

# Einführung in die Geometrie

Wintersemester 2013/14

Vorlesungsskript

Dr. Denis Vogel

27. Januar 2014

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>I Die Elemente von Euklid</b>	<b>3</b>
<b>II Hilbertebenen und euklidische Ebenen</b>	<b>11</b>
§1 Inzidenzebenen . . . . .	12
§2 Die Anordnungsaxiome . . . . .	21
§3 Die Kongruenzaxiome für Strecken . . . . .	34
§4 Die Kongruenzaxiome für Winkel . . . . .	38
§5 Geometrie in Hilbertebenen . . . . .	46
§5.1 Das vierte Euklidische Postulat . . . . .	46
§5.2 Orthogonalität und Parallelität . . . . .	49
§5.3 Das SSS-Kriterium . . . . .	52
§6 Euklidische Ebenen . . . . .	55
<b>III Ebene Euklidische Geometrie</b>	<b>62</b>
§7 Dreiecke . . . . .	62
§8 Schnittpunktsätze . . . . .	71
§9 Kreise . . . . .	75
§10 Inkreis, Umkreis und Feuerbachkreis . . . . .	81
<b>IV Nichteuklidische ebene Geometrie</b>	<b>92</b>
§11 Inversion am Kreis . . . . .	92
§12 Das Poincarémodell . . . . .	99

---

<b>V Ebene projektive Geometrie</b>	<b>107</b>
§13 Projektive Ebenen . . . . .	107
§14 Projektive Koordinatenebenen . . . . .	113
<b>VI Polytope</b>	<b>125</b>
§15 Die Eulersche Polyederformel . . . . .	125
§16 Platonische Körper . . . . .	129

## Die Elemente von Euklid

Um das Jahr 325 vor unserer Zeitrechnung verfasste Εὐκλείδης (**Euklid**) sein berühmtes Werk Στοιχεῖα (**Die Elemente**), in dem er die Arbeiten etwa von Pythagoras, Theaetetus und Eudoxos zusammenfasste und verbesserte. Dieses war das erste große Lehrbuch der Mathematik und für viele hundert Jahre eine Standardreferenz.

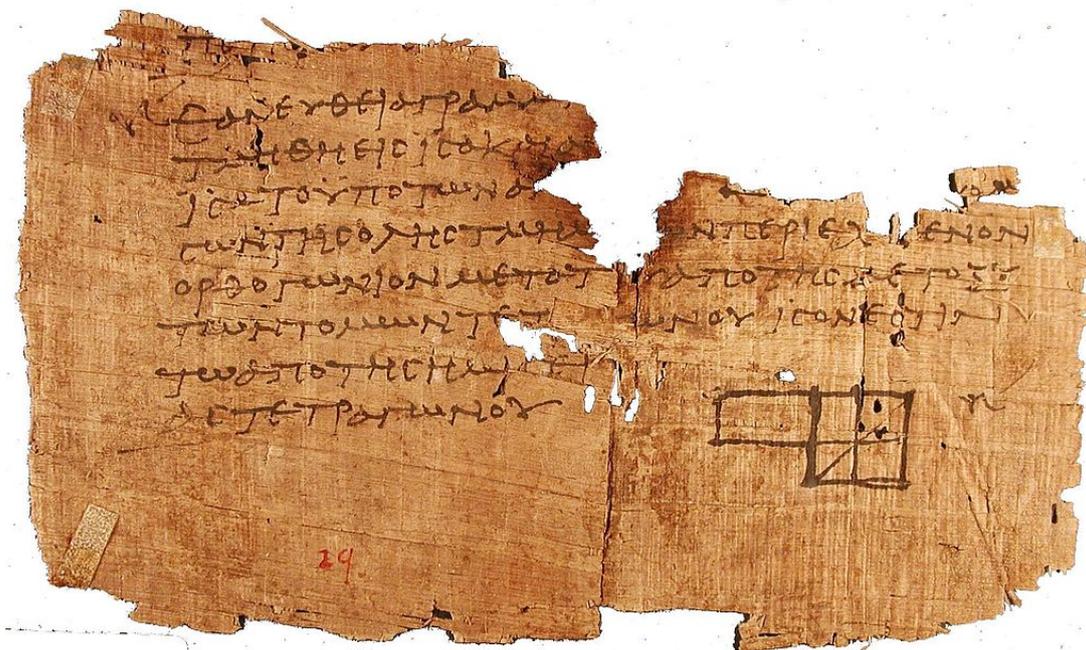


Abbildung I.1: Papyrusfragment der Elemente, Kapitel II.5, gefunden in Oxyrhynchos. Quelle: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:P.\\_Oxy.\\_I.29.jpg?uselang=de](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Oxy._I.29.jpg?uselang=de).

Das erste Buch der Elemente widmet sich der Einführung der (ebenen) Geometrie und zeigt

---

erstmalig musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft, indem die meisten Aussagen auf einen Vorrat an Grundannahmen zurückgeführt werden. Da wir uns in dieser Vorlesung mit eben diesem Problem befassen werden, wenn auch von einem moderneren Standpunkt aus, wollen wir an dieser Stelle einen ausführlichen Blick in dieses erste Buch werfen. Dieses gliedert sich in die vier Teile

- Definitionen,
- Postulate,
- Axiome,
- Propositionen.

Es scheint an dieser Stelle angebracht, kurz auf diese Begriffe einzugehen, insbesondere auf den Unterschied zwischen dem Begriff des „Postulats“ und dem Begriff des „Axioms“, da letztere heute oft synonym gebraucht werden. Wir werden nun immer erst einen Begriff erläutern und dann auf den entsprechenden Teil von Euklids Buch eingehen.

### Definitionen

Unter einer Definition versteht Euklid wie wir auch heute eine Erklärung eines mathematischen Objekts. Der Begriff scheint jedoch weniger streng gefasst als in der heutigen Praxis, so haben einige seiner Definitionen eher den Charakter einer Aussage (siehe Definition 3). Dass Euklid mit seinen Definitionen auf nicht näher erläuterte naive Konzepte wie etwa „Teile“, „Längen“ und „Breiten“ verweist, kann man ihm dagegen nicht anlasten; auch moderne, auf der Mengenlehre aufbauende Beschreibungen tun dies, wenn auch in einem weitestgehend reduzierten Umfang.

Euklids Definitionen sind die folgenden.

1. Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat.
2. Eine *Linie* ist eine breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie (*Strecke*) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine *Fläche* ist, was Länge und Breite hat.
6. Eine Fläche wird von Linien begrenzt.
7. Eine Fläche ist *eben*, die zu den Geraden auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Ein *ebener Winkel* ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander fortzusetzen.

