Aufgabenblatt 10

Abgabe am 28.6., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 10.1 (Globale Umkehrung)

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, differenzierbare Abbildung und sei das totale Differential $Df(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ invertierbar. Zeigen Sie, dass f dann bereits ein Diffeomorphismus $f\colon U \to f(U)$ ist, d.h. f ist bijektiv auf ihr Bild, und die Umkehrabbildung ist stetig und differenzierbar.
Tipp: Folgern Sie zunächst aus dem in der Vorlesung bewiesenen *lokalen* Umkehrsatz, dass $f(U)$ offen ist.

(b) Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(\xi,\chi) = \begin{pmatrix} x(\xi,\chi) \\ y(\xi,\chi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cosh(\xi)\cos(\chi) \\ \sinh(\xi)\sin(\chi) \end{pmatrix}$.

(i) Zeigen Sie, dass F surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(ii) Bestimmen Sie die Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ auf der (ξ,χ) „gute Koordinaten" sind, d.h. es gilt $(x_0,y_0) \in V$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung $V_0 \subset \mathbb{R}^2$ von (x_0,y_0) gibt und eine Abbildung $G \in C^1(V_0,\mathbb{R}^2)$, sodass $F \circ G = \mathrm{id}_{V_0}$.

(iii) Beschreiben Sie präzise eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, die von F bijektiv auf V abgebildet wird.

(iv) Zeigen Sie, dass (für Ihre Wahl von A) die Umkehrung von F auf V nicht stetig ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass die Trajektorien von F für konstantes ξ Ellipsen und für konstantes χ Parabeln sind.

Aufgabe 10.2 (Transformation des Laplace-Operators)
Es seien F und V wie in der vorherigen Aufgabe, und $\varphi \in C^2(V,\mathbb{R})$. Sei weiter $\tilde\varphi := \varphi \circ F\colon F^{-1}(V) \to \mathbb{R}$. Mit dem Laplaceoperator definieren wir die Abbildung

$$\Delta\varphi\colon V \to \mathbb{R}, \quad \Delta\varphi(x,y) := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y).$$

Drücken Sie die Funktion $\widetilde{\Delta\varphi} := \Delta\varphi \circ F\colon F^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ durch ξ,χ und die partiellen Ableitungen von $\tilde\varphi$ nach diesen Koordinaten aus.
Hinweis: Die explizite Gestalt von V ist für das Lösen dieser Aufgabe irrelevant.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 10.3 Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ und ein quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die reellwertige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t) := \det(\mathbf{1} + tA)$, wobei $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichne. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für alle A die erste Ableitung von F gegeben ist durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} F(t) = \mathrm{tr} A$. Bestimmen Sie eine ähnliche Formel für die zweite Ableitung von F bei $t = 0$.
Hinweis: Für geeignete Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt für alle A

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_{t=0} F(t) = \alpha \cdot (\mathrm{tr}\, A)^2 + \beta \cdot \mathrm{tr}\left(A^2\right).$$

Sie dürfen Mittel aus der Linearen Algebra verwenden oder die Gleichung durch Nachrechnen herleiten. Nachrechnen ist vermutlich schneller.

Aufgabe 10.4 (Ein Maximumsprinzip)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f = u + iv \colon U \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig komplex differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für die komplexe Ableitung von f gilt: $f' = \partial_1 u + i\partial_1 v = \partial_2 v - i\partial_2 u$.

(b) Sei nun $F := |f| \colon U \to \mathbb{R}$ und $z_0 \in U$ ein kritischer Punkt von F mit $f(z_0) \neq 0$ und $f''(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann F weder ein Maximum noch ein Minimum in z_0 hat, indem Sie zeigen, dass die Hesse-Matrix $H_F(z_0)$ indefinit ist, d.h. sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert hat. Falls Ihnen dies leichter fällt, können Sie auch beweisen, dass $|f|^2$ bei z_0 kein Extremum annimmt (warum?).