# Probeklausur

## Fragen

**1** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen.

(a) Wann heißt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ Cauchyfolge, wann konvergent? Geben Sie die Definitionen an.

(b) Ist jede konvergente Folge in einem metrischen Raum eine Cauchyfolge? Ist umgekehrt jede Cauchyfolge konvergent? Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis, falls Ihre Antwort ja ist oder ein Gegenbeispiel, falls Ihre Antwort nein lautet.

(c) Wann heißt eine Teilmenge $A \subset X$ folgenkompakt? Welches sind die folgenkompakten Teilmengen von $X = \mathbb{R}$?

(d) Sei $(Y, d')$ ein weiterer metrischer Raum. Wann nennt man eine Funktion $f : X \to Y$ stetig im Punkt $x_0 \in X$?

**2** (a) Was ist eine Reihe? Wann heißt eine Reihe konvergent, wann divergent? Geben Sie drei Beispiele für konvergente und divergente Reihen.

(b) Geben Sie drei Konvergenzkriterien für Reihen an.

(c) Welche Reihen kann man umordnen? Definieren Sie die einschränkende Eigenschaft.

(d) Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-\xi)^\nu$ eine komplexe Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $\xi$. Wo konvergiert diese Reihe? Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Konvergenzradius. Ist die resultierende Funktion stetig oder sogar differenzierbar auf dem Konvergenzbereich?

**3** Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Was ist eine Stammfunktion von $f$?

(b) Seien $F_1, F_2$ zwei Stammfunktionen von $f$. In welcher Beziehung stehen $F_1$ und $F_2$ zueinander?

(c) Wie definiert man das Integral $\int_c^d f(x)\,dx$ für $a < c < d < b$?

(d) Wie kann man mit Hilfe des Integrals eine Stammfunktion von $f$ definieren?

## Konvergenz und Stetigkeit

**4** Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Folgen konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

$$(a)\ a_n := n\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\Big), \quad (b)\ b_n := \Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)^n,\ x\in\mathbb{R}, \quad (c)\ c_n := \frac{3n^5-n^2}{2n^5+1}.$$

**5** (a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{11^k}$ (Zusatz: Falls diese Reihe konvergiert, was ist der Grenzwert?),

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$,

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$,

(iv) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+\sin(k)}{k^2-1}$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ eine Folge, sodass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$$

konvergiert.

**6** Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} X^k, \quad (ii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \quad (iii) \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, a_k := \begin{cases} \frac{(-1)^l}{k!}, & k = 2l+1, l \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

**7** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R} : \ a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f$ einen Fixpunkt $x \in \mathbb{R}$ hat.

**8** Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Sei $K \subset X$ folgenkompakt. Beweisen Sie, dass dann auch $f(K) \subset Y$ folgenkompakt ist.

## Differentiation und Integration

**9** Zeigen Sie, dass folgende Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen.

a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \ f(x) := x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2}$,

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) := 2^{(x^2)}$,

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} x^3 \ \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 \text{ für } x \leq 0. \end{cases}$$

Wo liegen die Maxima/Minima der Funktion $g$?

**10** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ sei $f_i \in C^1(I)$ mit $f_i(x) > 0 \ \forall x \in I$. Zeigen Sie, dass für die differenzierbare Funktion

$$F : I \to \mathbb{R},\ F(x) := \ln\big(f_1(x) \cdot ... \cdot f_n(x)\big)$$

gilt:

$$F' = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'}{f_i}.$$

**11** (a) Wie lautet der Satz von der Umkehrfunktion einer stetig differenzierbaren Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen?

(b) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y^3, x)$ lokal umkehrbar ist .

**12** Geben Sie für nachfolgende stetige Funktionen eine Stammfunktion an.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := 8x\sin(x^2)$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \cos(x)e^x$.

(c) $h : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) := x\ln(x)$.

**13** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx.$$

**14** (a) Es sei $X \subset \mathbb{R}$ offen und es seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Wie lautet die Kettenregel?

(b) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F$ und $\phi : (-1, 2) \to (a, b)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Was ist die Stammfunktion von $(f \circ \phi) \cdot \phi'$? Zeigen Sie:

$$\int_0^1 f \circ \phi(t) \cdot \phi'(t)\ dt = \int_{\phi(0)}^{\phi(1)} f(t)\ dt.$$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(t + c)\ dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t)\ dt.$$

**15** Sei $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, d.h. es gilt

$$\partial_1 u = \partial_2 v \quad \text{und} \quad \partial_2 u = -\partial_1 v.$$

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ die Polarkoordinatenabbildung. Zeigen Sie, dass dann folgende Gleichungen gelten:

$$\partial_r(u \circ \Phi) = \partial_1(u \circ \Phi) = \frac{1}{r}\partial_2(v \circ \Phi) = \frac{1}{r}\partial_\varphi(v \circ \Phi)$$

sowie

$$\partial_\varphi(u \circ \Phi) = \partial_2(u \circ \Phi) = -r\partial_1(v \circ \Phi) = -r\partial_r(v \circ \Phi).$$

**16** (a) Sei $\xi \in \mathbb{C}$ und seien $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-\xi)^\nu$, $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-\xi)^\nu$ zwei Potenzreihen, die auf $B_R(\xi)$ konvergieren, wobei $R > 0$. Zeigen Sie: Gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_R(\xi)$, sodass $z_n \to \xi$ und $f(z_n) = g(z_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_\nu = b_\nu\ \forall \nu$.
*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $\xi$ und positivem Konvergenzradius $r$ entweder Null ist oder auf einer Menge der Form $B_s(\xi) - \{\xi\}$, $0 < s < r$, nirgends verschwindet.

(b) Zeigen Sie, dass es keine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geben kann, für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f\Big(\frac{1}{2n}\Big) = f\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2n}.$$