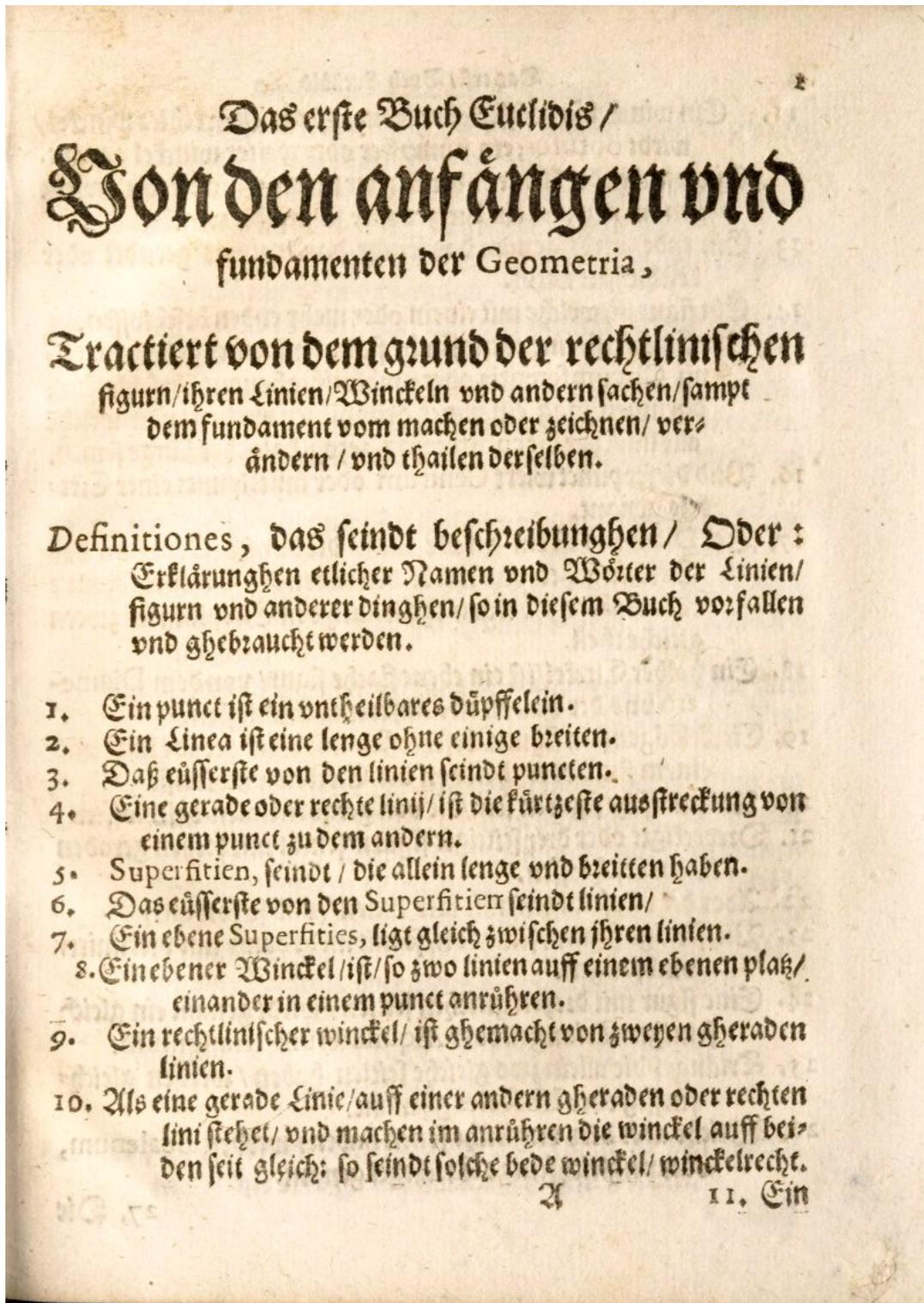


Abbildung I.2: Aus einer Ausgabe von Iohan Sems und Pietersz Dou aus dem Jahr 1618. Quelle: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/content/mathematics/mathematics>.

9. Gerade Linien, die einen Winkel bilden, schneiden sich.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein *rechter*; und die stehende gerade Linie heißt *senkrecht* zu der, auf der sie steht.
11. Ein Winkel größer als ein rechter heißt *stumpf*.
12. Ein Winkel kleiner als ein rechter heißt *spitz*.
13. Die Dinge reichen bis an ihre Grenzen.
14. Eine *Figur* ist eine Fläche, die durch die Grenzen, in denen sie liegt, bezeichnet wird.
15. Ein *Kreis* ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegene Punkte bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind.
16. Und *Mittelpunkt* des Kreises heißt dieser Punkt.
17. Der *Durchmesser* eines Kreises ist eine gerade Linie durch den Mittelpunkt, die durch die Punkte auf der Kreislinie begrenzt und vom Mittelpunkt in Radien halbiert wird.
18. Ein *Halbkreis* wird durch Durchmesser und getroffener Kreislinie begrenzt; sein Mittelpunkt ist derselbe wie der des Kreises.
19. *Geradlinige Figuren* sind solche, die von Strecken umfasst werden; dreiseitige, die von drei, vierseitige, die von vier, ...
20. Von den dreiseitigen Figuren ist ein *gleichseitiges Dreieck* jede mit drei gleichen Seiten, ein *gleichschenkliges Dreieck* jede mit zwei gleichen Seiten, und ein *ungleichseitiges Dreieck* jedes mit drei verschiedenen Seiten.
21. Außerdem heißt ein Dreieck *rechtwinklig*, wenn es einen rechten Winkel hat, *stumpfwinklig*, wenn es einen stumpfen Winkel hat, und *spitzwinklig*, wenn alle drei Winkel spitz sind.

## Postulate

Postulate sind grundlegende Forderungen in einer Theorie, die nicht bewiesen werden müssen. Im Gegensatz zu den Axiomen, eher grundlegende Logikaussagen, benennen sie, welche Aktionen wir in der Ebene ausführen können, und beschreiben diese Ebene dadurch. In dem Sinne sind die Postulate das Herzstück von Euklids Geometrie.

Bei Betrachtung der Postulate sollte nun noch darauf hingewiesen werden, dass Euklid mit den hier aufgeschriebenen Postulaten noch implizit weitergehende Forderungen macht, die er in späteren Beweisen benötigt. Um auch solchen Anforderungen zu genügen, müsste beispielsweise das erste Postulat um die Eindeutigkeit der Strecke zwischen zwei Punkten erweitert werden.

Die Euklidischen Postulate sind nun: Es sei gefordert,

1. dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. dass alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.

Während die ersten vier Postulate prägnant formuliert und unmittelbar einsichtig sind, erfordert das fünfte ein wenig Überlegung oder, besser, eine Zeichnung.

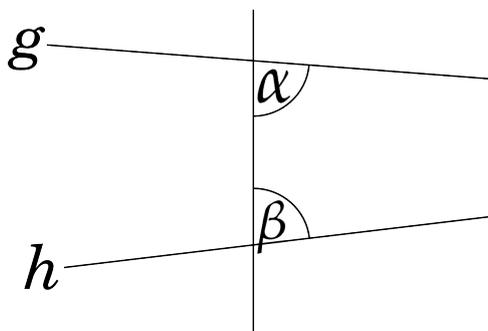


Abbildung I.3: Das 5. Postulat besagt, dass sich  $g$  und  $h$  auf der rechten Seite treffen.

Wegen seiner mangelnden Eleganz war das fünfte Euklidische Postulat lange Zeit umstritten. Zunächst wollte man darum eine bessere Formulierung finden, wie etwa Proclus (410-485), Clavius (1537-1612), Clairaut (1713-1765), Simson (1687-1768) und Playfair (1748-1819). Dies gelang aber nicht befriedigend. Schließlich geriet man zur Überzeugung, das fünfte Postulat müsse sich aus den ersten vier herleiten lassen. So bemühten sich beispielsweise Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777) und Legendre (1752-1833) aus der Annahme, das fünfte Postulat sei falsch, einen Widerspruch herzuleiten, vertaten sich dabei aber alle. Euklids Parallelenpostulat war weiterhin die beste Wahl. Und erst über 2000 Jahre nach Euklid, im 19. Jahrhundert mit Gauß (1777-1855), Bolyai (1802-1860) und Lobatschevski (1793-1856), sollte die Frage nach dessen Notwendigkeit endgültig geklärt werden. Wir werden die Lösung dieses impliziten Problems im Laufe dieser Vorlesung ausführlich studieren.

