Aufgabenblatt 8

Abgabe am 14.6., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 8.1 (Legendre Transformation für konvexe Funktionen)
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine *konvexe* Funktion, so definieren wir die *Legendre-Transformierte* von (I, f) als das Paar (I^*, f^*), wobei

$$I^* := \left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{x \in I}\{xs - f(x)\} < \infty \right\} \quad \text{und} \quad f^* \colon I^* \to \mathbb{R}, \quad f^*(s) := \sup_{x \in I}\{xs - f(x)\}.$$

(I ist nicht notwendig offen, kann unbeschränkt sein, und ein-Punkt Mengen sind auch als Intervalle zugelassen.) Zeigen Sie:

(a) I^* ist ein nicht-leeres Intervall und f^* ist konvex.
Tipp: I^* ist ein Intervall $\Leftrightarrow \forall s, s' \in I^*$ ist $(1-t)s + ts' \in I^*$ $\forall t \in (0,1)$.

(b) Für alle $x \in I$ und alle $s \in I^*$ ist $f(x) + f^*(s) \geq xs$.

(c) Ist (J, g) ein weiteres solches Paar, so folgt aus $J \subset I$ und $g(x) \geq f(x)$ $\forall x \in J$, dass $J^* \supset I^*$ und $g^*(s) \leq f^*(s)$ $\forall s \in I^*$.

(d) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierten der folgenden Paare (I, f):
(i) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
(ii) $I = [0, \infty)$, $f(x) = x^a$ für $a > 1$.
(iii) $I = [a, b]$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
(iv) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq 1 \\ \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2} & |x| < 1 \end{cases}$

(e) Angenommen, $I^* = I$ und $f^* = f$. Zeigen Sie, dass dann (I, f) gleich dem Paar aus (i) ist. **Tipp:** Benutzen Sie zunächst (b) und dann (c).

Aufgabe 8.2 (höhere Ableitungen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.
Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist und alle Ableitungen in 0 verschwinden, d.h. $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \geq 0$.

Aufgabe 8.3 (Totales Differential)
Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $\partial_x f(0, 0)$ und $\partial_y f(0, 0)$ existieren.

(b) f ist in $(0, 0)$ nicht (total) differenzierbar.

Aufgabe 8.4 (Extremstellen)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f \colon [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y(x-1)e^{-(x^2+y^2)}$$

auf Extrema.