Aufgabenblatt 0

Präsenzübung

Aufgabe 0.1 (Abbildungen und leere Menge)
In der Mengenlehre wird eine Abbildung F mit Definitionsbereich A und Wertebereich B definiert als Teilmenge $F \subset A \times B$ mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert so, dass $(a, b) \in F$. In dieser Vorlesung schreiben wir solche Abbildungen wie üblich als $F : A \to B$ (und adeln den mengentheoretischen Begriff als "Graphen").
Es sei $\mathrm{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B. Man zeige:
(i) Ist $A = \emptyset$, so ist $\mathrm{Abb}(A, B) = \{\emptyset\}$.
(ii) Ist $A \neq \emptyset$, und $B = \emptyset$, so ist $\mathrm{Abb}(A, B) = \emptyset$.

Aufgabe 0.2 (Vollständige Induktion)
Man zeige mittels vollständiger Induktion:
(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{K}$ (einem beliebigen Körper) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

(Bitte wenden!)

Aufgabe 0.3 (Reelle Zahlen)
In der Vorlesung wurde die Konstruktion der reellen Zahlen mittels Dedekindscher Schnitte skizziert. In dieser Aufgabe werden einige Zwischenschritte durchgeführt.
• Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{Q}$ heisst **Dedekindscher Schnitt**, falls A nicht-trivial und nach oben ordnungsabgeschlossen ist und kein kleinstes Element enthält, d.h. also genau dann wenn
(α) $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{Q}$
(β) $\forall x > y : \ (y \in A \Rightarrow x \in A)$ und
(γ) $\forall x \in A : \ (\exists y \in A : \ y < x)$
• Es sei $\mathfrak{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ die Menge aller Dedekindschen Schnitte. Man zeige:
(i) Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ ist $A_r := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$ ein Dedekindscher Schnitt.
(ii) Für je zwei $A, B \in \mathfrak{D}$ ist

$$A + B := \{z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in A, y \in B : z = x + y\}$$

wieder ein Dedekindscher Schnitt. Das Tripel $(\mathfrak{D}, +, A_0)$ ist eine abelsche Gruppe. Man zeige insbesondere die Gültigkeit der Formel

$$-A = \{y \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in \mathbb{Q} \setminus A : x > -y\}$$

• Wir erklären nun auf $\mathfrak{D}$ eine Relation $'<'$ durch $A < B \Leftrightarrow B \subsetneq A$. Man zeige
(iii) Diese definiert eine strenge Totalordnung auf $\mathfrak{D}$, d.h. $<$ ist transitiv (d.h. aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$) und trichotomisch (d.h. es gilt entweder $A < B$, $B < A$ oder $A = B$).
(iv) Die Anordnung ist verträglich mit der Addition, d.h. $\forall A, B, C$: $A < B \Rightarrow A + C < B + C$. Folgern Sie: $0 < A \Leftrightarrow -A < 0$.
(v) Für je zwei $A, B \in \mathfrak{D}$ mit $A \geq 0$ und $B \geq 0$ ist

$$A \cdot B := \{z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in A, y \in B : z = x \cdot y\}$$

wieder ein Dedekindscher Schnitt. $(\mathfrak{D} \setminus A_0, \cdot, A_1)$ ist eine abelsche Gruppe. Geben Sie eine Formel für A^{-1} analog zu der für $-A$.
(vi) Die Anordnung ist verträglich mit der Multiplikation, d.h. aus $A > 0$ und $B > 0$ folgt $A \cdot B > 0$.
• Wir setzen: Für $A \geq 0$ und $B < 0$: $A \cdot B := -(A \cdot (-B))$
Für $A < 0$ und $B \geq 0$: $A \cdot B := -((-A) \cdot B)$
Für $A < 0$ und $B < 0$: $A \cdot B := (-A) \cdot (-B)$
(vii) Es gilt das Distributivgesetz.
(viii) Für eine nichtleere Teilmenge $T \subset \mathfrak{D}$ gilt entweder $\bigcup_{A \in T} A = \mathbb{Q}$ oder

$$\inf T := \bigcup_{A \in T} A$$

ist wieder ein Dedekindscher Schnitt und eine grösste untere Schranke von T. Folgern Sie daraus, dass $(\mathfrak{D}, A_0, A_1, +, \cdot, <)$ ein vollständiger angeordneter Körper ist, mithin isomorph zu $\mathbb{R}$.