Aufgabenblatt 11

Abgabe bis 11.7.2017, 16h
(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 11.1 Konvexe Mengen

Zur Erinnerung: Eine offene Teilmenge $\mathcal{C} \subset M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M heisst (geodätisch) konvex, wenn $\mathcal{C}$ eine Normalumgebung eines jeden Punktes $p \in \mathcal{C}$ ist. $\mathcal{C}$ heisst minimal konvex, wenn die zwischen je zwei Punkten $p, q \in \mathcal{C}$ eindeutige Geodäte in $\mathcal{C}$ in M eindeutig längenminimierend ist.

(a) Zeigen Sie: Sind $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ minimal konvex, so ist auch $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ minimal konvex.

(b) Geben Sie ein Beispiel von zwei konvexen Mengen, deren Schnitt nicht konvex ist.

Aufgabe 11.2 Durchmesser und Kompaktheit

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d. Zeigen Sie:

(a) Ist M kompakt, so ist M geodätisch vollständig.

(b) Ist M geodätisch vollständig, so ist M genau dann kompakt, wenn der Durchmesser $\mathrm{diam}(M) := \sup\{d(p,q) \mid p, q \in M\} < \infty$.

Aufgabe 11.3 Divergente Kurven

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Kurve $\gamma : [0, \infty) \to M$ heisst divergent, falls es für jede kompakte Menge $K \subset M$ ein $t_0 \in [0, \infty)$ gibt so, dass $\forall t > t_0$: $\gamma(t) \notin K$. Zeigen Sie: M ist genau dann vollständig, wenn für jede divergente Kurve die Menge $\{L(\gamma|_{[0,t]}) \mid t \in [0, \infty)\}$ nicht nach oben beschränkt ist (d.h. $L(\gamma) = \infty$).

Aufgabe 11.4 Diagonale Metrik

Es sei g eine Riemannsche Metrik auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, deren Darstellung in der Koordinatenbasis diagonal ist, d.h. $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = 0$ falls $i \neq j$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Geodätengleichung die Gestalt

$$\frac{d}{dt}(g_{kk}\dot{x}^k) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}(\dot{x}^i)^2 \qquad 1 \leq k \leq n \tag{1}$$

hat. (Hier keine Summe auf der linken Seite!)

Bitte wenden!

Aufgabe 11.5 Cartan-Kalkül

Es sei $E \to M$ ein differenzierbares Vektorbündel mit Zusammenhang ∇. Wir identifizieren (wie immer) $\mathrm{End}(E)$-wertige k-Formen

$$\omega \in \Omega^k(M) \otimes \Gamma(\mathrm{End}(E))$$

mit $\mathcal{F}(M)$-multi-linearen und in den ersten k Argumenten alternierenden Abbildungen $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$. Beispiel: Die Krümmung von ∇,

$$F_\nabla(X,Y)\sigma := \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma$$

Zeigen Sie:

(a) Die Formel

$$\begin{aligned}(d_\nabla(\omega))&(X_1,\dots,X_{k+1})\sigma := \\ &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\big[\nabla_{X_i}\big(\omega(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_{k+1})\sigma\big) - \omega(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_{k+1})(\nabla_{X_i}\sigma)\big] \\ &+ \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_{k+1})\sigma\end{aligned}$$

definiert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $d_\nabla : \Omega^k(M)\otimes\Gamma(\mathrm{End}(E)) \to \Omega^{k+1}(M)\otimes\Gamma(\mathrm{End}(E))$. (Zeigen Sie insbesondere, dass $d_\nabla(\omega)$ $\mathcal{F}(M)$-multilinear ist.)

(b) Im Falle $E = M \times \mathbb{R}$ (dem trivialen Vektorbündel vom Rang 1) mit trivialem Zusammenhang $\nabla(1) = 0$ reduziert sich d_∇ auf die gewöhnliche äussere Ableitung.

(c) Die Krümmung erfüllt die Bianchi-Identität:

$$d_\nabla F_\nabla = 0$$