### Axiome

Axiome im Sinne von Euklid machen Dinge derselben Dimension vergleichbar. Als Dinge kommen hierbei Linien, Winkel, Flächen, usw. infrage. Dinge derselben Dimension können vereinigt und verglichen werden, was bei Dingen verschiedener Dimension nicht möglich ist. So können wir ein Dreieck und ein Viereck vergleichen, nicht jedoch ein Dreieck und eine Linie.

Diese Axiome beschreiben also keine Strukturen wie die Euklidische Ebene, sondern sind eher als erlaubte Schlussweisen, als Rechenwerkzeuge zu verstehen.

Euklid fordert die folgenden Axiome.

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Was einander deckt, ist gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.

### Propositionen

Eine Proposition ist ganz wie in der modernen Mathematik ein aus den Definitionen vermöge der Postulate und Axiome hergeleitetes Ergebnis. Euklid gibt allein in seinem ersten Buch 48 Propositionen mit Beweisen an. Wir wollen an dieser Stelle nur ein Beispiel präsentieren, die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks. Dabei orientieren wir uns an der Ausgabe von Sems/Dou aus dem Jahr 1618 (vgl. Abbildung I.6) und passen lediglich die Sprache ein wenig an unser gegenwärtiges Deutsch an.

#### Proposition 1 (Auf einer vorgegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck machen)

Die vorgegebene Linie sei  $AC$ . Nehmt mit einem Zirkel die Länge  $AC$ , danach stellt den einen Fuß (jedoch die Weite des Zirkels unverändert) in  $A$ , und zieht (wie in Postulat 3 erlaubt) aus dem Punkt  $A$  als Mittelpunkt aus  $C$  einen Teil des Umfangs eines Kreises als  $CD$ . Desgleichen auch aus  $C$  von  $A$  das Stück des Umfangs als  $AE$ , welches durchschneidet  $CD$  in  $B$ . Von dort seien (wie in Postulat 1 erlaubt) zwei Linien gezogen zu  $A$  und  $C$ : So ist  $ABC$  das gleichseitige Dreieck.

*Beweis.* Offensichtlich ist  $AB$  gleich  $AC$  und  $BC$  gleich  $AC$  nach Definition des Kreises (Definition 15). Daraus folgt, dass auch  $AB$  gleich  $BC$  ist (Axiom 1), so dass das Dreieck  $ABC$  gleichseitig ist (Definition 20).  $\square$

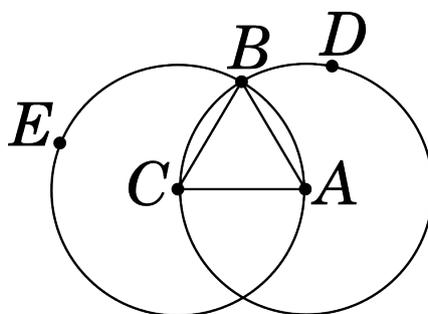


Abbildung I.4: Die Gerade  $AC$  mit dem gleichseitigen Dreieck aus Proposition 1.

So einfach und überzeugend der obige Beweis zunächst klingt, wirft er doch noch Fragen auf. Wieso schneiden sich etwa die beiden Kreise um  $A$  und um  $C$  überhaupt? Betrachtet man Abbildung I.4, so erscheint es intuitiv klar, doch aus den Definitionen, Postulaten und Axiomen von Euklid geht die Behauptung nicht unmittelbar hervor: Während das fünfte Postulat garantiert, dass sich zwei gerade Linien zumindest unter geeigneten Bedingungen schneiden, wissen wir nichts über Schnittpunkte von Kreisen.

Genau genommen gibt es hier zwei Probleme. Zum einen schneiden sich zwei beliebige Kreise, auch solche von gleichem Radius, nicht zwangsläufig. Das ist ein Problem des Abstands der Mittelpunkte.

Zum anderen ist ohne einen (zu Euklids Zeiten noch nicht bekannten!) geeigneten Stetigkeitsbegriff nicht klar, dass ein Schnittpunkt, den man „sieht“, auch tatsächlich existiert. Um dies zu veranschaulichen, führen wir die Konstruktion aus Proposition 1 in der rationalen kartesischen Ebene durch, wo es diese Stetigkeit ja eben nicht gibt.

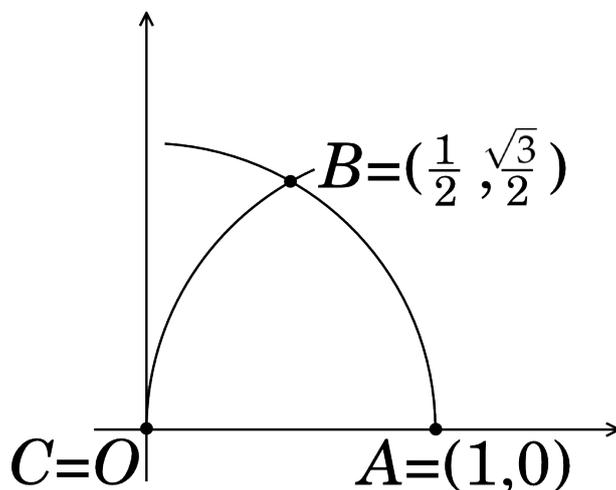


Abbildung I.5: Der Schnittpunkt  $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  ist kein gültiger Punkt der rationalen Ebene.

Beide Probleme lassen sich durch Hinzunahme eines geeigneten Postulats beheben. Insofern zeigt diese Untersuchung, genau wie die entsprechenden Anmerkungen zu den Definitionen und den Postulaten, dass Euklids Arbeit zwar einerseits bahnbrechend war und die Entwicklung der Geometrie und der gesamten Mathematik hin zu einer auf Axiomen beruhenden exakten Wissenschaft maßgeblich geprägt hat. Andererseits jedoch genügt Euklids Axiomatik unseren heutigen Ansprüchen nicht mehr. In den folgenden Kapiteln dieser Vorlesung werden wir die in den Elementen dargelegte Theorie daher in einem zeitgemäßerem Gewand studieren, wie es so zuerst von Hilbert (1862-1943) eingeführt wurde.

