Aufgabenblatt 3

Abgabe bis 16.5.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Hinweis: Benutzen Sie auf diesem Blatt Ihre für die jeweilige Aufgabe bevorzugte Definition des Tangentialraums von Mannigfaltigkeiten bzw. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^m$.

Aufgabe 3.1 UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

Der Torus T^2 aus Aufgabe 1.2 ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, und auch $T^2 \cong S^1_a \times S^1_b$ (mit zur Unterscheidung indizierten $S^1_a = S^1_b = S^1$) ist ein Isomorphismus von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

(a) Bestimmen Sie für $p \in T^2$ den Tangentialraum $T_pT^2 \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Beschreiben Sie die Zerlegung $T_pT^2 = T_pS^1_a \oplus T_pS^1_b$. (D.h., geben Sie die zugehörigen Unterräume $T_pS^1_a$, $T_pS^1_b$ von T_pT^2 an.)

Aufgabe 3.2 MATRIX-GRUPPEN

Die allgemein lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ ist das einfachste Beispiel einer Lie-Gruppe, eine mit differenzierbaren Gruppenoperationen versehene Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist (tautologisch) $T_A GL(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ (oder, etwas intrinsischer, $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$).

(a) Zeigen Sie, dass $SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, und bestimmen Sie den Tangentialraum an $A \in SL(n, \mathbb{R})$ (als Unterraum von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$). *Hinweis:* Die Ableitung der Determinante ist die Spur.

(b) Wiederholen Sie die Aufgabe für entweder

$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T \cdot A = \mathrm{id}_{n\times n}\}$

oder

$Sp(2n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$, wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{n\times n} \\ -\mathrm{id}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.3 DURCHSCHNITTE

Es seien M_1, M_2 zwei Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^m$, der Dimension n_1, n_2. Angenommen, es gibt ein $p \in M_1 \cap M_2$ mit

$$T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^m$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ von p so dass gilt: $M_1 \cap M_2 \cap U$ ist eine $(n_1 + n_2 - m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ mit $T_q(M_1 \cap M_2 \cap U) = T_qM_1 \cap T_qM_2\ \forall q \in M_1 \cap M_2 \cap U$.

(b) Die Voraussetzung $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^m$ kann nicht fallen gelassen werden: Geben Sie ein Beispiel von zwei Untermannigfaltigkeiten M_1 und M_2 von $\mathbb{R}^m$, so dass $M_1 \cap M_2$ (nicht leer, aber) keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ ist.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3.4 Kurven

Gemäß der Vereinbarung von Aufgabe 2.2 ist der Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand M definiert über die lokalen Diffeomorphismen mit dem Halbraum $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ sowie der Erklärung: $T_x\overline{\mathbb{R}}^n_+ := \mathbb{R}^n$ für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Eine Kurve durch $p \in M$ ist (weiterhin) eine differenzierbare Abbildung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ ($\epsilon > 0$). Zeigen Sie: Die Abbildung $\{\text{Kurven durch } p\} \to T_pM$, $\gamma \mapsto \dot\gamma(0)$ ist für Mannigfaltigkeiten mit Rand im Allgemeinen *nicht surjektiv*.

Aufgabe 3.5 Quotientenräume

Zeigen Sie für die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, V)$ der k-dimensionalen Unterräume eines n-dimensionalen Vektorraums V:

$$T_W G(k, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V/W) \quad \forall W \in G(k, V)$$