Aufgabenblatt 1

Abgabe bis 2.5.2017, 16h

Aufgabe 1.1

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer. Zeigen Sie, dass jeder Punkt p einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M eine Umgebung U besitzt, welche homöomorph zu D ist.

Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall $D = B_1(0)$, dann $D = \mathbb{R}^n$, und anschliessend den allgemeinen Fall.

Aufgabe 1.2

(a) Zeigen Sie, dass der Torus

$$T^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

(mit Teilraumtopologie) eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.

(b) Zeigen Sie, dass T^2 als topologische Mannigfaltigkeit isomorph ist zum Produkt $S^1 \times S^1$ zweier Kreise.

Aufgabe 1.3

Es sei $M = \mathbb{R}$ als topologische Mannigfaltigkeit, $U = \mathbb{R}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := x^3$. Zeigen Sie

(a) (U, φ) ist eine globale Karte auf M

(b) Der Atlas $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ ist differenzierbar, aber nicht mit dem gewöhnlichen Atlas $\mathcal{A}_0 = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ verträglich.

(c) Die durch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_0$ definierten differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}$ sind isomorph.

Aufgabe 1.4

In der Vorlesung wurde für $k \leq n$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, n)$ definiert als Menge aller k-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ mit einer von $\mathbb{R}^{k \cdot n}$ induzierten Quotiententopologie. Es wurde gezeigt, dass $G(k, n)$ in natürlicher Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n - k)$ ist. Zeigen Sie:

(a) $G(1, n + 1) \cong \mathbb{RP}^n$.

(b) $G(k, n)$ ist kompakt.

Hinweis: In der Vorlesung wurde auch die Kompaktheit von $\mathbb{RP}^n$ nicht gezeigt, Sie erhalten also schon für diesen Spezialfall einige Punkte.