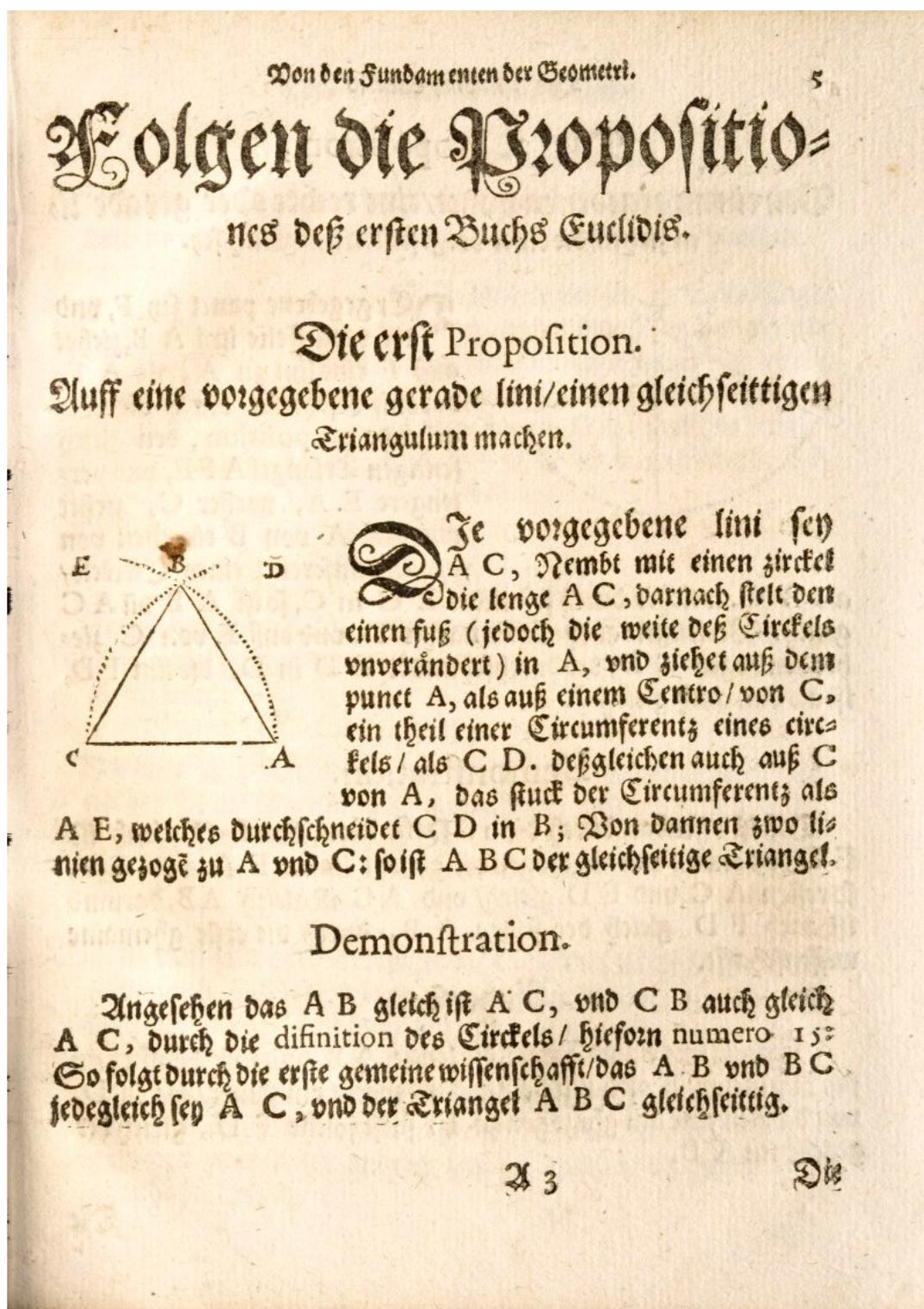


Abbildung I.6: Aus einer Ausgabe von Iohan Sems und Pietersz Dou aus dem Jahr 1618. Quelle: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/content/mathematics/mathematics>.

### Hilbertebenen und euklidische Ebenen

---

In diesem Kapitel wollen wir die euklidische Geometrie aus dem ersten Kapitel auf eine moderne axiomatische Grundlage stellen. Wir folgen dabei zunächst Hilberts Vorschlag aus dem Jahr 1899 und führen vier Klassen von Axiomen ein.

- Die Inzidenzaxiome,
- die Anordnungsaxiome,
- die Kongruenzaxiome für Strecken,
- die Kongruenzaxiome für Winkel.

So erhalten wir die so genannten *Hilbertebenen*. In diesem Rahmen werden wir einige klassische geometrische Sätze beweisen. Es stellt sich jedoch heraus, dass manche Aussagen - darunter auch einige aus der Schulmathematik bekannte - im Kontext von Hilbertebenen im allgemeinen falsch sind. Um diesen Umstand zu beheben, führen wir zwei weitere Axiome ein:

- das Stetigkeitsaxiom,
- das Parallelenaxiom.

Damit stehen uns alle Objekte und Schlussweisen zur Verfügung, die in Euklids Elementen eine Rolle spielten; der zugehörige Axiomensatz beschreibt den Begriff der *euklidischen Ebene*. Schlusspunkt des Kapitels wird die Feststellung sein, dass sich alle euklidischen Ebenen in geeigneter Weise identifizieren lassen, so dass es genügt, Geometrie in der euklidischen Standardebene zu untersuchen.

## §1 Inzidenzebenen

Sei  $\mathbf{P}$  eine Menge und  $\mathbf{G}$  eine Menge von Teilmengen von  $\mathbf{P}$ . Die Elemente von  $\mathbf{P}$  heißen im Folgenden *Punkte*, die Elemente von  $\mathbf{G}$  *Geraden*. Für Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$ , Geraden  $g, h \in \mathbf{G}$  und eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbf{P}$  mit mindestens 3 Elementen führen wir analog zu Euklids Definitionen die folgenden Sprechweisen ein.

- $A$  liegt auf  $g$  bzw.  $g$  geht durch  $A$ , falls  $A \in g$ ,
- $A$  ist ein *Schnittpunkt* von  $g$  und  $h$ , falls  $A \in g \cap h$ ,
- $M$  heißt *kollinear*, falls es ein  $g \in \mathbf{G}$  gibt mit  $M \subseteq g$ ,
- $A, B, C$  heißen *in allgemeiner Lage*, falls  $\{A, B, C\}$  nicht kollinear ist (es also kein  $g \in \mathbf{G}$  gibt mit  $A, B, C \in g$ ),
- $g$  und  $h$  heißen *parallel* (schreibe  $g \parallel h$ ), falls  $g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$ .

Diese Definitionen passen einerseits ganz gut zu unserer naiven Geometrie, andererseits ist aber das Konzept der Geraden hier noch sehr allgemein und umfasst zum Beispiel auch den ganzen Raum  $\mathbf{P}$ . Um Geometrie in unserem Sinne betreiben zu können, brauchen wir noch einen Ersatz für die Euklidischen Postulate.

**Definition 1.1** Das Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  heißt eine *Inzidenzebene*, falls die folgenden *Inzidenzaxiome* erfüllt sind.

- ( $I_1$ ) Durch zwei verschiedene Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  existiert genau eine Gerade in  $\mathbf{G}$ . Diese heißt die *Verbindungsgerade*  $A \vee B$  von  $A$  und  $B$ . (Erstes Euklidisches Postulat)
- ( $I_2$ ) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.
- ( $I_3$ ) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Das erste Inzidenzaxiom ist offensichtlich gerade das präzierte erste Postulat von Euklid. Die anderen beiden Inzidenzaxiome sichern die Existenz einer Mindestanzahl von Punkten. Insgesamt haben wir ein Axiomensystem und können uns nun fragen, ob wir ein *Modell* dafür finden, also ein Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ , das die Axiome erfüllt.

