# Aufgabenblatt 4

Abgabe am 17.5., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

**Allgemeiner Hinweis:** Die Aufgaben sollten wenn möglich mit den bisher in der Vorlesung behandelten Methoden gelöst werden. An einigen Stellen bietet sich jedoch ein "Vorgriff" auf bekannte Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung an, dieses Mal etwa in **4.1**(c) sowie **4.4**(ii).

**Aufgabe 4.1** (Offene und abgeschlossene Mengen) Die Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ werden mit der üblichen Abstandsfunktion $d(x, y) = |x - y|$ ausgerüstet zu metrischen Räumen über $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen (als Teilmengen des angegebenen metrischen Raums) offen, abgeschlossen, weder noch, oder beides sind.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | $A = B_1(1) \cup B_1(-1) \subset \mathbb{C}$ | $(a')$ | $A' = A \cup \{0\} \subset \mathbb{C}$ |
| $(b)$ | $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ | $(b')$ | $B' = B \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ |
| $(c)$ | $C = \{\frac{t}{1+t}(\cos t + i \sin t) \mid t \in [0, \infty)\} \subset \mathbb{C}$ | | |
| $(d)$ | $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ | $(d')$ | $D' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}$ |
| $(e)$ | $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} \subset \mathbb{R}$ | $(e')$ | $E' = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 < 0\} \subset \mathbb{C}$ |

**Aufgabe 4.2** (Topologie) Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge $T \subset X$ definieren wir

- die *abgeschlossene Hülle* $\overline{T}$ *von* $T$ als die kleinste abgeschlossene Obermenge von $T$ (in $X$), formal

$$\overline{T} := \bigcap_{\substack{A \subset X,\, A \supset T \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

- den *offenen Kern* $\mathring{T}$ *von* $T$ als die grösste offene Untermenge von $T$ (in $X$), formal

$$\mathring{T} := \bigcup_{\substack{U \subset X,\, U \subset T \\ U \text{ offen}}} U$$

- den *(topologischen) Rand* $\partial T$ *von* $T$ (in $X$) als die Differenz von Mengen

$$\partial T := \overline{T} \setminus \mathring{T}$$

Zeigen Sie:

(i) $\overline{T}$ ist abgeschlossen.

(ii) $\mathring{T}$ ist offen.

(iii) $\partial T$ ist abgeschlossen.

(iv) $x \in \overline{T} \Leftrightarrow \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset T : \lim_{k \to \infty} x_k = x$

(v) $x \in \mathring{T} \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset T$

*(Bitte wenden!)*

**Aufgabe 4.3** (Hamiltonsche Quaternionen) In Verallgemeinerung der Konstruktion von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definieren wir die Algebra der Quaternionen $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ als reellen Vektorraum mit der Standardbasis $1 = (1,0,0,0)^T$, $\mathbf{i} = (0,1,0,0)^T$, $\mathbf{j} = (0,0,1,0)^T$, $\mathbf{k} = (0,0,0,1)^T$ und der Multiplikation

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1 \qquad (*)$$

M.a.W. ist $\mathbb{H} = \{q = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ und zwei Elemente $q, p \in \mathbb{H}$ werden multipliziert, indem man $(*)$ "naiv", d.h. unter Auferlegung von $\mathbb{R}$-Linearität sowie Assoziativ- und Distributivgesetzen auf ganz $\mathbb{H}$ fortsetzt.

(i) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist.

(ii) Schreiben Sie das Produkt $r = q \cdot p$ von $q = x_0 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3 \in \mathbb{H}$ und $p = y_0 + \mathbf{i}y_1 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}y_3 \in \mathbb{H}$ explizit aus als $r = z_0 + \mathbf{i}z_1 + \mathbf{j}z_2 + \mathbf{k}z_3$ mit $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$.

(iii) Wir erklären die Konjugation $q \mapsto \overline{q}$ als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}$ durch

$$\overline{x_0 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3} := x_0 - \mathbf{i}x_1 - \mathbf{j}x_2 - \mathbf{k}x_3$$

Zeigen Sie dass $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}\ \forall p, q \in \mathbb{H}$

(iv) Zeigen Sie, dass $\forall q \in \mathbb{H}\ \overline{q}q = q\overline{q} \geq 0$ und dass die Abbildung $q \mapsto |q| := \sqrt{\overline{q}q}$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{H}$ definiert.

(v) Zeigen Sie, dass $|q \cdot p| = |q| \cdot |p|$.

**Aufgabe 4.4** (Matrix-Norm) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Operatornorm $\|A\|$ bezüglich den folgenden Normen auf $\mathbb{R}^2 \ni (x^1, x^2)^T$:

(i) Die Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max\{|x^1|, |x^2|\}$

(ii) Die 2-Norm $\|x\|_2 := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$

(iii) Die 1-Norm $\|x\|_1 := |x^1| + |x^2|$