Teil technisch schwieriger als die, die Sie in der Klausur erwarten. Konzeptionell gibt es aber starke Resonanzen.

1. Aufgabe (Stetigkeit): (a) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $f + g$ stetig ist.

(b) Geben Sie zwei unstetige Funktionen f und g an, deren Summe $f + g$ stetig ist.

2. Aufgabe (Reihenentwicklung): (a) Zerlegen Sie das Polynom $z^2 - 5z + 6$ in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(z) := \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ zum Entwicklungspunkt 0.
Tipp: Ableiten ist nicht die beste Lösungsmethode.

3. Aufgabe (Vollständigkeit): Entscheiden Sie (mit Begründung), welcher der Räume

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\big|\, f \text{ stetig}, \overline{\{x \,|\, f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R} \text{ kompakt} \big\} \\ W &= \mathcal{C}^b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\big|\, f \text{ stetig und beschränkt} \big\}\,, \end{aligned}$$

ausgerüstet mit der Supremumsnorm, vollständig ist.

4. Aufgabe (Integration): Berechnen Sie, unter Benutzung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, die Werte der nachfolgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}\, dx$, $n \geq 2$

5. Aufgabe (Totales Differential und Umkehrabbildung): Wir betrachten die Abbildung $F : \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, $F(A) := A^2$.

(a) Begründen Sie, dass F überall total differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie das totale Differential von F.

(c) Identifizieren Sie $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ via $(x^1, x^2, x^3, x^4)^T \mapsto \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix}$ und stellen Sie $DF(A)$ als Jacobi-Matrix in der Standard-Basis von $\mathbb{R}^4$ dar.

(d) Zeigen Sie: $DF(A)$ ist nicht invertierbar, d.h. $\mathrm{Rang}(DF(A)) < 4 \;\Leftrightarrow\; \det A = 0$ oder $\mathrm{Tr}\, A = 0$.

(e) Geben Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Kerns von $DF(A)$ (als Unterraum von $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$) an.

6. Aufgabe (Satz über die Umkehrabbildung): Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$u = x^3 - 3xy^2$$
$$v = 3x^2y - y^3$$

auf einer Umgebung des Punktes $(u, v) = (1, -1)$ eine eindeutige Lösungsfunktion $(x(u, v), y(u, v))$ mit $x(1, -1) = -\frac{1}{2^{1/3}}$, $y(1, -1) = -\frac{1}{2^{1/3}}$ hat. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_u x$, $\partial_v x$, $\partial_u y$, $\partial_v y$ im Punkt $(1, -1)$.

7. Aufgabe (DGL I): Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $A = D + N$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Zeigen Sie: D und N kommutieren und $N^2 = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum $L \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

8. Aufgabe (DGL II): Wir wollen die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' \cos(x) + y' \sin(x) = 1 + (\cos(x))^2$$

lösen!

(a) Bestimmen Sie zunächst eine nicht-triviale Lösung $z_1(x)$ der *homogenen Differentialgleichung* $z' \cos x + z \sin x = 0$ (getrennte Veränderliche)

(b) Bestimmen Sie durch *Variation der Konstanten* eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $z' \cos x + z \sin x = 1 + \cos^2 x$. M.a.W., stellen Sie durch Einsetzen von $C(x)z_1(x)$ eine DGL für $C(x)$ auf und lösen Sie sie. Vgl. Aufgabe 12.1 auf Blatt 12.

(c) Gewinnen Sie durch nochmalige Integration den zwei-dimensionalen affinen Raum der Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung.

9. Aufgabe (Komplexe Integration): Für $a, b > 0$ seien $\alpha, \beta \colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\alpha(t) := a \exp(2\pi i t) \quad \text{bzw.} \quad \beta(t) := a \cos(2\pi t) + ib \sin(2\pi t).$$

(a) Zeigen Sie $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_\beta \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$.
Tipp: Stellen Sie sich die Integrationspfade α und β vor und verwenden Sie das *Lemma von Cauchy-Goursat-Pringsheim* auf geeignet gewählten Teilmengen.

(b) Folgern Sie aus Teilaufgabe (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}$.