Aufgabenblatt 9

Abgabe am 21.6., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 9.1 (Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen)
Sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $(\partial_x h)(0,y) = -y$ und $(\partial_y h)(x,0) = x$.

(b) $(\partial_y \partial_x h)(0,0) = -1$ und $(\partial_x \partial_y h)(0,0) = 1$.

Aufgabe 9.2 (Stereographische Projektion) (2+2+3+3 Punkte)
Es seien $\mathbb{R}^2 \ni x$ und $\mathbb{R}^3 \ni y$ ausgerüstet mit den standard euklidischen inneren Produkten $\langle x_1, x_2\rangle := \sum_{i=1}^2 x_1^i x_2^i$ bzw. $\langle y_1, y_2\rangle := \sum_{j=1}^3 y_1^j y_2^j$, $\|\cdot\|$ die zugehörigen Normen und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die differenzierbare Abbildung

$$F(x) := \Big(\frac{2x^1}{\|x\|^2+1}, \frac{2x^2}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\Big)^T$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $B(x)$ von F und zeigen Sie, dass sie überall Rang 2 hat.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x, v \in \mathbb{R}^2$

$$\langle DF(x)(v), F(x)\rangle = 0$$

Interpretieren Sie dieses Resultat geometrisch und beschreiben Sie das Bild $S := F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^2$ unter F.

(c) Zeigen Sie, dass F injektiv ist und geben Sie eine Formel für die Umkehrabbildung $F^{-1} : S \to \mathbb{R}^2$. (Sie brauchen sich nicht um Differenzierbarkeit von F^{-1} zu sorgen, da S nicht offen in $\mathbb{R}^3$ ist.)

(d) Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$g(v_1, v_2) := \langle DF(x)(v_1), DF(x)(v_2)\rangle$$

Begründen Sie, dass g eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist, und berechnen Sie ihre Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

Tipp: Verfolgen Sie solange die Faktoren 2, bis sich das Endergebnis einigermassen vereinfacht.

Aufgabe 9.3 (Dimensionen) (1+1+2+2+4 Punkte)
In der Vorlesung wurde erklärt, wie ein euklidisches inneres Produkt q auf $\mathbb{R}^3$ lineare Algebra und Differentialrechnung bereichert. Nun ist für jedes $\lambda > 0$ $q_\lambda := \lambda^2 q$ ebenfalls ein euklidisches inneres Produkt (explizit also $q_\lambda(v,w) := \lambda^2 q(v,w)$) und wir können diese Konstruktionen in Abhängigkeit von λ wiederholen. Wir sagen, ein derart konstruiertes *Objekt $\mathcal{O}_\lambda$ habe Dimension $d \in \mathbb{Q}$*, falls $\mathcal{O}_\lambda = \lambda^d \mathcal{O}_1$ für alle λ. Beispiel: q selbst hat Dimension 2, die zugehörige Norm $\|\cdot\|$ hat Dimension 1, etc. (Physikalisch entspricht λ also einer Änderung des Längenmassstabs.) Bestimmen Sie (mit Begründung!) die Dimensionen der folgenden in der Vorlesung definierten Objekte:

(a) $\det q$ (als reelle Zahl)

(b) D (das Differential)

(c) grad (als Abbildung von skalaren Funktionen auf Vektorfelder)

(d) div (als Abbildung von Vektorfeldern auf skalare Funktionen)

(e) rot (als Abbildung von Vektorfeldern auf Vektorfelder)

Tipp: Der Knackpunkt bei (e) ist die Dimension des Kreuzprodukts. Sie können auch verwenden, dass grad $= \nabla$, div $= \nabla\cdot$ und rot $= \nabla\times$.

Aufgabe 9.4 (Logarithmusfunktion)
Für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Menge $S_n := \{z \in \mathbb{C} \mid (2n-1)\pi < \mathrm{Im}(z) < (2n+1)\pi\}$. Zeigen Sie:

(a) Die eingeschränkte komplexe Exponentialfunktion ist eine bijektive Abbildung $\exp\colon S_n \to \mathbb{C}_-$ auf die geschlitzte Zahlenebene $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0 \text{ und } x \leq 0\}$.

(b) Die Umkehrabbildung $L_n\colon \mathbb{C}_- \to S_n$ ist holomorph mit Ableitung $L_n'(z) = \frac{1}{z}$ und $L_n(1) = 2\pi i n$.

(c) Es gilt $L_n(z) = L_0(z) + 2\pi i n$ für beliebige $z \in \mathbb{C}_-$.