**Beispiel 1.2** Das kleinste Beispiel einer Inzidenzebene muss wegen ( $I_3$ ) aus mindestens drei Punkten  $A, B, C$  bestehen. Tatsächlich erfüllt

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\})$$

offensichtlich die Inzidenzaxiome, und für  $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$  gibt es auch keine andere Teilmenge  $\mathbf{G}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbf{P})$  von  $\mathbf{P}$ , für die das stimmt,

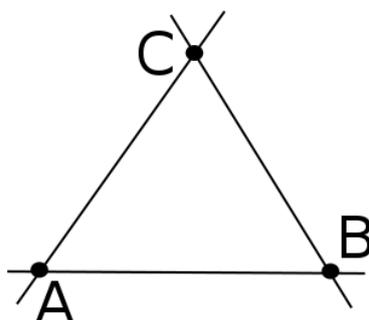


Abbildung II.1: Das kleinste Beispiel einer Inzidenzebene

denn: Für  $\mathbf{P} = \{A, B, C\}$  ist definitionsgemäß  $\mathbf{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{P})$ . Nach  $(I_3)$  kann  $\{A, B, C\}$  nicht in  $\mathbf{G}$  sein. Deshalb müssen nach  $(I_1)$  die Mengen  $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$  in  $\mathbf{G}$  liegen. Schließlich sind nach  $(I_2)$  die Mengen  $\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}$  keine Geraden. #

Viel mehr als dieses recht abstrakte Beispiel interessiert uns aber, ob die reelle Ebene  $\mathbb{R}^2$  durch eine geeignete Wahl der zugehörigen Geradenmenge  $\mathbf{G}$  zu einem gültigen Modell der Inzidenzebene gemacht werden kann. Das werden wir im Folgenden zeigen, sogar für die Ebene  $K^2$  über einem beliebigen Körper  $K$ . Definieren wir dort also zunächst einen geeigneten Geradenbegriff.

**Definition 1.3** Sei  $K$  ein Körper. Dann sind durch

$$g_{A,v} := A + Kv := \{A + \lambda v \mid \lambda \in K\} \quad \text{mit } A \in K^2, v \in K^2 \setminus \{0\}$$

eindimensionale affine Unterräume von  $K^2$  gegeben. Die Menge  $Kv$  nennt man hierbei auch die **Richtung** von  $g_{A,v}$ .

Es ist a priori nicht klar, dass der Begriff der Richtung, wie er soeben eingeführt wurde, wohldefiniert ist. Das wollen wir nun zeigen.

**Proposition 1.4** Sei  $K$  ein Körper und seien  $A, B, v, w \in K^2$  mit  $v \neq 0 \neq w$ . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

- (i)  $g_{A,v} = g_{B,w}$ ,
- (ii)  $Kv = Kw$  und  $B \in g_{A,v}$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $g_{A,v} = g_{B,w}$ . Dann ist zum einen direkt  $B \in g_{B,w} = g_{A,v}$ . Zum anderen gibt es deswegen aber auch ein  $\lambda \in K$  mit  $B = A + \lambda v$ . Weil analog aus  $B + w \in g_{A,v}$  auch  $B + w = A + \mu v$  für ein geeignetes  $\mu \in K$  folgt, erhalten wir

$$w = (B + w) - B = (A + \mu v) - (A + \lambda v) = (\mu - \lambda)v \in Kv$$

und somit Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii). Dann können wir mit geeigneten  $\mu, \rho \in K$

$$w = \mu v \quad \text{und} \quad B = A + \rho v$$

schreiben. Da nach Definition weder  $v$  noch  $w$  Null sein darf, folgt sofort  $\mu \neq 0$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} g_{B,w} &= \{B + \lambda w \mid \lambda \in K\} \\ &= \{(A + \rho v) + \lambda(\mu v) \mid \lambda \in K\} \\ &= \{A + (\rho + \lambda\mu)v \mid \lambda \in K\} \\ &= \{A + \lambda v \mid \lambda \in K\} \\ &= g_{A,v}, \end{aligned}$$

wobei wir für das vorletzte Gleichheitszeichen benutzt haben, dass wegen  $\mu \neq 0$  mit  $\lambda$  auch  $\lambda\mu^{-1} - \rho$  ganz  $K$  durchläuft (und umgekehrt). Das ist gerade Aussage (i).  $\square$

**Definition 1.5** Sei  $K$  ein Körper. Mit der Notation aus Definition 1.3 setzen wir

$$\mathbb{A}_2(K) := (K^2, \mathbf{G}_K) \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_K := \{g_{A,v} \mid A, v \in K^2, v \neq 0\}.$$

**Satz 1.6** Für einen beliebigen Körper  $K$  ist  $\mathbb{A}_2(K)$  eine Inzidenzebene.

*Beweis.* ( $I_1$ ) Seien  $A \neq B \in K^2$  Punkte. Dann ist offensichtlich  $g_{A,B-A} \in \mathbf{G}_K$  eine Gerade durch  $A$  und  $B$ . Wir müssen nun noch zeigen, dass jede Gerade  $g \in \mathbf{G}_K$  durch  $A$  und  $B$  mit  $g_{A,B-A}$  identisch ist. Nach Definition von  $\mathbf{G}_K$  können wir eine solche Gerade  $g$  schreiben als  $g_{C,v}$  mit geeigneten  $C, v \in K^2$  und  $v \neq 0$ . Da ja  $A, B \in g$  vorausgesetzt war, gibt es  $\lambda, \mu \in K$  mit  $A = C + \lambda v$  und  $B = C + \mu v$ . Weil  $A$  und  $B$  als verschieden angenommen waren, ist dabei  $\lambda \neq \mu$ . Durch Einsetzen folgt

$$v = \frac{1}{\mu - \lambda}(B - A)$$

und somit

$$g = g_{C,v} = g_{A-\lambda v,v} \stackrel{1.4}{=} g_{A,v} \stackrel{1.4}{=} g_{A,B-A} \tag{II.1}$$

wie behauptet.

( $I_2$ ) Sei  $g \in \mathbf{G}_K$  beliebig. Dann gibt es  $A, v \in K^2$  mit  $v \neq 0$ , so dass wir  $g = g_{A,v}$  schreiben können. Offensichtlich liegen dann die Punkte  $A$  und  $A + v$  auf  $g$ . Wegen  $v \neq 0$  gilt auch  $A \neq A + v$ .

( $I_3$ ) Die Punkte  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind in allgemeiner Lage, denn offensichtlich liegt  $X$  nicht auf der Geraden  $g_{O,Y-O} = KY$ .  $\square$

**Übung** Sei  $K$  ein Körper,  $\mathbf{P}$  die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von  $K^3$  und

$$\mathbf{G} = \{g \in \mathcal{P}(\mathbf{P}) \mid \bigcup_{A \in g} A \text{ ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von } K^3\}.$$

Zeigen Sie, dass  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene ist.

Wir haben nun das abstrakte Konzept der Inzidenzebene eingeführt und zwei Modelle dafür gefunden. Wir wollen nun erste Eigenschaften von Inzidenzebenen beweisen und so zeigen, dass man bereits in einem derart allgemeinen Setting Geometrie betreiben kann.

**Proposition 1.7** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene, und seien  $g \not\parallel h \in \mathbf{G}$ . Dann haben  $g$  und  $h$  einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, den wir ab sofort mit  $g \vee h$  bezeichnen wollen.

