- $U \subset \mathbb{C}$ offen $f: U \to \mathbb{C}$ komplex diff'bar in $z_0 \in U$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert}$$

$\Leftrightarrow$ $u = \operatorname{Re} f$ $v = \operatorname{Im} f$ erfüllen ~~die~~ in $(x_0, y_0) \cong z_0$ die Cauchy-Riemann Dgl:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- holomorph: in jeden $z \in U$ komplex diff'bar.

<u>Bsp:</u> · Polynome, Potenzreihen innerhalb des Konvergenzscheibe sind holomorph

· $z \mapsto \bar{z}$ ist nicht holomorph.

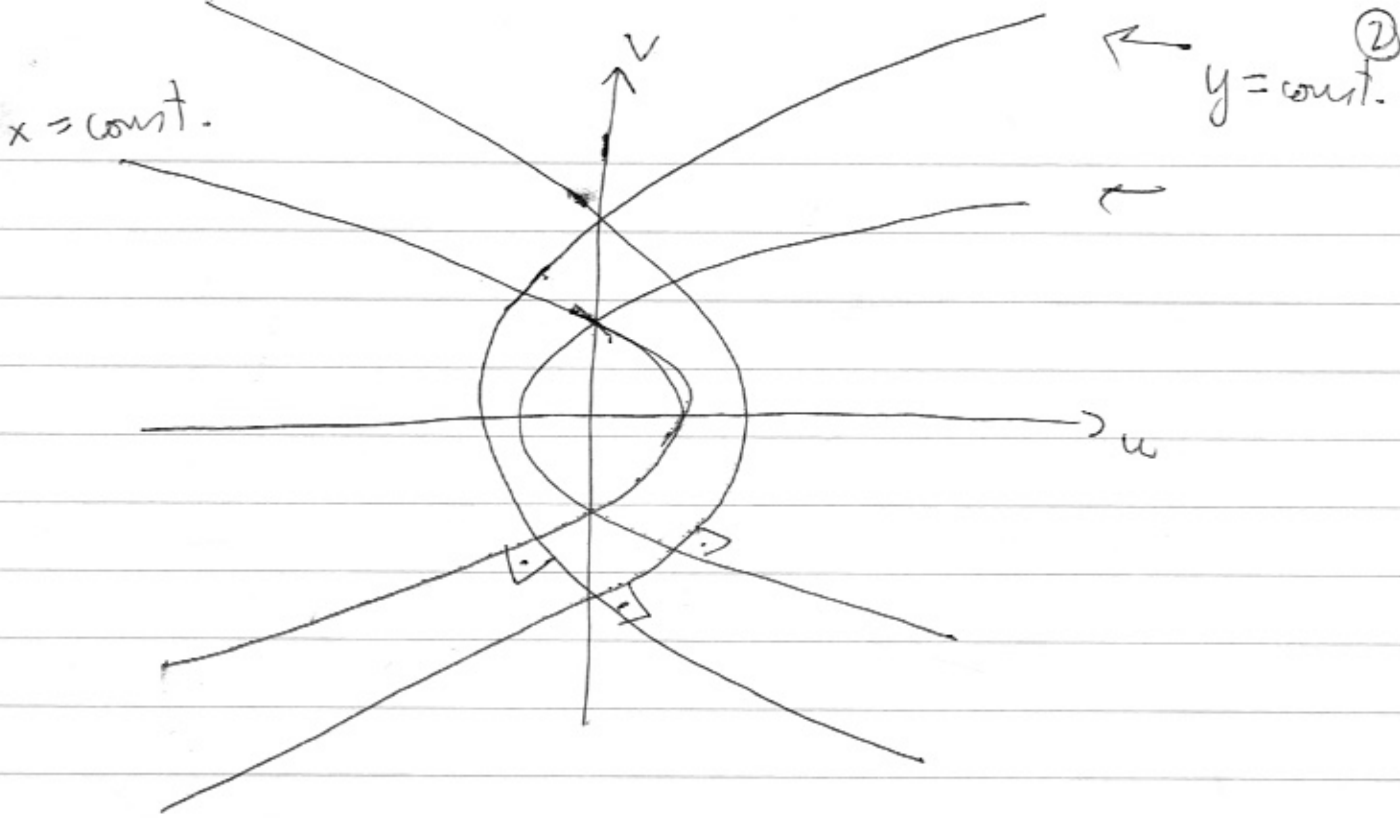
· $z \mapsto z\bar{z} = x^2 + y^2 = u \quad v = 0$.
ist in $z = 0$ komplex differenzierbar. aber nirgendwo holomorph.

