Felipe Müller
Differentialgeometrie SS 17

Aufgabe 8.2 Metrik auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit

Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ euklidischer VR der Dim. n.

Für $W \in G(k,V)$ identifizieren wir $W^\vee \cong W$ und $(W^\perp)^\vee \cong W^\perp$

und $T_W G(k,V) \cong \mathrm{Hom}(W, W^\perp) = W^\vee \otimes W^\perp \cong (W^\perp)^\vee \otimes W = \mathrm{Hom}(W^\perp, W)$

$$\underset{A}{\rotatebox{90}{$\in$}} \longmapsto A^\natural$$

Wir setzen für $A, B \in T_W(G(k,V))$: $g_W(A,B) := \mathrm{Tr}_W(A^\natural B)$

(in der Tat: $A^\natural B \in \mathrm{End}(W)$)

(a) · Sei $v_1, \dots, v_k \in W \subset V$ eine bzgl. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ONB von W sowie $f_1, \dots, f_{n-k} \in W^\perp$ eine orthogonale Vervollständigung der Basis $v_1, \dots, v_k$ zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, f_1, \dots, f_{n-k} \in V$ von V.

· Außerdem sei $v_i^*, f_j^* \in V^\vee$ die zur obigen Basis korrespondierende duale Basis von $V^\vee$.

· Die Abb. $(\cdot)^\natural$ faktorisiert über die Isomorphismen "Dualisierung" $(\cdot)^\vee$ und "Braiding" $B: v^* \otimes w \longmapsto w \otimes v^*$: Für ein $A \in \mathrm{Hom}(W, W^\perp)$ gibt es Koeffizienten $A_{\nu\mu} \in \mathbb{R}$, $\nu \in \{1, \dots, k\}$, $\mu \in \{1, \dots, n-k\}$, s.d.

$$A = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{n-k} A_{\nu\mu} \, v_\nu^* \otimes f_\mu .$$

$$\Longrightarrow A^\natural = B(A^\vee) = B\Big(\sum_\nu \sum_\mu A_{\nu\mu} \, v_\nu \otimes f_\mu^*\Big)$$

$$= \sum_\nu \sum_\mu A_{\nu\mu} \, f_\mu^* \otimes v_\nu$$

Entsprechend ist die Matrix-Darstellungen bzgl der gew. Basen von A und $A^\natural$ gegeben durch die Einträge $A_{\nu\mu}$, die Abb. $A \mapsto A^\natural$ entspricht der Transposition.

(b) $\forall\, W \in G(k,V)$ ist g_W ein eukl. Inneres Prod. auf $T_W(G(k,V))$.

- g_W ist symmetrisch: Da Tr invariant unter zykl. Permutation.
- g_W ist linear im ersten Argument: klar, da Tr linear
- g_W ist positiv definit: $A \in T_W(G(k,V))$, dann

$$\mathrm{Tr}_W(A^{\natural} A) = \sum_{i=1}^{k} v_i^*\left(A^{\natural} A(v_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} v_i^*\Big(A^{\natural}\Big(\sum_{\ell,m} A_{\ell m}\, \underbrace{v_\ell^*(v_i)}_{=\delta_{i\ell}} \otimes f_m\Big)\Big)$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ m=1}}^{k} A_{i,m}\, v_i^*\Big(\sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu}\, \underbrace{f_\mu^*(f_m)}_{=\delta_{\mu m}}\, v_\nu\Big)$$

$$= \sum_{i,\nu,m}^{k} A_{im} A_{\nu m}\, \underbrace{v_i^*(v_\nu)}_{=\delta_{i\nu}} = \sum_{i,m=1}^{k} (A_{im})^2 \geq 0$$

und $=0$ genau dann, wenn $A \equiv 0$.

(c) g_W ist ein glattes ~~Vektorfeld~~ Tensorfeld:

Sei OE $V = \mathbb{R}^n$, wir prüfen die Glattheit in der Kartenumgebung $(U_Q, \varphi_{(P,Q)})$ mit $Q = {}_{\mathbb{R}}\langle e_1, \dots, e_{n-k}\rangle$ und $P = {}_{\mathbb{R}}\langle e_{n-k+1}, \dots, e_n\rangle$.

mit $\psi_{(P,Q)} = \varphi_{(P,Q)}^{-1}$ und $\psi_{(P,Q)}(Y) = {}_{\mathbb{R}}\langle e_{n-k+i} + Y e_{n-k+i} \mid i = 1, \dots, k\rangle$
$=: W$, für $Y \in \mathrm{Mat}((n-k)\times k, \mathbb{R})$.

Wir "bestimmen" zunächst eine Basis von $W^\perp$: Bzw. Wir zeigen, dass sich eine Basis von $W^\perp$ angeben lässt, die in glatter Weise mit Y (und damit mit W) variiert. Es ist

$$\tilde{Y} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{(n-k)\times(n-k)} & Y \\ \hline 0 & \mathbb{1}_{k\times k} \end{array}\right)$$

invertierbar; die letzten k Spalten bilden eine Basis von W. Damit bilden die Projektionen von e_i, $i = 1, \dots, k$ auf $W^\perp$ eine Basis von $W^\perp$.

Offenbar ist $e_i = \pi_W(e_i) + \pi_{W^\perp}(e_i)$

$\Leftrightarrow \pi_{W^\perp}(e_i) = e_i - \pi_W(e_i)$

$\pi_W : \mathbb{R}^n \to W$ proj.
$\pi_{W^\perp} : \mathbb{R}^n \to W^\perp$ proj.