*Beweis.* Aus  $g \not\parallel h$  folgt definitionsgemäß  $g \neq h$  und  $g \cap h \neq \emptyset$ . Nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Punkte  $A, B \in g \cap h$ . Dann gälte

$$g \stackrel{(I_1)}{=} A \vee B \stackrel{(I_1)}{=} h,$$

was nicht sein kann. Damit haben  $g$  und  $h$  einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 1.8** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene, und seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$ . Dann sind äquivalent

- (i)  $C \in A \vee B$ ,
- (ii)  $A \vee B = A \vee C$ .

*Beweis.* Nehmen wir zunächst  $C \in A \vee B$  an. Dann geht die Gerade  $A \vee B$  durch die beiden Punkte  $A, C$  und nach  $(I_1)$  gilt sofort  $A \vee B = A \vee C$ , also (ii).

Sei umgekehrt  $A \vee B = A \vee C$ . Dann gilt sofort  $C \in A \vee C = A \vee B$ , also (i).  $\square$

**Proposition 1.9** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene. Dann gelten

- (a) Für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  gibt es einen Punkt  $A \in \mathbf{P}$  mit  $A \notin g$ .
- (b) Für jeden Punkt  $A \in \mathbf{P}$  gibt es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit  $A \notin g$ .

*Beweis.* (a) Falls die Behauptung nicht stimmt, so gibt es eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$ , die durch alle Punkte in  $\mathbf{P}$  geht. Für diese gilt dann  $g = \mathbf{P}$ , was ein Widerspruch zu  $(I_3)$  ist.

(b) Sei  $A \in \mathbf{P}$  ein fest gewählter Punkt. Nach  $(I_3)$  gibt es dann einen weiteren Punkt  $B \in \mathbf{P} \setminus \{A\}$ , und nach  $(I_1)$  gibt es eine Gerade  $A \vee B$  durch diese beiden Punkte. Nach (a) existiert nun ein Punkt  $C \in \mathbf{P}$ , der nicht auf  $A \vee B$  liegt, so dass nach Proposition 1.8 die Geraden  $A \vee B$  und  $B \vee C$  nicht übereinstimmen, was wieder mit Proposition 1.8 bedeutet, dass  $A$  nicht auf  $B \vee C$  liegt.  $\square$

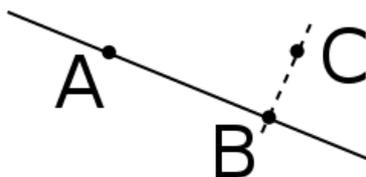


Abbildung II.2: In einer Inzidenzebene gibt es zu jeder Geraden einen Punkt, der nicht darauf liegt, und zu jedem Punkt eine Gerade, die nicht durch ihn geht.

**Definition 1.10** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene. Diese erfüllt das (**starke**) **Parallelenaxiom**, wenn gilt:

(P) Ist  $A$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade, dann gibt es genau eine Gerade  $h$  mit  $h \parallel g$  und  $A \in h$ .

Ist dies der Fall, so heißt  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine **affine Ebene**.

**Beispiel 1.11** (a) Die Inzidenzebene

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\})$$

über der dreielementigen Menge  $\{A, B, C\}$  erfüllt (P) nicht, da beispielsweise keine zu  $\{A, B\}$  parallele Gerade durch  $C$  existiert (vgl. Abbildung II.1).

(b) Das Paar

$$(\mathbf{P}, \mathbf{G}) = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\})$$

ist eine affine Ebene. Die Axiome  $(I_1) - (I_3)$  sind hierbei schnell überprüft. Wir wollen nun Axiom (P) zeigen. Sei dafür  $X \in \mathbf{P}$  und  $g \in \mathbf{G}$ . Falls  $X$  auf  $g$  liegt, so ist nach  $(I_1)$  die Gerade  $g$  selbst die eindeutig bestimmte Parallele. Liegt  $X$  andererseits nicht auf  $g$ , so benötigen wir noch einen Punkt aus  $\mathbf{P} \setminus (g \cup \{X\})$  auf der Parallele, da diese ja zwei verschiedene Punkte außerhalb von  $g$  enthalten muss. Offensichtlich ist in diesem Fall also  $\mathbf{P} \setminus g$  die eindeutig bestimmte Parallele.

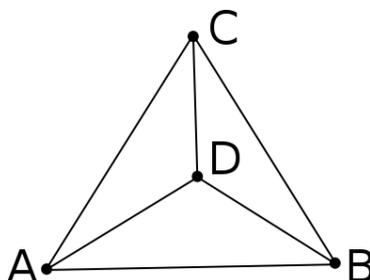


Abbildung II.3: Eine affine Ebene mit weniger Punkten gibt es nicht.

**Übung** Anstelle des starken kann man auch das **schwache Parallelenaxiom**

(p) Ist  $A$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade, dann gibt es höchstens eine Gerade  $h$  mit  $h \parallel g$  und  $A \in h$ .

betrachten. Man sieht leicht, dass beide obigen Beispiele auch das schwache Parallelenaxiom erfüllen. Geben Sie eine Inzidenzebene mit fünf Punkten an, die das Axiom (p) nicht erfüllt!

**Proposition 1.12** (a) Die Axiome  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(I_3)$  und (p) sind unabhängig voneinander, d. h. wenn ein Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  beliebige drei davon erfüllt, so kann daraus nicht geschlussfolgert werden, ob es auch das vierte Axiom erfüllt.

(b) Die Axiome  $(I_1)$ ,  $(I_2)$ ,  $(I_3)$  und (P) sind nicht unabhängig voneinander. Genauer folgt aus  $(I_1)$ ,  $(I_3)$  und (P) bereits  $(I_2)$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Da wir im obigen Beispiel (b) bereits eine affine Ebene konstruiert haben, genügt es zum Beweis der Proposition, für jedes der vier Axiome ein Beispiel anzugeben, das dieses Axiom nicht erfüllt, die anderen jedoch schon. Für das (schwache) Parallelenaxiom ( $p$ ) haben wir das bereits in der obigen Übungsaufgabe getan. Für die übrigen Fälle ist in der folgenden Abbildung jeweils ein Beispiel angegeben.

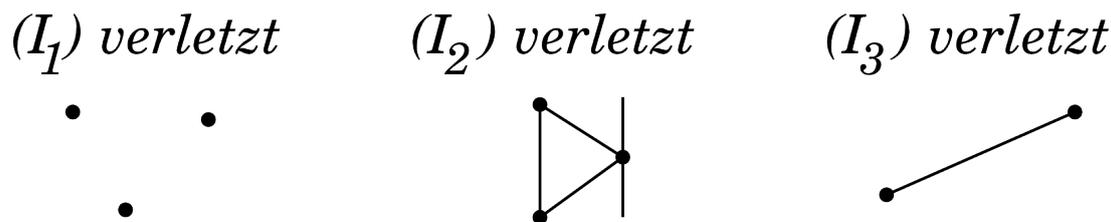
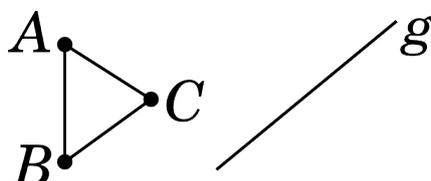


Abbildung II.4: Natürlich erfüllen diese Beispiele jeweils die übrigen drei Axiome.

