Aufgabenblatt 3

Abgabe am 11.5., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 3.1 (Folgenkonvergenz) Berechnen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert der reellen/komplexen Folge (a_n), wobei a_n einen der folgenden Werte hat:

i) $\dfrac{x^n}{n!}$, für $x \in \mathbb{R}$ ii) $\dfrac{x^{n^2}}{n!}$, für $x \in \mathbb{R}$

iii) $\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)^n$ iv) $\dfrac{a^n - n^s}{a^n + n^s}$, für $a > 0$ und $s \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3.2 (Häufungswerte) Sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heisst *Häufungswert* der Folge, falls eine gegen x konvergente Teilfolge von (x_k) existiert. Bestimmen Sie die Häufungswerte der

(i) reellen Folge $x_k = (-1)^k$

(ii) komplexen Folge $x_k = i^k + \dfrac{1}{2^k}$

Aufgabe 3.3 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ und $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ (der "Nachkommateil von x"). Sie betrachten für $\alpha \in (0,1)$ die reelle Folge $a_n = \{n\alpha\} \in [0,1)$ und zeigen:

(i) Für $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ hat die Folge nur endlich viele Häufungswerte. (Siehe Def. Aufgabe 2)

(ii) Ist $\alpha \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, dann ist 0 Häufungswert der Folge.

(iii) Ist $\alpha \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, dann ist jeder Punkt im Intervall $[0,1]$ Häufungswert der Folge. (Sie können hier (ii) benutzen auch wenn Sie diesen Teil nicht gelöst haben.)

Aufgabe 3.4 ($\triangle \neq$) Das aus der Vorlesung bekannte innere Produkt $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i$ induziert auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eine Norm gegeben durch $\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. (Wir unterdrücken im folgenden den Subskript 2.)

(a) Beweisen Sie: Für die Cauchy-Ungleichung $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ aus Lemma 4.4 gilt genau dann Gleichheit, wenn v und w $\mathbb{R}$-linear abhängig sind, d.h. wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $w = t \cdot v$ oder $v = t \cdot w$. **Hinweis:** Lösen Sie die Gleichung $0 = \|v + \lambda w\|^2$ nach $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sei nun A ein affiner Raum über $\mathbb{R}^n$, d.h. es gibt eine Abbildung $\delta\colon A \times A \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften: (i) $\delta(x,y) + \delta(y,z) = \delta(x,z)$ für alle $x, y, z \in A$, und (ii) für alle $x \in A$, $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein $y \in A$ mit $\delta(y, x) = v$.

(b) Zeigen Sie: Es gilt die Gleichung

$$\|\delta(x,y)\| + \|\delta(y,z)\| = \|\delta(x,z)\|, \quad \text{für } x, y, z \in A,$$

genau dann, wenn $\delta(x,y)$ und $\delta(y,z)$ linear abhängig sind. Was bedeutet dies anschaulich?

Aufgabe 3.5 (SNCF-Metrik)

Sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt. Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ setze man

$$d(v,w) := \begin{cases} \|v - w\|, & \text{falls } v - p \text{ und } w - p \text{ linear abhängig sind,} \\ \|v - p\| + \|w - p\|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass d eine Abstandsfunktion ist. Zeigen Sie außerdem, dass im Fall $n = 1$ d mit dem gewöhnlichen Abstand auf $\mathbb{R}$ zusammenfällt.