Aufgabenblatt 11

Abgabe am 5.7., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 11.1 (Integrale und Grenzwerte)
Sei $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ der *Arcus Cosinus*, die Umkehrabbildung des Kosinus $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$. Bestimmen Sie die Ableitungen von arcos und der Funktion $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)\right)$. Nun definieren wir die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := \int_0^1 (1-x^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x$.

(a) Berechnen Sie a_0 und a_1.

(b) Zeigen Sie die Rekursionsformel $a_n = \dfrac{n+3}{n+2} a_{n+2}$.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}, \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}, \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}, \ldots$$

Aufgabe 11.2 (partielle Integration)

(a) Seien $f, g \in C^1([a,b])$ für reelle $a < b$ stetig differenzierbare, reelwertig Funktionen. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R t^n \exp(-t)\,\mathrm{d}t$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie $\int_1^x \log(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

Aufgabe 11.3 (Stammfunktionen)
Bestimmen Sie (auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}$) Stammfunktionen von $f(x) =$

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ (partielle Integration)

(b) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ (Substitution und inverse trigonometrische Funktion)

(c) $\dfrac{1}{(x^2-4x+5)^2}$ (Partialbruchzerlegung)

(Bitte wenden!)

Aufgabe 11.4 (Bogenlänge)
Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger, normierter Vektorraum (über $\mathbb{R}$) und $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$. Für eine Funktion $f \in C(I,V)$ und eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = s_0 < \cdots < s_n = b\}$ des Intervalls $[a,b]$ sei

$$\Lambda(f;\mathcal{Z}) = \sum_{j=0}^{n-1} \|f(s_{j+1}) - f(s_j)\|.$$

Die *Bogenlänge* der *Kurve* $f(I) \subset V$ ist dann definiert durch

$$L(f;a,b) := \sup\{\Lambda(f;\mathcal{Z});\ \mathcal{Z} \text{ eine Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $c \in [a,b]$ gilt $L(f;a,b) = L(f;a,c) + L(f;c,b)$.

(b) Für differenzierbare Wege $\gamma \in C^1([a,b],V)$ und $s_0 \in (a,b)$ mit $s \neq s_0$ gilt

$$\left\| \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \right\| \leq \frac{L(\gamma;a,s) - L(\gamma;a,s_0)}{s - s_0} \leq \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^{s} \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

(c) Folgern Sie, dass für differenzierbare Wege $\gamma \in C^1([a,b],V)$ gilt $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe 11.5 (Aus der Klausur SS 16)
Betrachten Sie für eine Variable $x \in \mathcal{A} := \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ausgerüstet mit der Operatornorm, die Potenzreihe

$$L(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R von $L(x)$.

(b) Geben Sie ein $x \in \mathcal{A} \setminus B_R(0)$ an, für welches $L(x)$ divergiert.

(c) Es sei nun $x \in B_R(0)$ fest. Berechnen (und vereinfachen!) Sie die Ableitung der Funktion $\Phi : [0,1] \to \mathcal{A}$,

$$\Phi(t) := L(tx)$$

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\Psi : [0,1] \to \mathcal{A}$,

$$\Psi(t) := \exp\big(-\Phi(t)\big) \cdot (1 + tx)$$

(e) Folgern Sie aus den obigen Rechnungen, dass

$$\exp(L(x)) = 1 + x$$

für alle $x \in B_R(0)$.