· $z \mapsto z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + 2i\underbrace{xy}_{v}$.

$$\{b = y = \text{const.}\} \xrightarrow{b \neq 0} \quad x = \frac{v}{2b}$$

$$\left\{ u = \left(\frac{v}{2b}\right)^2 - b^2 \right\}$$

<u>Parabeln</u>



Def.: Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ heisst (komplex) analytisch, falls es für jedes $z_0 \in U$ eine Folge $(a_n^{(z_0)}) \subset \mathbb{C}$ gibt und ein $\delta > 0$ s.d. $B_\delta(z_0) \subset U$ und $\forall z \in B_\delta(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(z_0)} (z - z_0)^n$$

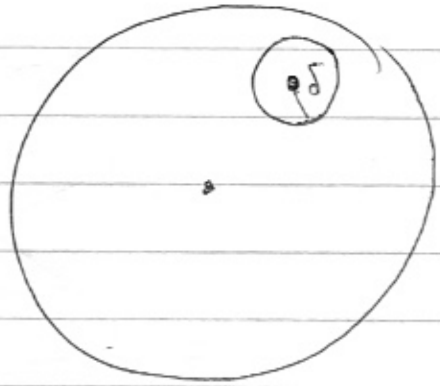
- Analytische Funktionen sind unendlich oft diff'bar

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z_0) = f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n^{(z_0)}.$$

• Potenzreihen sind analytisch.

$$\sum a_n^{(0)} z^n = P(z) = P(z_0 + z - z_0) = \sum a_n^{(z_0)} (z-z_0)^n$$

konvergiert ~~für~~ und ist gleich $P(z)$ für $z \in B_\delta(z_0) \subset B_R(0)$



• Es passiert, dass $B_{R^{(0)}}(z_0) \not\subset B_R(0)$.

~~Dann ist~~ $\cancel{\sum a_n^{(z_0)} (z-z_0)^n}$

$\longrightarrow$ analytische Fortsetzung.

<u>Bsp:</u> geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + w\right)^n$$

$w = z + \frac{1}{2} \qquad z_0 = -\frac{1}{2}$

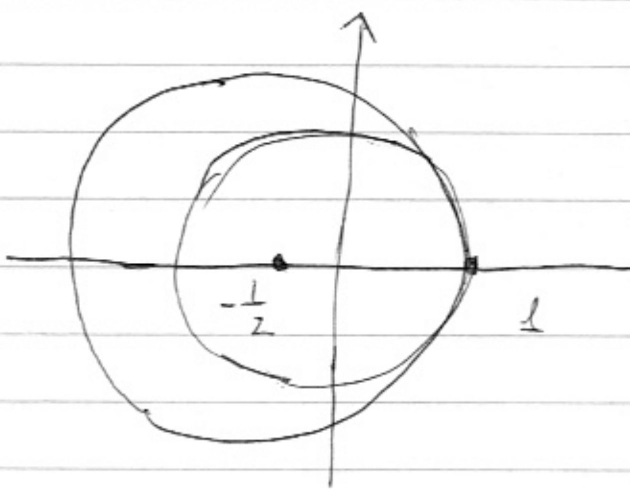
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} w^k \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} w^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \binom{n}{k}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \binom{n+k}{k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}$$

$$\cancel{= \sum w}$$

$$= \sum w^k \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}.$$

$$R^{(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2} > 0$$



~~Bspl.~~ Idee: Ausgehend von einer in einer noch so kleinen Scheibe konvergenten Potenzreihe ~~selbst~~ kann eine analytische Funktion ihren Def.bereich von selbst vergrößern.

Diese sehr schöne Eigenschaft wird von einer weiteren, etwas subtileren, begleitet.

Bsp: Fortsetzung der Wurzelfunktion ins Komplexe.

- Für $x \in \mathbb{R}_+$: Stetigkeit und strenge Monotonie von $x \mapsto Q(x) = x^2$ garantiert Existenz und Stetigkeit von $x \mapsto \sqrt{x}$.

