Aufgabenblatt 7

Abgabe am 7.6., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 7.1 (Kubische Gleichungen)
Ziel dieser Aufgabe ist zu verstehen, wie man die drei komplexen Wurzeln eines kubischen Polynoms $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ für beliebige $a, b, c \in \mathbb{C}$ allgemein bestimmt.

(a) Finden Sie eine affin lineare Transformation $z \mapsto w(z)$, die P auf die Gestalt

$$Q(w) := P(z(w)) = w^3 + pw + q$$

bringt, mit gewissen $p, q \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Substitution $w = u + v$ unter den Bedingungen

$$u^3 + v^3 = -q \qquad \text{und} \qquad uv = -\frac{p}{3} \tag{$*$}$$

auf eine Lösung von $Q(w) = 0$ führt. Zeigen Sie außerdem, dass die Paare $u' = \exp(2\pi i/3)u$, $v' = \exp(4\pi i/3)v$ und $u'' = \exp(4\pi i/3)u$, $v'' = \exp(2\pi i/3)v$ ebenfalls die Bedingungen $(*)$ erfüllen.

(c) Verwenden Sie $(*)$, um ein quadratisches Polynom $h(t) = t^2 + At + B$ aufzustellen, das für $t = u^3$ und $t = v^3$ verschwindet und bestimmen Sie so u und v.

Zwischenergebnis: Es ist $u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ mit $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$.

(d) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 - 3z^2 + 9z - 9 = 0$ an.

Aufgabe 7.2 (Kompaktheit)
Es seien X und Y metrische Räume und X folgenkompakt, sowie $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie unter diesen Annahmen die folgenden Aussagen:

(a) $f(X) \subset Y$ ist folgenkompakt.

(b) Für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen.

(c) Ist f bijektiv, dann ist f^{-1} stetig.

Aufgabe 7.3 (Leibniz-Kriterium für gleichmässige Konvergenz)
Es sei (f_n) mit $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen mit den Eigenschaften:
(i) Für jedes $x \in X$ ist $(f_n(x))$ monoton fallend.
(ii) (f_n) konvergiert gleichmässig auf X gegen die Nullfunktion.
Zeigen Sie: Die Reihe $\sum(-1)^n f_n$ konvergiert gleichmässig auf X.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 7.4 Ein Fall für den Zwischenwertsatz?

Sie sitzen im Mathematikon (M) am Theo-Zettel, doch Konzentrieren ist schwierig—*der Tisch (T1) wackelt* und jeder gute Einfall ist sofort wieder weg. Vom schönen Wetter verführt ziehen Sie in den nächsten Biergarten (B) um, doch auch hier—*der Tisch (T2) wackelt* (!) und Sie können nur knapp verhindern, dass das Getränk Ihr Smartfon ruiniert. Doch jetzt, schon nach dem ersten Schluck, lösen sich alle Probleme scheinbar von selbst.

Sie beobachten: (T2) ist *quadratisch* und *alle vier Beine exakt gleich lang*, die Tischplatte eben. Der Untergrund ist uneben, seine Höhe $h(x, y)$ als Funktion der Standard-Koordinaten auf einer horizontalen Ebene aber *stetig*.

Sie verstehen: Das Wackeln entsteht, wenn nur drei der vier Beine den Boden berühren: Bezeichnen für feste Position des Tischmittelpunktes auf der Ebene (x_i, y_i) für $i = 1, 2, 3, 4$ die Koordinaten der Füsse, derart dass ihre Höhe $h_i = h(x_i, y_i)$ für $i = 1, 2, 3$, so ist $h_4 > h(x_4, y_4)$.

(a) Begründen Sie, dass nach *Drehen des Tisches* um $\frac{\pi}{2}$ jetzt $h'_4 < h(x'_4, y'_4)$ und folgern Sie, dass in mindestens einer Orientierung der Tisch stabil steht, wenn auch nicht notwendig mit horizontaler Platte.

(b) Lösen Sie nun den Theo-Zettel.

(c) Zeigen Sie, dass Ihre Lösung in Teil (a) *falsch* ist. Überlegen Sie sich dabei unter anderem
(i) dass es (stetige) Funktionen $h(x, y)$ gibt, bei denen nicht einmal drei Beine auf dem Boden stehen.
(ii) warum Sie den Tisch (T1) keinesfalls auf diese Weise stabilisieren können.

Tipp: Geben Sie eine operationelle Definition des Begriffs "Drehen". Sie dürfen natürlich auch experimentieren.

Bemerkung: Die Aussage, dass man jeden (idealisierten) Tisch (T2) stabil auf (B) platzieren kann, ist richtig, der Beweis aber um einiges komplizierter als hier skizziert.