Aufgabenblatt 6

Abgabe bis 6.6.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 6.1 Möbius-Bündel

$$M := \mathbb{R}^2/\sim\,, \qquad (x,y) \sim (x+n, (-1)^n y)\,, n \in \mathbb{Z}$$

(a) Zeigen Sie, dass mit $\pi : M \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $[(x,y)] \mapsto [x]$, mit offensichtlichen Vektorraumstrukturen in den Fasern, M ein Vektorbündel vom Rang 1 über S^1 ist.

(b) Zeigen Sie, dass M nicht trivialisierbar ist.

Aufgabe 6.2 Tangentialbündel der Sphäre

Es sei S^n die n-dimensionale Sphäre, TS^n ihr Tangentialbündel, und $S^n \times \mathbb{R}$ das triviale Bündel über S^n. Geben Sie eine Trivialisierung der Whitney-Summe $TS^n \oplus S^n \times \mathbb{R} \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ an.

Aufgabe 6.3 Orientierbarkeit

Erklärungen: Der Kartenwechsel $\chi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \chi(U \cap V)$ zwischen zwei Karten (U, φ) und (V, χ) einer Mannigfaltigkeit heisst orientierungserhaltend, falls $\det D\chi \circ \varphi^{-1}(x) > 0\ \forall x \in \varphi(U \cap V)$. Ein orientierter Atlas ist ein Atlas, in dem alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Eine Mannigfaltigkeit heisst orientierbar, falls ein orientierter Atlas existiert. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann orientierbar, wenn $\wedge^n TM^\vee$ trivialisierbar ist.

(b) (Der Totalraum von) TM ist auf jeden Fall orientierbar.

Hinweis: Die Übergangsfunktionen der höchsten äusseren Potenz des Kotangentialbündels sind gerade $(\det D\chi \circ \varphi^{-1}(x))^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = GL(1, \mathbb{R})$.

Aufgabe 6.4 Ein-Parameter Gruppen

(a) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ eine differenzierbare ein-Parameter Untergruppe, d.h. ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to GL(n, \mathbb{R})$, der auch eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten ist. Zeigen Sie: $\exists X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ s.d. $\gamma(t) = \exp(tX)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie je ein Beispiel, in dem (i) γ eine Einbettung ist, (ii) γ eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist, und (iii) $\gamma(\mathbb{R})$ kompakt ist.

(c) Nehmen Sie jetzt nur noch an, dass $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ eine *stetige* ein-Parameter Untergruppe ist und zeigen Sie, dass daraus bereits folgt, dass γ differenzierbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie die folgende aus der Analysis bekannte Eigenschaft der Faltung: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit kompaktem Träger, und $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist

$$h(t) = (f * \sigma)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\sigma(s)ds$$

differenzierbar (mit $h' = f' * \sigma$). Zur Anwendung auf das gegebene Problem sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger und $\int \Theta(s)ds = 1$. Dann ist $\tilde{\gamma} = \Theta * \gamma$ differenzierbar und mit $Y = \int \Theta(s)\gamma(s)^{-1}ds$ gilt $\tilde{\gamma}(t) = Y \cdot \gamma(t)$. Sie müssen nur noch sicherstellen, dass Y invertierbar ist.