Aufgabenblatt 4

Abgabe bis 23.5.2017, 16h
(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 4.1 Submersionen

Es sei $F : M \to N$ eine Submersion von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, d.h. $\forall p \in M$ ist $DF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv.

(a) Zeigen Sie, dass F offen ist, d.h. $\forall U \subset M$ offen ist auch $F(U) \subset N$ offen.

(b) Zeigen Sie, dass falls M nicht leer und kompakt, und N zusammenhängend ist, F surjektiv ist, d.h. $F(M) = N$.

Aufgabe 4.2 Einbettung des projektiven Raums

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$F(x, y, z) := (x^2 - y^2, xy, yz, zx)$$

eine Einbettung von $\mathbb{RP}^2 := \big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\!\sim\big) \ni [x, y, z]$ in den $\mathbb{R}^4$ induziert. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Die Abbildung $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^2$, $\pi(x, y, z) := [x, y, z]$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

(b) $F|_{S^2} : S^2 \to \mathbb{R}^4$ ist eine Immersion: Ausgehend von der definierenden Gleichung beschreiben Sie für alle $p \in S^2$ T_pS^2 als Unterraum von $\mathbb{R}^3 = T_p\mathbb{R}^3$ und zeigen Sie, dass $DF_p|_{T_pS^2}$ vollen Rang hat.

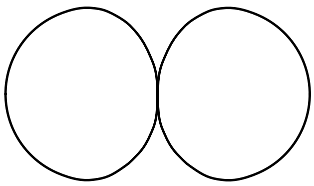
(c) Es existiert eine eindeutige Abbildung $\tilde{F} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft, dass $F = \tilde{F} \circ \pi$.

(d) $\tilde{F}$ ist eine injektive Immersion.

(e) $\tilde{F}$ ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Aufgabe 4.3 Immergierte Untermannigfaltigkeiten

Geben Sie von der Skizze inspiriert ein Beispiel für ein Paar von differenzierbaren Abbildungen $F_1 : M_1 \to N$, $F_2 : M_2 \to N$ mit den Eigenschaften:
(i) F_1 und F_2 sind injektive Immersionen mit $F_1(M_1) = F_2(M_2)$.
(ii) M_1 ist zusammenhängend, und M_2 ist nicht zusammenhängend.



Bitte wenden!

Aufgabe 4.4 UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

Es seien $n, d \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $P(x) \in \mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]$ ein homogenes Polynom in n Variablen vom Grad d, d.h.

$$P(tx) = t^d P(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $M_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, P(x) = \alpha\}$.

(a) Ist $\alpha \neq 0$, so ist M_α entweder leer oder eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist $\alpha \cdot \beta > 0$, so sind M_α und M_β diffeomorph zueinander.

(c) Geben Sie für n, d Ihrer Wahl ein Beispiel eines homogenen Polynoms P, dessen Nullstellenmenge M_0 nicht leer, aber keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.