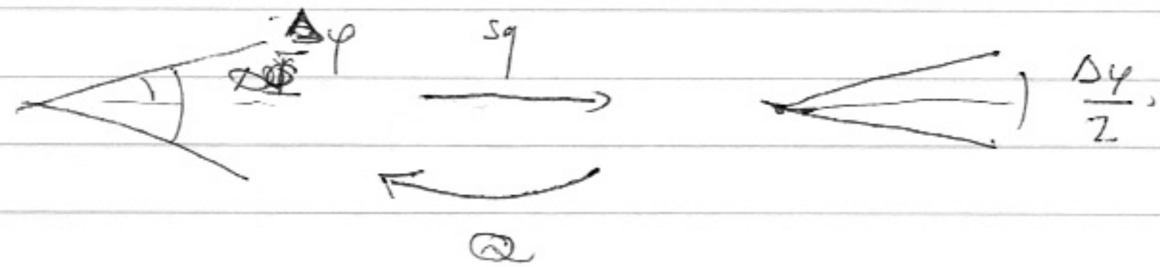
- ~~Die komplexen Zahlen waren eingeführt als zur Lösung worden~~
- Wir hatten komplexe Zahlen eingeführt zur Lösung algebraischer Gleichungen im Allgemeinen. → Wir sollten $z \mapsto z^{1/2}$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ untersuchen.

Problem: Wegen der fehlenden Anordnung von $\mathbb{C}$ gibt es keine allg. natürliche ~~Wahl von~~ Entscheidungs Unterscheidung zwischen $z^{1/2}$ und $-z^{1/2}$!

- In Polarkoordinaten: $z = re^{i\varphi}$ ~~Die Wahl ist~~ die Wahl zwischen $r^{1/2} e^{i\varphi/2}$ und
$$-r^{1/2} e^{i\varphi/2} = r^{1/2} e^{i\varphi/2 + i\pi}.$$

- Für $\varphi = 0$ $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ existiert natürliche Wahl.

→ Für φ klein definieren wir $sq(re^{i\varphi}) = r^{1/2} e^{i\varphi/2}$.



$\to Q$ bildet den Sektor $\{|\varphi| < \Phi\}$
bijektiv und holomorph auf den Sektor
$\{|\varphi| < 2\Phi\}$ ab. Die Umkehrfunktion
sq ist ebenfalls holomorph

$$sq'(z) = \frac{1}{2sq(z)}$$ (Kettenregel, siehe auch §12)

Dies geht gut solange $\Phi \leq \pi$.

~~Für $\varphi = \pi$ (i.e. $z<0$) oder $z = -x < 0$)~~
~~erhält man keine eindeutige Definition für~~
~~$sq(z) = \pm i x^{1/2}$ je nachdem man~~

Für $\varphi = \pi$ (i.e. $z = -x < 0$) gibt uns die
Definition zwei verschiedene Antworten $sq(z) = \pm i\, x^{1/2}$
je nach dem wir

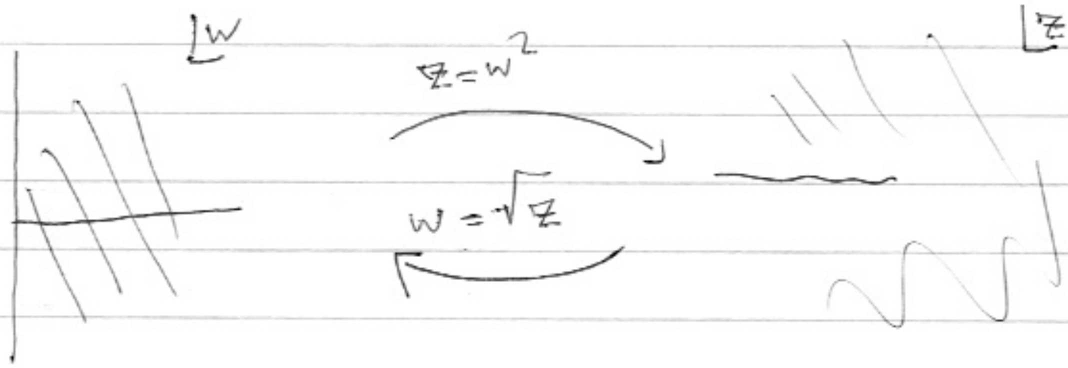
$$-x = e^{i\pi}|x| \quad \text{oder} \quad e^{-i\pi}x$$

denken.

Fazit: Es ist nicht möglich, sq als stetige ~~(schon gar~~
~~nicht als)~~ Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortzusetzen.

Best möglich: "geschlitzte Zahlenebene", z.B.

$$\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]:$$



$w = s e^{i\phi}$ $\quad \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad\qquad \varphi \in (-\pi, \pi)$

$s > 0$ $\qquad\qquad z = r e^{i\varphi}$ $\quad r > 0$

Zur Meditation:

$$z \longmapsto \sqrt{1 - z^2}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$