Aufgabenblatt 8

Abgabe bis 20.6.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 8.1 Trivialisierung

(a) Zeigen Sie, dass jedes Vektorbündel $\pi : E \to M$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit einen Zusammenhang zulässt. *Hinweis:* Im Gegensatz zum Beweis von Prop. 7.3 benötigt man hier tatsächlich $\sum f_i = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Vektorbündel E über $M = \mathbb{R}^n$ trivialisierbar ist. *Hinweis:* Fixieren Sie eine Zusammenhang auf E und benutzen Sie Paralleltransport entlang von $[0,1] \ni t \mapsto tx$ zur Konstruktion einer Abbildung $T_0\mathbb{R}^n \times E_0 \to E$. Warum funktioniert dieser Beweis nicht für $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?

Aufgabe 8.2 Metrik auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit

Wir wollen aus einem euklidischen inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V eine Riemmansche Metrik auf $G(k,V)$ konstruieren. Für $W \in G(k,V)$ identifizieren wir dazu (i) auf Grund von $V = W \oplus W^\perp$: $V/W \cong W^\perp$; (ii) auf Grund der Tatsache, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf W und $W^\perp$ nicht entartet ist, $W^\vee \cong W$ und $(W^\perp)^\vee \cong W^\perp$; (iii) mit Aufgabe 3.5 dann

$$T_W G(k,V) \cong \mathrm{Hom}(W, W^\perp) = W^\vee \otimes W^\perp \cong (W^\perp)^\vee \otimes W = \mathrm{Hom}(W^\perp, W)$$

wobei wir der Deutlichkeit halber den Isomorphismus $\mathrm{Hom}(W,W^\perp) \cong \mathrm{Hom}(W^\perp, W)$ explizit als $A \mapsto A^\natural$ schreiben. Wir setzen dann für $A, B \in T_W G(k,V)$:

$$g_W(A,B) := \mathrm{Tr}_W(A^\natural B)$$

(a) Legen Sie sich Rechenschaft über die obigen Isomorphismen ab. Vergewissern Sie sich insbesondere, dass bezüglich Orthonormalbasen für W und $W^\perp$ die Abbildung $A \mapsto A^\natural$ einfach der Transposition von Matrizen entspricht.

(b) Zeigen Sie: $\forall W \in G(k,V)$ ist g_W ein euklidisches inneres Produkt auf $T_W G(k,V)$.

(c) $W \mapsto g_W$ ist glatt, d.h. eine Riemannsche Metrik. *Hinweis:* Zeigen Sie dies für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardprodukt in unserer Karte $(U_Q, \varphi_{(P,Q)})$ für $Q = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_{n-k})$, $P = Q^\perp$.

M.a.W., $W \in U_Q$ hat als Basis die Matrix $\begin{pmatrix} Y \\ \mathbf{1}_{k\times k} \end{pmatrix}$ für ein $Y \in \mathrm{Mat}((n-k)\times k, \mathbb{R})$.

(d) Für $k = 1$ reproduzieren Sie die Metrik aus Aufgabe 7.4 (mit $n-1$ statt n, sorry), d.h. den Koordinatenausdruck $\displaystyle\sum_{ij} dy_i\Big(\delta_{ij} - \frac{y_i y_j}{1+\sum y_k^2}\Big) dy_j \frac{1}{1+\sum y_k^2}$

(e) Die Abbildung $G(k,V) \to G(n-k,V)$, $W \mapsto W^\perp$ ist eine Isometrie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 WEYLSCHE EICHUNG

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie: Ist ∇ ein affiner Zusammenhang auf M, und $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ $\mathbb{R}$-bilinear, so gilt: $\tilde{\nabla}$ ist ein affiner Zusammenhang genau dann, wenn $\tilde{\nabla} - \nabla \in \Gamma(T^{(1,2)}M)$.

(b) Sei nun g eine Riemannsche Metrik auf M, und $A \in \Omega(M)$ eine Einsform. Zeigen Sie: Es gibt genau einen torsionsfreien affinen Zusammenhang $\nabla^{(g,A)}$ auf M mit der Eigenschaft, dass $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$Xg(Y,Z) - g(\nabla_X^{(g,A)} Y, Z) - g(Y, \nabla_X^{(g,A)} Z) = -2A(X)\, g(Y,Z)$$

(c) Für $f \in \mathcal{F}(M)$ sei $g^{(f)} := e^{2f} g$ und $A^{(f)} := A - df$. Zeigen Sie: $g^{(f)}$ ist eine Riemannsche Metrik auf M und es gilt: $\nabla^{(g,A)} = \nabla^{(g^{(f)}, A^{(f)})}$