Für Behauptung (b) nehmen wir nun an, es gälten  $(I_1)$ ,  $\neg(I_2)$ ,  $(I_3)$  und  $(P)$ , und führen dies zum Widerspruch. Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle:

**Fall 1: Es gibt eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  ohne Punkte.** Nach  $(I_3)$  gibt es in  $\mathbf{P}$  drei Punkte  $A, B, C$  in allgemeiner Lage, und nach  $(I_1)$  gibt es durch je zwei von diesen eine eindeutige Gerade; diese Geraden heißen  $A \vee B$ ,  $A \vee C$  und  $B \vee C$ .



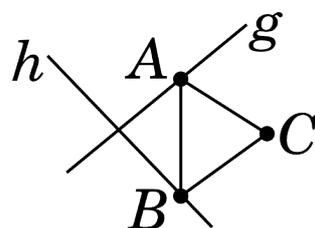
Da  $g$  keine Punkte enthält, gilt  $(A \vee C) \cap g = \emptyset = (B \vee C) \cap g$ , so dass  $A \vee C$  und  $B \vee C$  zwei Parallelen von  $g$  durch  $C$  sind. Da  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind, gibt es also zwei verschiedene Parallelen von  $g$  durch  $C$ , was ein Widerspruch zu  $(P)$  ist.

**Fall 2: Es gibt eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit genau einem Punkt.** Nennen wir diesen Punkt  $A$ . Es gibt zwei Punkte  $B, C \in \mathbf{P}$ , so dass  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind,

denn: Nach  $(I_3)$  gibt es in  $\mathbf{P}$  mindestens drei Punkte. Gäbe es keine zwei davon, die zusammen mit  $A$  in allgemeiner Lage liegen, so könnte man iterativ zeigen, dass alle Punkte von  $\mathbf{P}$  auf einer Geraden liegen, was ein Widerspruch zu  $(I_3)$  wäre. #

Nach  $(I_1)$  gibt es durch je zwei der drei Punkte  $A, B, C$  eine eindeutige Gerade; diese Geraden heißen  $A \vee B$ ,  $A \vee C$  und  $B \vee C$ . Nach  $(P)$  gibt es nun genau eine zu  $A \vee C$  parallele Gerade  $h$  durch  $B$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dass es diese Gerade wirklich gibt, ist der wesentliche Unterschied zu  $(p)$ .

Abbildung II.5:  $g$  und  $h$  schneiden sich *nicht*.

Aus  $(A \vee C) \parallel h$  folgt sofort  $A \notin h$ . Wegen  $g = \{A\}$  gilt somit insbesondere  $g \cap h = \emptyset$ . Es gibt also mit  $A \vee C$  und  $g = \{A\}$  zwei verschiedene zu  $h$  parallele Geraden durch  $A$ , was im Widerspruch zu (P) steht.  $\square$

Natürlich ist die Überprüfung der Unabhängigkeit nach jedem Hinzufügen weiterer Axiome interessant. Da dabei allerdings auch der Aufwand explodiert, werden wir diese Idee nicht mehr weiter verfolgen.

Wir wollen nun zeigen, dass für einen beliebigen Körper die Ebene  $\mathbb{A}_2(K)$  eine affine Ebene ist. Dafür untersuchen wir zunächst die Geraden  $g_{A,v}$  mit  $A, v \in K^2$  und  $v \neq 0$  weiter und ergänzen Proposition 1.4 um

**Proposition 1.13** Sei  $K$  ein Körper und seien  $A, B, v, w \in K^2$  mit  $v \neq 0 \neq w$ . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

- (i)  $g_{A,v} \parallel g_{B,w}$ ,
- (ii)  $Kv = Kw$ .

*Beweis.* Nehmen wir zunächst an, es gelte  $Kv = Kw$ . Dann gibt es ein  $\lambda \in K^\times$  mit  $w = \lambda v$ .

**Fall 1.**  $B \in g_{A,v}$ . Dann gilt nach Proposition 1.4 sogar  $g_{B,w} = g_{A,v}$ .

**Fall 2.**  $B \notin g_{A,v}$ . Dann besitzt die Gleichung  $B = A + \mu v$  keine Lösung  $\mu \in K$  und somit auch die Gleichung

$$B = A + (\mu - \nu\lambda)v \iff B + \nu w = A + \mu v$$

keine Lösung  $(\mu, \nu) \in K \times K$ , so dass die Geraden  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  leeren Schnitt haben und somit parallel sind.

Sei umgekehrt  $Kv \neq Kw$ . Dann spannen  $v$  und  $w$  den gesamten Vektorraum  $K^2$  auf, so dass die Gleichung

$$\lambda v - \mu w = B - A \iff A + \lambda v = B + \mu w$$

eine Lösung  $(\lambda, \mu) \in K \times K$  hat. Das heißt gerade  $g_{A,v} \cap g_{B,w} \neq \emptyset$ . Andererseits folgt mit Proposition 1.4 aus  $Kv \neq Kw$  sofort  $g_{A,v} \neq g_{B,w}$ , so dass die beiden Geraden nicht parallel sind.  $\square$

**Satz 1.14** Für einen beliebigen Körper  $K$  ist  $\mathbb{A}_2(K)$  eine affine Ebene, die **affine Koordinatenebene** über  $K$ .

*Beweis.* Nach Satz 1.6 müssen wir nur noch das starke Parallelenaxiom (P) überprüfen. Seien dafür  $A \in K^2$  und  $g \in \mathbf{G}_K$  beliebig. Schreibe  $g = g_{B,v}$  mit  $B, v \in K^2$  und  $v \neq 0$ . Nach der gerade gezeigten Proposition 1.13 ist dann die Gerade  $g_{A,v}$  durch  $A$  parallel zu  $g_{B,v}$ . Das Axiom (P) folgt, wenn wir zeigen können, dass  $g_{A,v}$  mit dieser Eigenschaft eindeutig ist.

Sei also  $h := g_{C,w} \in \mathbf{G}_K$  parallel zu  $g$  mit  $A \in h$ . Nach Proposition 1.13 gilt dann  $Kv = Kw$ , also  $h = g_{C,v}$ . Wegen  $A \in h$  folgt mit Proposition 1.4 sofort  $h = g_{A,v}$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 1.15** Für eine beliebige affine Ebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  ist Parallelität eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbf{G}$ .

*Beweis.* Da aus  $g = h$  insbesondere  $g \parallel h$  folgt, ist Parallelität reflexiv.

Weiterhin gilt für beliebige  $g, h \in \mathbf{G}$

$$g \parallel h \iff g = h \text{ oder } g \cap h = \emptyset \iff h = g \text{ oder } h \cap g = \emptyset \iff h \parallel g,$$

so dass die Parallelität auch symmetrisch ist.

Schließlich wollen wir auch die Transitivität der Parallelität zeigen. Seien dafür  $f, g, h \in \mathbf{G}$  drei Geraden mit  $f \parallel g$  und  $g \parallel h$ . Zu zeigen ist, dass dann auch  $f \parallel h$  gilt.

**Fall 1.**  $f \cap h = \emptyset$ . Dann ist nichts mehr zu zeigen.

**Fall 2.**  $f \cap h \neq \emptyset$ . Dann gibt es einen Punkt  $A \in f \cap h$ .  $A$  liegt also auf zwei Geraden ( $f$  und  $h$ ), die parallel zu  $g$  sind. Wegen der Eindeutigkeitsaussage im starken Parallelenaxiom (P) müssen daher  $f$  und  $h$  übereinstimmen.

