Aufgabenblatt 10

Abgabe bis 4.7.2017, 16h

(Bis 11h abgegebene Lösungen werden u.U. noch bis zum Nachmittag korrigiert.)

Aufgabe 10.1 Gradient

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Gradient einer Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f := (df)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie: Gilt $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = 1$, so sind die Integralkurve von $\operatorname{grad} f$ Geodäten.

Aufgabe 10.2 Isometrien 1

Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine lokale Isometrie (d.h. ein lokaler Diffeomorphismus mit $F^*h = g$). Zeigen Sie, dass $\gamma : I \to M$ genau dann eine Geodäte ist, wenn $F \circ \gamma : I \to N$ eine Geodäte ist.

Aufgabe 10.3 Isometrien 2

Eine Abbildung $F : M \to N$ zwischen zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) mit Riemannschen Abstandsfunktionen $d : M \times M \to \mathbb{R}$, $e : N \times N \to \mathbb{R}$ heisse Isoapostasie, falls F ein Homöomorphismus ist und $d(p_1, p_2) = e(F(p_1), F(p_2))\ \forall p_1, p_2 \in M$. Zeigen Sie: Ein Homöomorphismus F ist genau dann eine Isoapostasie, falls F eine Isometrie ist. *Hinweis:* Für $\Leftarrow$ benutzen Sie die Exponentialabbildung um zu zeigen, dass F differenzierbar ist.

Aufgabe 10.4 Abstandsfunktion

Sei (M, g) eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt, und $L \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, die als Teilmenge von M abgeschlossen ist. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein Punkt $q \in L$ mit $d(p, q) = d(p, L) := \inf_{x \in L} d(p, x)$

(b) Es existiert eine Geodäte $\gamma : [0, 1] \to M$ von p nach q mit Länge $L(\gamma) = d(p, q)$.

(c) γ trifft L in einem rechten Winkel, d.h. $\forall v \in T_qL \subset T_qM$ gilt $g_q(v, \dot\gamma(1)) = 0$. *Hinweis:* Variationsprinzip