Aufgabenblatt 12

Abgabe bis 18.7.2017, 16h

(Die Bearbeitung dieses Blatts ist freiwillig insofern zur Prüfungszulassung aus den 12 Blättern die Hälfte der aus den ersten 11 Blättern möglichen Punktzahl erforderlich ist.)

Aufgabe 12.1 Gaussche Krümmung

Bestimmen Sie für jeden Punkt des Torus

$$T^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 = 1\right\} \subset (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$$

(siehe Aufgabe 1 auf Blatt 1) als Untermannigfaltigkeit des euklidischen $\mathbb{R}^3$ die Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen, Gausssche Krümmung, und mittlere Krümmung.

Aufgabe 12.2 Riemannsche Krümmung

Berechnen Sie für die Poincaré Halbebene $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$, $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ (vgl. Aufgabe 9.3) den Riemannschen Krümmungstensor.

Aufgabe 12.3 Symmetrische Räume

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, R der Riemannsche Krümmungstensor. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:
(i) $\nabla_X R = 0\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.
(ii) Wenn X, Y, Z längs der regulären Kurve γ parallele Vektorfelder sind, so ist auch $R(X,Y)Z$ parallel längs γ.
(iii) Die Schnittkrümmung ist invariant unter Parallelverschiebung, d.h. ist γ ein Weg von p nach q und $\Pi \in G(2, T_pM)$, so gilt $K_p(\Pi) = K_q(P^{(\gamma)}_{qp}(\Pi))$.
Mannigfaltigkeiten mit diesen äquivalenten Bedingungen heissen lokal symmetrische Räume.
Hinweis: Für (i)⇒(ii) setzen Sie $X, Y, Z \in \gamma^*(TM)$ lokal um $p = \gamma(s_0)$ zu Vektorfeldern auf M fort.

Aufgabe 12.4 Produkte

Sind (M,g) und (N,h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, so trägt die Produktmannigfaltigkeit $M \times N$ eine natürliche Metrik $g + h$ (genauer: $\pi^*g + \xi^*h$, wo π und ξ die Projektionen auf die jeweiligen Faktoren sind).

(a) Fassen Sie $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ als Vektorfelder auf $M \times N$ auf und zeigen Sie: $\nabla_X Y = 0$.

(b) Folgern Sie: Für $v \in T_pM$ und $w \in T_qN$ gilt $K_{(p,q)}(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v,w)) = 0$

Bitte wenden!

Aufgabe 12.5 Weylscher Krümmungstensor

Es sei g eine Riemannsche Metrik auf M, $A \in \Omega(M)$, und $\nabla^{(g,A)}$ der affine Zusammenhang aus Aufgabe 8.3. Als Erinnerung gilt die Formel:

$$\nabla_X^{(g,A)}(Y) = \nabla_X(Y) + A(X)Y + A(Y)X - g(X,Y)A^\sharp$$

wo ∇ der gewöhnliche Levi-Civita Zusmmenhang von g ist.

(a) Berechnen Sie die Krümmung $R^{(g,A)}$ von $\nabla^{(g,A)}$. *Ergebnis:*

$$\begin{aligned} g((R^{(g,A)} - R)(X,Y)U,V) &= dA(X,Y)g(U,V) \\ &\quad + \Big[A(X)A(U)g(Y,V) + (\nabla_Y A)(U)g(X,V) + g(A,A)g(Y,U)g(X,V) \\ &\qquad - (X \leftrightarrow Y) - (U \leftrightarrow V) + ((X,Y) \leftrightarrow (U,V)) \Big] \end{aligned}$$

(b) Der *Weylsche Krümmungstensor* $W^{(g)}$ von g ist die Krümmung $R^{(g,\hat{A})}$ für die spezielle Wahl $\hat{A} = d\log(\det g)^{-1/(2n)}$. Zeigen Sie: $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ gilt:

$$W^{(g^{(f)})} = W^{(g)} \tag{1}$$

($g^{(f)} = e^{2f} g$, vgl. Aufgabe 8.3)