

Satz von der Umkehrabbildung

gegeben: $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ~~stetig~~

Problem: Wann ist für $y \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $F(x) = y$ lösbar? Existiert eine Umkehrabbildung $G \circ F = \text{id}_U$, $F \circ G = \text{id}$, Eigenschaften von G ?

Intuition: lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear.

$Ax = y$ hat $\forall y$ eindeutige Lösung

$\Leftrightarrow A$ ist invertierbar

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Mit Idee der linearen Approximation für F diff'bar.

$DF(x_0)$ ~~man~~ in x_0 + (kleine Umgebung)
invertierbar

$\Rightarrow F$ in x_0 lokal invertierbar.

"da man erhält durch Ausloten aller Richtungen v um x_0 alle Richtung w um $y_0 = F(x_0)$ und umgekehrt".

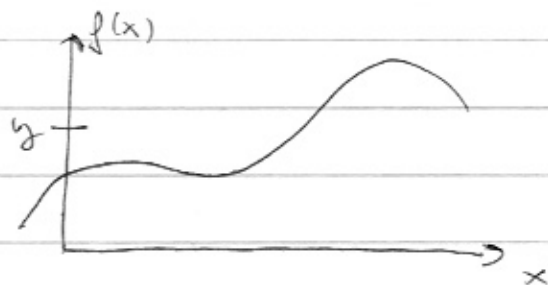
Aus der Kettenregel

$$D(F \circ G) = DF \circ DG = D(\text{id}) = \text{id}$$

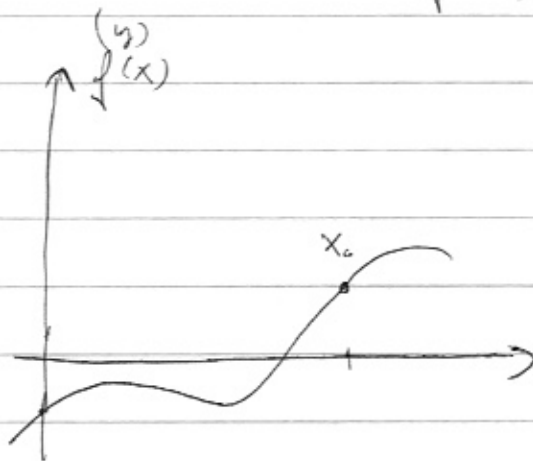
folgt nicht, dass die Invertierbarkeit von DF notwendig ist. Das Umkehrsaat besagt, dass sie hinreichend ist, sofern wir uns auf hinreichend kleine Umgebungen einschränken.

Beweisidee illustriert mit Newton Methode:

geg: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

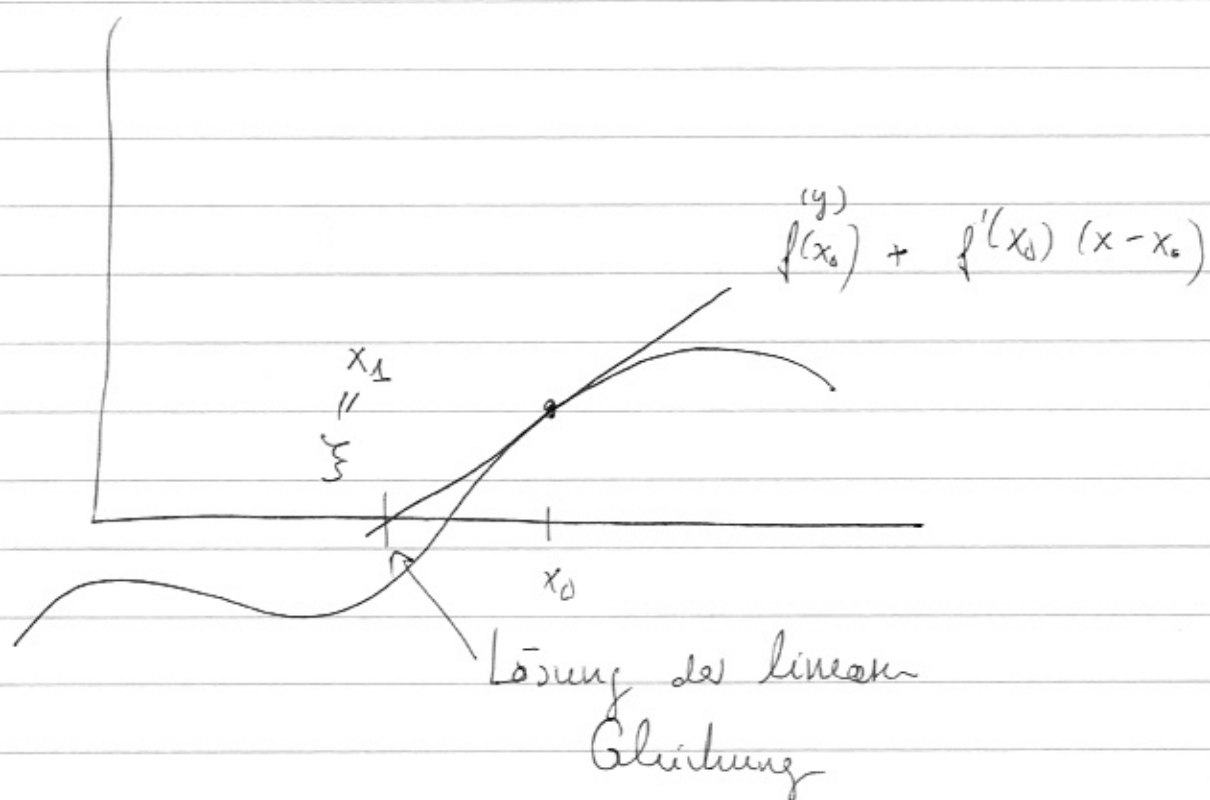


Lösungen $f(x) = y \iff$ Nullstellen von $f^{(y)}(x) = f(x) - y$



geben eine "Näherung" x_0 (d.h. $f^{(y)}(x_0)$ klein)

$\rightarrow$ Verbesserung durch Anlegen der Tangente.



$$f^{(y)}(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0)$$

$$x_1 = \xi \quad + \text{ repeat.}$$

Konvergenz Fallabhängig: $\sqrt[n]{a}$ (§ 3) durch monotone Konvergenz.

Allgemeiner Banachscher FP Satz

etc.

Anwendung: Krummlinige Koordinaten, wie sie zur Lösung von physikalischen Problemen häufig verwendet werden, lassen sich bequem und präzise mit dem Satz von der Umkehrabbildung verstehen.

Bsp: Kugelkoordinaten $K: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$K(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)^T$$

$$DK = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det DK &= r^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \vartheta \sin \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin \vartheta \neq 0 \quad \text{für } r \neq 0 \\ &\quad \vartheta \neq 0. \end{aligned}$$

- Man sagt, die Koordinaten sind "schlecht" an den Bildpunkten, an denen K nicht lokal invertierbar ist. Hier: die gesamte z -Achse.
- Im Allgemeinen sind also die "Koordinaten" selbst an "guten" Stellen nicht global definiert.

Hier $F(r, \vartheta, \varphi) = F(r, \vartheta, \varphi + 2\pi)$.

→ Für globale Umkehrung muss man noch weitere Teilmengen ausnehmen (vgl. auch $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{1/2}$ im Komplexen), für lokale Betrachtungen ist dies aber unerheblich. Zum Beispiel beim

Intermezzo Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten für den euklidischen Raum.

Notation:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ (\xi^\alpha) & & (x^i) \end{array}$$

Annahme: Arbeit in Umgebungen in denen

$$DK = B = (B_\alpha^i = \frac{\partial K^i}{\partial \xi^\alpha}(x))$$

invertierbar ist.

(Die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung ist

$$C_i^\alpha = (B^{-1})_i^\alpha$$

$$\sum C_i^\alpha(\xi) B_\alpha^j(K(\xi)) = \delta_i^j.$$

Aufgabe: Eliminieren x aus der Gleichung

$$\Delta \varphi(x) = 0$$

für 2-mal stetig diffbares φ und K !
über euklidische Metrik, d.h.

$$\Delta \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)$$

Durch Umkehrung: $\varphi(x) \rightsquigarrow \tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(K(x))$

aber wir müssen auch die Ableitungen transformieren,
um

$$\Delta \varphi(x) = \tilde{\Delta} \varphi(K^{-1}(x))$$

schreiben zu können, wo $\tilde{\Delta} \varphi$ nur von ξ abhängt.

