Aufgabenblatt 1

Abgabe am 26.4., 11h00 in den Briefkästen beim Dekanat

Aufgabe 1.1 (Angeordnete Körper)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
(a) Sei $(\mathbb{K}, P)$ ein angeordneter Körper. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $c, d > 0$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ gilt $\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$
(b) Ein endlicher Körper lässt sich nicht anordnen. (Tipp: (iv) aus Lemma 1.4)

Aufgabe 1.2 (Ungleichungen)
Für positive reelle Zahlen a, b definiert man das *arithmetische*, *geometrische* und *harmonische* Mittel durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}\,, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab}\,, \qquad H(a,b) := \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Man beweise:

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$$

und zeige, dass die Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

Aufgabe 1.3 (Vollständige Induktion)
Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind für $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ rekursiv definiert. Es ist $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und für alle $n \geq 0$ ist $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$. Beweisen Sie die Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.

Hinweis: Passen Sie die Beweisstrategie geeignet an die Zweistufigkeit der Rekursion an.

Aufgabe 1.4 (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:
(a) $\left(\frac{1+2i}{3-4i}\right)^2$
(b) $(1+i)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (Tipp: Was ist i^n?)
(c) $\sqrt{i}$ (= diejenige komplexe Zahl $\omega = a + ib$ mit *positivem* Realteil a, sodass $\omega^2 = i$)