Aufgabenblatt 5

Abgabe bis 30.5.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 5.1 Tangentialbündel der Sphäre

Für eine reelle positive Zahl $0 < t \neq 1$ betrachten wir die Menge

$$M = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 4t\} \cap \{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \leq 2(1+t^2)\} \subset \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$$

Hier bezeichnet $\bar{w}$ die komplexe Konjugation einer komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$. Hierbei lässt sich $\mathbb{C}$ durch eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Die M definierenden Gleichungen lassen sich ebenfalls mittels $z_j = x_j + iy_j$, mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, in dieser Weise zerlegen.

(a) Zeigen Sie: M ist eine differenzierbare (reelle) Mannigfaltigkeit mit Rand.

(b) Zeigen Sie: $\partial M \cong \mathbb{R}P^3$.
Hinweis: Mit $S^3 = \{|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ betrachte man die Abbildung $A : S^3 \to \mathbb{C}^3$ definiert durch

$$\begin{aligned} z_1 &= i((w_1^2 + w_2^2) - t(\bar{w}_1^2 + \bar{w}_2^2)), \\ z_2 &= (w_1^2 - w_2^2) + t(\bar{w}_1^2 - \bar{w}_2^2), \\ z_3 &= 2(w_1 w_2 + t\bar{w}_1\bar{w}_2). \end{aligned}$$

Für die Surjektivität beachte man dass die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} i & i & -it & -it \\ 1 & -1 & t & -t \\ it & it & -i & -i \\ t & -t & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gleich $4(t^2-1)^2$ ist.

(c) Erläutern Sie die Aussage: "∂M (und damit $\mathbb{R}P^3$) ist das Einheits-Tangentialbündel der 2-Sphäre S^2, d.h. ∂M besteht aus allen Tangentialvektoren von S^2 mit "Norm" 1."

Aufgabe 5.2 Flüsse

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $V \in \mathfrak{X}(M)$ und $\gamma : J \to M$ eine maximale Integralkurve mit $\sup J = b < \infty$. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_0 \in J$ die Menge $\gamma([t_0, b))$ in keiner kompakten Teilmenge von M enthalten ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3 DIFFEOMORPHISMEN

Es sei $F : M \to N$ eine bijektive differenzierbare Abbildung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Für ein differenzierbares Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ sei $F^*(X)$ ein (nicht unbedingt differenzierbares) Vektorfelder gemäß folgender Vorschrift

$$N \ni q \mapsto (F^*(X))_q := DF_{F^{-1}(q)} X_{F^{-1}(q)} \in T_q N.$$

(a) Zeigen Sie: Ist F ein Diffeomorphismus, so definiert $F^*(X)$ für jedes differenzierbare Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein differenzierbares Vektorfeld in $\mathfrak{X}(N)$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren, bijektiven Abbildung $F : M \to N$ an, sodass $F^*(X)$ i.A. kein differenzierbares Vektorfeld ist.

(c) Zeigen Sie: Ist für obige Vorschrift F^* zusätzlich die Bedingung

$$F^*(\mathfrak{X}(M)) = \mathfrak{X}(N)$$

erfüllt, dann ist F ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 5.4 NICHT KOMMUTIERENDE FLÜSSE

Sei $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,r) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ und seien $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ mit

$$V = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad W = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z},$$

sowie θ, ψ die Flüsse von V respektive W. Zeigen Sie:

(a) Die Vektorfelder V und W kommutieren, d.h. $[V, W] \equiv 0$.

(b) Es gibt ein $p \in M$ und $s, t \in \mathbb{R}$, so dass $\theta_t \circ \psi_s(p)$, $\psi_s \circ \theta_t(p)$ jeweils definiert ist und es gilt

$$\theta_t \circ \psi_s(p) \neq \psi_s \circ \theta_t(p).$$