Aufgabenblatt 5

Abgabe am 24.5., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 5.1 (Potenzreihen)
Leiten Sie die Konvergenzradien R der folgenden Potenzreihen her:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2} z^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) z^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

Aufgabe 5.2 (Reihen)
Die *Fibonacci-Zahlen* $\{F_n \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$ sind rekursiv definiert. Es ist $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und für $n \geq 0$ ist $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$

(a) Beweisen Sie die absolute Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+1}}$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.
Hinweis: Bringen Sie $\frac{1}{F_n F_{n+2}} - \frac{1}{F_n F_{n+1}}$ in eine geeignete Form.

Aufgabe 5.3 (Ein Konvergenzkriterium)

(a) Für $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\displaystyle\binom{x}{n} := \frac{x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-n+1)}{n!}$. Zeigen Sie, dass das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}$ macht. Prüfen Sie auch, ob Sie mittels Leibniz-Kriterium zum Schluss kommen.

(b) Zeigen Sie nun, dass eine Reihe $\sum a_n$ komplexer Zahlen absolut konvergiert, falls $N \in \mathbb{N}$ und $C > 1$ existieren, sodass für jedes $n \geq N$ gilt:

$$|a_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{C}{n}\right) |a_n|. \qquad (*)$$

Hinweis: Benutzen Sie $(*)$, um die (teleskopierende) Summe $\sum_{n=N}^{M} (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|$ nach unten abzuschätzen. Folgern Sie, dass $\{\sum_{n=N}^{M} |a_n| \mid M > N\}$ nach oben beschränkt ist.

(c) Benutzen Sie das Konvergenzkriterium aus (b) um zu zeigen, dass die Reihe aus Aufgabenteil (a) absolut konvergiert.

(*Bitte wenden!*)

Aufgabe 5.4 (Euler'sche Produktformel der Riemann'schen ζ-Funktion)
Sei (p_k) eine Folge natürlicher Zahlen, die die Menge aller Primzahlen in bijektiver Weise durchläuft. Sei J_N die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $\{p_1, \dots, p_N\}$ gehören. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{n \in J_N} n^{-s}$ ist absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n \in J_N} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} =: P_N.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung verwenden.

(b) Folgern Sie für $s > 1$ die Formel

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} := \lim_{N \to \infty} P_N.$$