Aufgabenblatt 6

Abgabe am 1.6., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 6.1 (Potenzreihen)

(a) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Das *Pochhammer-Symbol* $(c)_k$ ist definiert durch $(c)_k := \prod_{j=0}^{k-1}(c+j)$.

Sei für $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $c \notin -\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, \ldots\}$ die hypergeometrische Reihe gegeben durch

$$F(a, b, c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k.$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius R in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(b) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$. Beweisen oder widerlegen Sie: Hat f einen Konvergenzradius $R > 1$ dann ist $R = \infty$ und f ein Polynom (d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_k = 0$ für alle $k \geq N$).
Hinweis: Die Anwendung eines passenden Konvergenzkriteriums kann sehr aufschlussreich sein.

Aufgabe 6.2 (Restgliedabschätzung)

(a) Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} z^k$ und $f_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} z^k$ die N-te Partialsumme. Finden Sie ein $\tilde{N}$, sodass $\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - f_{\tilde{N}}\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$ gilt und berechnen Sie $2\sqrt{3} \cdot f_{\tilde{N}}\left(\frac{1}{3}\right)$. Welchen Wert vermuten Sie für $f\left(\frac{1}{3}\right)$?

(b) Seien $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} z^k$ und $g_N(z)$ die zugehörigen Partialsummen. Finden Sie ein $\tilde{N}$, sodass $\left| g\left(\frac{1}{4}\right) - g_{\tilde{N}}\left(\frac{1}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$ gilt und bestimmen Sie $e^{g_{\tilde{N}}(1/4)}$. Welchen Wert vermuten Sie für $g(\frac{1}{4})$?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 6.3 (Produkträume)
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und $\|\cdot\|$ eine beliebige[1] Norm auf $\mathbb{R}^2$. Wir definieren $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \big\|\big(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\big)\big\|$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Abstandsfunktion ist, und damit $X \times Y$ zu einem metrischen Raum wird.

(b) Sei nun $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine *stetige Funktion* auf dem Produktraum. Zeigen Sie: Für alle $x \in X$ ist die Einschränkung $F_x : Y \to \mathbb{R}$, $F_x(y) := F(x, y)$ stetig auf Y. Ebenso ist $F_y : X \to \mathbb{R}$, $F_y(x) := F(x, y)$ stetig.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion auf einem Produktraum, deren Einschränkungen F_x, F_y auf die getrennten Argumente für alle $x \in X$, $y \in Y$ stetig sind, die aber selbst nicht überall stetig ist. (**Hinweis:** Eine geeignete Funktion steht im Skript.)

Aufgabe 6.4 (Zwischenwertsatz)
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl > 1. Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau n-mal annimmt.
Tipp: Untersuchen Sie die Werte von f in der Umgebung ihrer Extremstellen. Zur Intuitionsbildung können Sie Differenzierbarkeit benutzen, das endgültige Argument darf aber nur die Stetigkeit voraussetzen.

[1] Berichtigung (2.6.18): Es ist hier nicht jede Norm geeignet. Die Aussage ist aber richtig insbesondere für die Maximums-Norm, die 1-Norm oder die euklidische Norm.