Aufgabenblatt 2

Abgabe am 3.5., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 2.1 (komplexe Zahlebene)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

- $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$.
- $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{1}{3} < |z - i| < 1\}$.
- $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1| = |z - i|\}$.

(b) Sei $z = 2 + i$. Finden Sie alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass der Realteil der Zahl $\frac{z}{w}$ (respektive $\frac{w}{z}$) gleich 0 ist.

Aufgabe 2.2 (Schwartbarts Schatz)
Käpt'n Schwartbart, der alte Haudegen, hinterließ bei seinem Ableben im Alter von 108 Jahren eine Schatzkarte:

> Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele Schritte unter rechtem Winkel nach rechts – steck die erste Fahne.
> Geh vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genausweit unter rechtem Winkel nach links – steck die zweite Fahne.
> Der Schatz steckt in der Mitte zwischen den beiden Fahnen!

Die Erben starteten sofort eine Expedition zur Schatzinsel. Die Palme und die Felsbrocken waren sofort zu identifizieren. Vom Galgen war keine Spur mehr zu finden. Dennoch stieß man beim ersten Spatenstich auf die Schatztruhe, obwohl man die Schritte von einer zufälligen (und sehr wahrscheinlich falschen) Stelle aus gezählt hatte. Wie war das möglich? Wo lag der Schatz?

Aufgabe 2.3 (a) Beweisen Sie für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

(b) Finden Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{Z}$ alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^n = \overline{z}.$$

(Bitte wenden!)

Aufgabe 2.4 (Komplexe Zahlen)
Es sei

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit der gewöhnlichen Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ von reellen (2×2)-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ abgeschlossen bzgl. $+$ und $\cdot$ ist, d.h. zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathcal{C}$ ist $A + B \in \mathcal{C}$ und $A \cdot B \in \mathcal{C}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen $X, Y \in \mathcal{C}$ der Gleichungen

$$A + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für alle $A \in \mathcal{C}$ und $B \in \mathcal{C} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen $X \in \mathcal{C}$ der Gleichung

$$X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Auf welche Weise lässt sich $\mathcal{C}$ mit $\mathbb{C}$, dem Körper der komplexen Zahlen, identifizieren?

Aufgabe 2.5 (Konvergenz)
Einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ordnen wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß der Vorschrift

$$s_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

zu.

(a) Beweisen Sie: Aus $a_n \to a$ folgt auch $s_n \to a$.

(b) Geben Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.