Aufgabenblatt 7

Abgabe bis 13.6.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 7.1 PULLBACK

Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel, und $F : L \to M$ eine differenzierbare Abbildung, $F^*(E)$ der Pullback von E via F gemäss Def. 6.7.

(a) Zeigen Sie: Ist $\sigma \in \Gamma(E)$, so ist $F^*(\sigma) \in \Gamma(F^*(E))$.

(b) Zeigen Sie: $\Gamma(F^*(E))$ wird als $\mathcal{F}(L)$-Modul lokal von $F^*(\Gamma(E))$ erzeugt, d.h. $\forall p \in L\ \exists$ Umgebung U und $\rho_i \in F^*(\Gamma(E))$, $i = 1, \ldots, r$ s.d. $\forall \rho \in \Gamma(F^*(E))\ \exists f_i \in \mathcal{F}(L)$, $i = 1, \ldots, r$ s.d. $\rho = \sum_{i=1}^r \rho_i f_i$ auf U.

Aufgabe 7.2 TENSORFELDER UND -ABLEITUNGEN

Wir beweisen einen Teil von Prop. 6.13: Es sei $\delta : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ eine Tensorableitung, s. Def. 6.12.

(a) Identifizieren Sie mit Prop. 6.10 ein Tensorfeld $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ als multilineare Abbildung und zeigen Sie, dass $\forall \omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega(M)$, $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}\delta\big(A(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)\big) &= (\delta(A))(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)\\ &+ \sum_{i=1}^r A(\omega_1, \ldots, \delta(\omega_i), \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s) + \sum_{j=1}^s A(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, \delta(X_j), \ldots, X_s)\end{aligned}$$

Hinweis: Beginnen Sie mit $C(X \otimes \omega) = \omega(X) = X(\omega)$ und verallgemeinern Sie geeignet.

(b) Folgern Sie: Ist $\tilde{\delta}$ eine zweite Tensorableitung, welche auf $\mathcal{F}(M)$ und $\mathfrak{X}(M)$ mit δ übereinstimmt, so gilt bereits $\tilde{\delta} = \delta$.

Aufgabe 7.3 LIE-ABLEITUNG

Es sei auf $\mathbb{R}^2$ mit linearen Standardkoordinaten (x, y) $I \in T^{(1,1)}\mathbb{R}^2$ das Tensorfeld

$$I = \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx - \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$$

und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld,

$$X = u(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

(a) Leiten Sie Differentialgleichungen für die Funktionen u und v her, welche äquivalent zur Bedingung sind, dass I invariant unter dem von X erzeugten Fluss sind, d.h. $L_X(I) = 0$. *Hinweis:* Benutzen Sie, dass L_X eine Tensorableitung ist.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichungen für u, v im Raum $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1, x, y, x^2, xy, y^2)$ der Polynome vom Grad ≤ 2. *Hinweis:* Der Lösungsraum ist 6-dimensional.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4 Metrik auf Sphäre und projektiven Raum

· Die n-dimensionale Sphäre $S^n = \{\sum_{i=1}^{n+1}(x_i)^2 = 1\}$ erbt als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch Rückzug des euklidischen Standardprodukts über die Inklusion $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die Riemannsche Metrik

$$g = i^*\Big(\sum_{i=1}^{n+1}(dx_i)^2\Big)$$

· Der projektive Raum $\mathbb{RP}^n = \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim\big) \ni [x_1, \ldots, x_{n+1}]$ ist mit den Karten $U_i = \{[x] \,|\, x_i \neq 0\}$,

$$\varphi_i([x]) = \Big(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\Big) =: (y_1, \ldots, y_n)$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

· Die Abbildung: $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$, $\pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) := [x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

(a) Geben Sie eine explizite Formel für die Koordinatendarstellung eines lokalen Schnitts über U_{n+1} an, d.h. eine differenzierbare Abbildung $\sigma : \varphi_{n+1}(U_{n+1}) \to S^n$, mit $\pi \circ \sigma = \varphi_{n+1}^{-1}$.

(b) Berechnen Sie die Darstellung der Riemannschen Metrik $\sigma^*(g)$ in den Koordinaten $(y_1, \ldots, y_n)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma^*(g)$ nicht von der Wahl des Schnittes abhängt.

(Die Verallgemeinerung auf $G(k, V)$ diskutieren wir auf dem nächsten Blatt, ohne Quatsch.)