Kettenregel:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi)}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(K(\xi))$$

$$= \sum_{i=1}^n B_{\alpha}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

wobei B entweder als Funktion von x oder von ξ aufgefasst werden kann.

$$\leadsto \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \sum_{\alpha} C_i^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^{\alpha}}$$

$$\Delta \varphi = \sum_i \sum_{\beta} C_i^{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left(\sum_{\alpha} C_i^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^{\alpha}} \right)$$

= (mit Einsteinscher Summenkonvention)

$$= \sum_i C_i^{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left(C_i^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^{\alpha}} \right)$$

= (Produktregel)

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left(C_i^{\beta} C_i^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^{\alpha}} \right) - \sum_i \frac{\partial C_i^{\beta}}{\partial \xi^{\beta}} C_i^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^{\alpha}}$$

- Dieses Umschreiben hat den geometrischen Sinn, dass

$\sum C_i^{\beta} C_i^{\alpha} = g^{\alpha\beta}$ als das Inverse der euklidischen

Metrik in den ξ -Koordinaten aufgefasst werden kann.

Für (γ_{α}) Standard-Basis von $\mathbb{R}^n \ni \xi$ ist

$$\mathbb{D}K(\gamma_{\alpha}) = B_{\alpha}^i e_i \quad (e_i \text{ Basis von } \mathbb{R}^n \ni x)$$

und daher

$$g_{\alpha\beta} = \langle DK(\eta_\alpha), DK(\eta_\beta) \rangle = \int_i B_\alpha^i B_\beta^i$$

$g^{\alpha\beta} = (g^{-1})^{\alpha\beta}$; vgl. Diskussion von grad-div-rot
und geometrische Interpretation von Cauchy-Riemann
In Matrix-Notation.

$$g = B^T B \quad (\text{Gauß'sche Fundamentalfarm})$$

Der übriggebliebene Term lässt sich auch noch mit g
verbinden. Es gilt nämlich (11.9) oder fragen Sie
H. Essig.

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \det B = \det B \quad C_i^\gamma \frac{\partial B_\gamma^i}{\partial \xi^\beta}$$

Kurzform: $\det(B + tSB) = \det B \det \underbrace{(1 + tB^{-1}SB)}_{= 1 + t \cdot \text{tr } B^{-1}SB + O(t^2)}$

$$C = B^{-1})$$

wegen $B_{\gamma}^i = \frac{\partial K^i}{\partial \xi^{\beta}} \gamma$ gilt $\frac{\partial B_{\gamma}^i}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial B_{\beta}^i}{\partial \xi^{\gamma}}$

(Symmetrie der 2ten Ableitung).

und wegen $C_i^{\gamma} B_{\beta}^i = \delta_{\beta}^{\gamma}$ gilt dann

$$C_i^{\gamma} \frac{\partial B_{\gamma}^i}{\partial \xi^{\beta}} = C_i^{\gamma} \frac{\partial B_{\beta}^i}{\partial \xi^{\gamma}} = - B_{\beta}^i \frac{\partial C_i^{\gamma}}{\partial \xi^{\gamma}}$$

so dass zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det B} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \det B &= - \sum_i C_i^{\alpha} C_i^{\beta} B_{\beta}^i \frac{\partial C_i^{\gamma}}{\partial \xi^{\gamma}} \\ &= - \sum_i C_i^{\alpha} \frac{\partial C_i^{\gamma}}{\partial \xi^{\gamma}} \end{aligned}$$

und wegen $\det B = \sqrt{\det g}$ können wir abschliessend schreiben

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} \psi &= \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi^{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\det g}} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \sqrt{\det g} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi^{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left(g^{\alpha\beta} \sqrt{\det g} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi^{\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Das Umschreiben auf g ist nicht nur wegen der Interpretation sinnvoll, sondern auch, weil $g_{\alpha\beta}$ häufig diagonal ist (orthogonale Koordinaten)

Z.B. Kugelkoordinaten:

$$DK^T DK = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi & r \cos\vartheta \cos\varphi & -r \sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi & r \cos\vartheta \sin\varphi & r \sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie dies in den Übungen!