Für $\pi_W(e_i) \in W$ gilt die "charakterisierende" Bedingung:

$$(1) \quad \langle \pi_W(e_i) - e_i , \tilde{Y} e_{n-k+j} \rangle = 0 \quad \forall\, j \in \{1, \dots, k\}$$

$\Rightarrow$ $\pi_W(e_i)$ hängt glatt von Y ab.

$\Rightarrow$ $\pi_{W^\perp}(e_i)$ ebenso.

Insbesondere haben wir einen lokalen Rahmen von $TG(k,V)$ konstruiert.

· Berechnung der Koeffizientenfunktionen von g:

Schreibe: $v_i := \tilde{Y} e_{n-k+i} = e_{n-k+i} + Y e_{n-k+i}$, $f_j = \pi_{W^\perp}(e_j) = e_j - \pi_W(e_j)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, n-k\}$

$$g_{(\ell,m),(\nu,\mu)} = \frac{1}{\|v_\ell\|_2 \|v_\nu\|_2} g_W(v_\ell^* \otimes f_m, v_\nu^* \otimes f_\mu) = \sum_{i=1}^k v_i^* (f_m^* \otimes v_\ell (v_\nu^* \otimes f_\mu (v_i))) \cdot \frac{1}{\|v_i\|_2^2 \cdot \|v_\ell\|_2 \cdot \|v_\nu\|_2}$$

$$= \sum_{i=1}^k \langle v_\nu , v_i \rangle \langle f_m , f_\mu \rangle \langle v_\ell , v_i \rangle \frac{1}{\|v_i\|^2 \|v_\ell\| \|v_\nu\|} .$$

$\Rightarrow$ Jeder Summand ist glatt in Y, da v_i, f_m glatt in Y (s.o.)

$\Rightarrow$ g_W glatt in Y, da Koeff glatt in Y

$\Rightarrow$ g_W Metrik.

(d): $G(1, n+1) = \mathbb{RP}^n$. Aus (1) lassen sich die Projektion $\pi_W(e_i)$ bestimmen:

$$\langle \pi_W(e_i), \tilde{Y} e_{n+1} \rangle = y_i \quad \forall i \qquad \tilde{Y} = \left(\begin{array}{c|c} 1\!\!1_{n \times n} & \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \pi_W(e_i)^T \cdot \underbrace{(y_1, \dots, y_n, 1)^T \cdot (y_1, \dots, y_n, 1)}_{= \|Y\|_2^2 + 1} = y_i (y_1, \dots, y_n, 1)$$

$$\Leftrightarrow \pi_W(e_i)^T = \frac{y_i}{\|y\|_2^2 + 1} (y_1, \dots, y_n, 1)$$

Die Koeffizientenfunktionen $g_{(e_m), (v_1 f_\mu)}$ vereinfachen sich für $k = 1$, $n = n+1$, zu

$$g_{m,\mu} = \langle v_1, v_1 \rangle^2 \langle f_m, f_\mu \rangle \frac{1}{\|v_1\|^4}$$

$$= \langle \tilde{Y} e_{n+1}, \tilde{Y} e_{n+1} \rangle^2 \langle e_m - \pi_W(e_m), e_\mu - \pi_W(e_\mu) \rangle \frac{1}{\|v_1\|_2^4}$$

$$= \left(\|y\|_2^2 + 1\right) \left(\delta_{m\mu} - \frac{y_m y_\mu}{\|y\|_2^2 + 1} - \frac{y_m y_\mu}{\|y\|_2^2 + 1} + \frac{y_m y_\mu}{\|y\|_2^2 + 1} \right) \frac{1}{\|v_1\|^4}$$

$$= \left(\|y\|_2^2 + 1 \right) \left(\delta_{m\mu} - \frac{y_m y_\mu}{\|y\|_2^2 + 1} \right) \frac{1}{\left(\|y\|_2^2 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\|y\|_2^2 + 1} \left(\delta_{m\mu} - \frac{y_m y_\mu}{\|y\|_2^2 + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \quad g = \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{y_i y_j}{\|y\|_2^2 + 1} \right) \frac{1}{1 + \|y\|_2^2} \, dy_i \otimes dy_j .$$

(e) $(\cdot)^\perp : G(k, V) \longrightarrow G(n-k, V)$, $W \mapsto W^\perp$ ist ein Diffeomorphismus, da $(\cdot)^\perp$ bijektiv und die darstellenden Matrizen glatt variieren.

Wir berechnen nun die Isometrie in einem Punkt:

Sei $P \in G(k, V)$ und $Q \in G(n-k, V)$, $P^\perp = Q$.

Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine ONB, s.d. $Q = {}_{\mathbb{R}}\langle e_1, \dots, e_{n-k} \rangle$ und $P = {}_{\mathbb{R}}\langle e_{n-k+1}, \dots, e_n \rangle$. Es lassen sich Kartenumgebungen von P und Q wählen, sodass $D(P)^\perp = (X)^\natural$. $\forall X \in T_P G(k, V)$

$$\rightarrow g_P\left(e_l^* \otimes e_{n-k+m}, e_\nu^* \otimes e_{n-k+\mu} \right) = \delta_{l\nu} \delta_{m\mu} \quad \text{und}$$

$$g_Q\left((e_l^* \otimes e_{n-k+m})^\natural, (e_\nu^* \otimes e_{n-k+\mu})^\natural \right) = \delta_{l\nu} \delta_{m\mu}$$

✓