Aufgabenblatt 9

Abgabe bis 27.6.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 9.1 Torsion

Es sei $\tilde{\nabla}$ ein affiner Zusammenhang auf M mit (nicht notwendigerweise verschwindender) Torsion $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $T(X,Y) := \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y]$.

(a) Zeigen Sie: $\nabla_X Y := \tilde{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$ ist torsionsfrei.

(b) Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\tilde{\nabla}$ ein metrischer Zusammenhang, und ∇ aus (a) der Levi-Civita-Zusammenhang, so gilt $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$g(T(X,Y),Y) = 0 \tag{1}$$

Aufgabe 9.2 Paralleltransport

Es sei $S^2 = \{x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik, $\theta \in \mathbb{R}$ und γ_θ der durch Verkettung von

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : [0,\pi/2] \to S^2\,, \quad && \gamma_1(t) := (\sin t, 0, \cos t) \\ &\gamma_2 : [0,\theta] \to S^2\,, && \gamma_2(t) := (\cos t, \sin t, 0) \\ &\gamma_3 : [0,\pi/2] \to S^2\,, && \gamma_3(t) := (\cos\theta\cos t, \sin\theta\cos t, \sin t) \end{aligned} \tag{2}$$

gegebene stückweise differenzierbare geschlossene Weg. Zeigen Sie: Der Paralleltransport $P^{(\gamma_\theta)} : T_{(0,0,1)}S^2 \to T_{(0,0,1)}S^2$ entlang γ_θ ist eine Drehung um den Winkel θ. *Hinweis:* Anstatt Christoffel-Symbole zu berechnen und Differentialgleichungen zu lösen (s. nächste Aufgabe) finden Sie Schnitte von $\gamma_i^*(T\mathbb{R}^3)$ welche parallel zu S^2 entlang γ_i variieren.

Aufgabe 9.3 Geodäten

Die Poincaré-Halbebene ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ mit der Metrik

$$g = \frac{1}{y^2}\big(dx \otimes dx + dy \otimes dy\big)$$

(a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole Γ^i_{jk} für $i,j,k = x,y$.

(b) Zeigen Sie: Die Spur einer Geodäte in $\mathbb{H}$ ist entweder ein (euklidischer) Halbkreis mit Mittelpunkt $(c,0)$ auf der x-Achse oder eine offene Halbgerade parallel zur y-Achse.

(c) Zeigen Sie: Alle diese Geodäten haben unendliche Bogenlänge, insbesondere ist $\mathbb{H}$ geodätisch vollständig.

Aufgabe 9.4 Killing-Felder

Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld $K \in \mathfrak{X}(M)$ heisst Killing-Feld, wenn die Lie-Ableitung der Metrik verschwindet, d.h. $L_K g = 0$. (Dies ist äquivalent dazu, dass der von K erzeugte lokale Fluss isometrisch ist.)

(a) Zeigen Sie: K ist ein Killing-Feld $\Leftrightarrow \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $g(\nabla_X K, Y) + g(\nabla_Y K, X) = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Vektorraum der Killing-Felder der Poincaré-Halbebene aus Aufgabe 9.3. *Hinweis:* Schreiben Sie $K = k^x\partial_x + k^y\partial_y$ und gehen Sie vor wie in Aufgabe 7.3.