Aufgabenblatt 2

Abgabe bis 9.5.2017, 16h

Aufgabe 2.1 Differenzierbare Abbildungen

Für jeden topologischen Raum M bezeichne $\mathcal{C}(M)$ die Algebra der stetigen Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$. Für eine stetige Abbildung $F : M \to N$ sei $F^* : \mathcal{C}(N) \to \mathcal{C}(M)$, $F^*(f) := f \circ F$.

(a) Zeigen Sie, dass F^* ein Algebra-Homomorphismus ist.

(b) Angenommen, M und N sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass $F : M \to N$ genau dann differenzierbar ist, wenn $F^*(\mathcal{F}(N)) \subset \mathcal{F}(M)$.

(c) Angenommen, $F : M \to N$ ist ein Homöomorphismus von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass F genau dann ein Diffeomorphismus ist, wenn $F^*|_{\mathcal{F}(N)}$ einen Isomorphismus $\mathcal{F}(N) \cong \mathcal{F}(M)$ definiert.

Aufgabe 2.2 Mannigfaltigkeiten mit Rändern und Ecken

Verabredung: Eine Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^m$ auf einer (nicht notwendigerweise offenen) Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst differenzierbar, falls eine differenzierbare Abbildung $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Umgebung $U \supset X$ existiert, s.d. $\tilde{F}|_X = F$. (Wie immer, differenzierbar = $\mathcal{C}^\infty$.)
· Eine *topologische Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein (Hausdorffscher, zweit-abzählbarer) topologischer Raum, welcher lokal homöomorph ist zu $\overline{\mathbb{R}}^n_+ := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \geq 0\}$, ausgerüstet mit der Relativtopologie. Eine *topologische Mannigfaltigkeit mit Ecken in Kodimension* $r \geq 1$ ist ein (Hausdorffscher, zweit-abzählbarer) topologischer Raum, welcher lokal homöomorph ist zu $\overline{\mathbb{R}}^n_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^j \geq 0 \forall j, 1 \leq j \leq r\}$. ($r = 1$ ist der Fall mit Rand.)
· Differenzierbare Strukturen mit Rand und Ecken sind dann so definiert wie ohne, mit der obigen Vereinbarung zur Differenzierbarkeit. Zeigen Sie:

(a) Jede topologische Mannigfaltigkeit mit Ecken in Kodimension $r \geq 1$ ist homöomorph zu einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand ($r = 1$).

(b) Die entsprechende Aussage für differenzierbare Strukturen ist falsch.

Aufgabe 2.3 Differenzierbare Funktionen auf projektiven Räumen

(a) Es sei $A = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2$ als Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x^1, \dots, x^{n+1})$, und $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad d, d.h. $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt $B(tx) = t^d B(x)$. Unter welchen Bedingungen definiert $B/A^{d/2}([x]) := B/A^{d/2}(x)$ eine differenzierbare Funktion auf dem reell projektiven Raum $\mathbb{RP}^n = \big(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}\big) / \sim$? (Mit Begründung!)

(b) Verallgemeinern Sie diese Funktionen auf die Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G(k, n)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 PRODUKT-MANNIGFALTIGKEITEN

Es seien M_1, M_2 nicht leere differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1$ und $i = 2$ sind die kanonischen Projektionen $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i\,, \pi_i(p_1, p_2) := p_i$ von der Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ nach M_i differenzierbare Abbildungen.

(b) Ist L eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $F : L \to M_1 \times M_2$ eine Abbildung, so gilt: F ist differenzierbar $\Longleftrightarrow$ $\pi_1 \circ F$ und $\pi_2 \circ F$ sind differenzierbar.

Aufgabe 2.5 DIFFEOMORPHISMEN-GRUPPE

(a) Es sei M eine nicht leere differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche als topologischer Raum zusammenhängend ist, d.h. sind $U_1, U_2 \subset M$ offen, mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = M$, so gilt entweder $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Diffeomorphismengruppe transitiv auf M wirkt, d.h. $\forall p, q \in M\ \exists F \in \mathrm{Diff}(M)$: $F(p) = q$.
Hinweis: Sie müssen zeigen, dass $\mathrm{Diff}(M)(p)$ offen und abgeschlossen ist. Für einen möglichen Startpunkt wählen Sie $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $h(0) = 1$ und zeigen, dass für jedes genügend kleine $\epsilon > 0$ die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1 + \epsilon h(x^1)h((x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2), x^2, \ldots, x^n)$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, auf der $\mathrm{Diff}(M)$ nicht transitiv wirkt.