Aufgabenblatt 12

Abgabe am 12.7., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 12.1 (lineare Differentialgleichungen)

(a) Seien $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma^2 - 4\omega^2 \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \gamma \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, d.h. finden Sie $T \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$, sodass $A = T^{-1}DT$, wobei $D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonal ist.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der linearen DGL 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \gamma \dot{x}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

indem Sie diese zunächst auf eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurück führen.

(c) (Variation der Konstanten) Seien V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und A eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$. Zeigen Sie: Zu jedem $x_0 \in V$ und jedem $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, V)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, V)$ des inhomogenen AWPs

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0.$$

Diese ist gegeben durch $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ und $t \in \mathbb{R}$.

Tipp: Verwenden Sie in der gesamten Aufgabe die zum Anfangswert $x(0) = x_0 \in V$ eindeutige Lösung $x(t) = \exp(tA)x_0$ zur DGL $\dot{x} = Ax$.

Aufgabe 12.2 (Potenzreihenansatz)

Für $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $c \notin -\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, ...\}$ betrachten wir die folgende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}z^2}(z) + (c - (a+b+1)z)\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z) - abP(z) = 0.$$

(Die unabhängige Variable wird hier mit z bezeichnet, da man die Gleichung eigentlich in $\mathbb{C}$ betrachten sollte. Dafür bleibt hier keine Zeit.) Bestimmen Sie Koeffizienten (a_k) so dass die Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die DGL löst.

Tipp: Leiten Sie zunächst eine Rekursionsformel für die a_k her und dann eine geschlossene Formel in Abhängigkeit von a, b, c, k. Zeigen Sie insbesondere (durch Rückbesinnung auf eine frühere Aufgabe), dass die Potenzreihe in einer offenen Menge konvergiert und dort auch wirklich die DGL löst.

Freiwilliger Zusatz: Wie Sie wissen(?), bilden die (lokalen) Lösungen einer linearen DGL zweiter Ordnung einen zwei-dimensionalen Vektorraum. Die obige Potenzreihe kann also nicht alle Lösungen erfassen. Substituieren Sie für $c \notin \mathbb{Z}$ $P(z) = z^{1-c}Q(z)$ und zeigen Sie, dass $Q(z)$ dann wieder eine Differentialgleichung vom gleichen Typ erfüllt, deren zugehörige Lösung die zweite, linear unabhängige Lösung der urpsrünglichen DGL liefert.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 12.3 (Implizite Differentialgleichungen)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zeimal stetig differenzierbare Funktion mit *streng monotoner* Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$. Wir suchen nach Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y = xy' - f(y') \qquad (*)$$

d.h. ein offenes Intervall J und eine stetig differenzierbare Funktion $y : J \to \mathbb{R}$ so dass $y(x) = xy'(x) - f(y'(x))$ für alle $x \in J$, wo $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$.

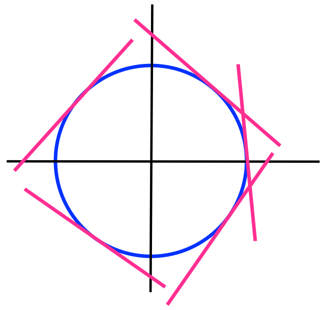
(a) Zeigen Sie: Gilt für eine solche Lösung $x - f'(y'(x)) \neq 0$ für ein $x \in J$, so ist y die Einschränkung einer affin linearen Abbildung und lässt sich auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

(b) Bestimmen Sie nun alle Lösungen von $(*)$ mit $x = f'(y'(x))\ \forall x$.

Tipp: Eliminieren Sie y' durch Umkehrung von f'.

(c) Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'^2 - 2xy'y + y^2 - 1 = 0$$



Tipp: Bringen Sie die Gleichung zunächst in die Form $(*)$, für geeignetes f.

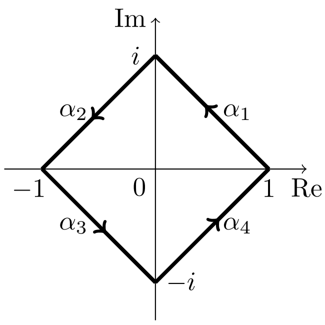
(d) Diskutieren Sie, im Beispiel oder allgemein, inwiefern die von Ihnen gefundenen Lösungen (global) eindeutig sind.

Aufgabe 12.4 (Integration im Komplexen)
In der Abbildung ist das Bild einer Kurve α skizziert.

(a) Geben Sie eine explizite Parameterdarstellung für α an.

(b) Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z.$$



Erläuterung: Die Kurve α ist aus vier linearen Wegsegmenten zusammengesetzt, auf denen der Integrand jeweils stetig ist. Das Integral wird dann als Summe über die Integrale der einzelnen Wegsegmente verstanden.

(c) Folgern Sie, dass $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben kann.