$\square$

**Definition 1.16** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine affine Ebene. Für eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  heißt dann die Äquivalenzklasse

$$[g] := \{h \in \mathbf{G} \mid h \parallel g\}$$

das **Parallelenbüschel** zu  $g$ ; insbesondere ist so die Menge  $\mathbf{G}$  eine disjunkte Vereinigung von Parallelenbüscheln. Sei weiter  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt. Dann heißt die Menge

$$[A] := \{h \in \mathbf{G} \mid A \in h\}$$

das **Geradenbüschel** durch  $A$ .

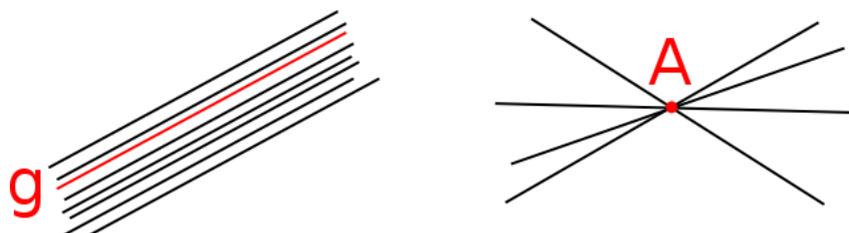


Abbildung II.6: Veranschaulichung des Parallelenbüschels zu einer Geraden  $g$  und des Geradenbüschels durch einen Punkt  $A$ .

**Beispiel 1.17** Sei  $K$  ein Körper und  $g_{A,v} \in \mathbf{G}_K$  eine Gerade. Dann ist

$$[g_{A,v}] = \{h \in \mathbf{G}_K \mid h \parallel g_{A,v}\} \stackrel{1.13}{=} \{g_{B,w} \mid B, w \in K^2, w \neq 0, Kv = Kw\} \stackrel{1.4}{=} \{g_{B,v} \mid B \in K^2\}$$

das Parallelenbüschel von  $g_{A,v}$  in  $\mathbb{A}_2(K)$ . Insbesondere ist die Richtung  $Kv = g_{O,v}$  ein Vertreter des Parallelenbüschels zu  $g_{A,v}$ .

Sei nun  $A \in K^2$  ein beliebiger Punkt. Dann ist

$$[A] = \{h \in \mathbf{G}_K \mid A \in h\} \stackrel{(II.1)}{=} \{g_{A,B-A} \mid B \in K^2, B \neq A\} \stackrel{1.4}{=} \{g_{A,v} \mid v \in K^2, v \neq 0\}$$

das Geradenbüschel durch  $A$  in  $\mathbb{A}_2(K)$ .

**Definition 1.18** Seien  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  und  $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$  zwei affine Ebenen. Eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  heißt **affiner Isomorphismus**, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet, wenn also für alle  $g \in \mathbf{G}$  das Bild  $\varphi(g)$  in  $\tilde{\mathbf{G}}$  liegt. Ist hierbei  $\mathbb{A} = \tilde{\mathbb{A}}$ , so heißt  $\varphi$  ein **affiner Automorphismus** von  $\mathbb{A}$ . Die Menge der affinen Automorphismen von  $\mathbb{A}$  wird mit  $\text{Aut}(\mathbb{A})$  bezeichnet.

**Übung** Seien  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  und  $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}})$  zwei affine Ebenen und  $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$  ein affiner Isomorphismus. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- Für alle  $a, b \in \mathbf{P}$ ,  $a \neq b$  ist  $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ .
- Punkte  $a, b, c \in \mathbf{P}$  sind genau dann kollinear, wenn  $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c) \in \tilde{\mathbf{P}}$  kollinear sind.
- $\varphi(\mathbf{G}) := \{\varphi(g) \mid g \in \mathbf{G}\} = \tilde{\mathbf{G}}$ .
- Sind  $g, h \in \mathbf{G}$  mit  $g \parallel h$ , dann ist  $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$ .

**Übung**  $\text{Aut}(\mathbb{A})$  ist bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe.

**Beispiel 1.19**  $\mathbb{A}_2(\mathbb{F}_2)$  ist eine affine Ebene mit den vier Punkten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und ist mit einer beliebigen bijektiven Zuordnung von Punkten zur affinen Ebene aus Abbildung II.3 affin isomorph.

Man kann zeigen, dass sich für einen beliebigen Körper  $K$  die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{A}_2(K))$  als die Menge von Abbildungen  $\varphi : K^2 \rightarrow K^2$  beschreiben lässt, für die es ein  $M \in \text{GL}_2(K)$ , ein  $v \in K^2$  und einen Körperautomorphismus  $\sigma$  von  $K$  gibt, so dass für alle  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = M\begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \sigma(y) \end{pmatrix} + v$$

gilt. Hierbei ist ein Körperautomorphismus eine bijektive Abbildung  $\sigma : K \rightarrow K$  mit

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b) \quad \text{und} \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

für alle  $a, b \in K$ . Für  $K = \mathbb{R}$  ist die Identität  $\sigma = \text{id}_{\mathbb{R}}$  der einzige Körperautomorphismus, so dass hier die affinen Automorphismen

$$\text{Aut}(\mathbb{A}_2(\mathbb{R})) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \exists M \in \text{GL}_2(\mathbb{R}), w \in \mathbb{R}^2 : \varphi(v) = Mv + w \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^2\}$$

gerade die Affinitäten  $\text{Aff}_2(\mathbb{R})$  sind.

## §2 Die Anordnungsaxiome

In diesem Abschnitt wollen wir nun auf einer Inzidenzebene Axiome angeben, die uns sagen, wie Punkte zueinander und im Bezug auf Geraden liegen. Dies scheint zunächst ein triviales Problem zu sein, und Euklid hat darauf auch kein Postulat verwendet. Andererseits kann Euklid dann aber auch nicht beweisen, dass beispielsweise die Winkelhalbierende im Punkt  $A$  des Dreiecks  $ABC$  die Seite  $BC$  zwischen den Punkten  $B$  und  $C$  schneidet; eine Aussage, die er implizit verwendet.

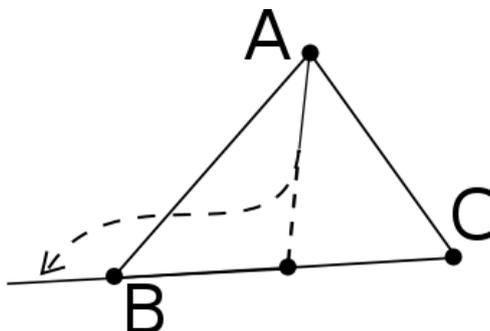


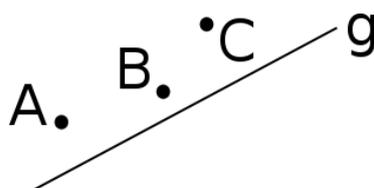
Abbildung II.7: Woher wissen wir (ohne Anschauung!), dass die Winkelhalbierende die Gerade durch  $B$  und  $C$  zwischen diesen beiden Punkten schneidet?

Um nun die Anordnungsaxiome einführen zu können, benötigen wir eine Reihe von Sprechweisen. Sei dafür wie auch später im gesamten Abschnitt vorausgesetzt, dass das Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine Inzidenzebene (nicht notwendig eine affine Ebene) ist. Wir betrachten eine fest gewählte Teilmenge  $Z$  von  $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ .

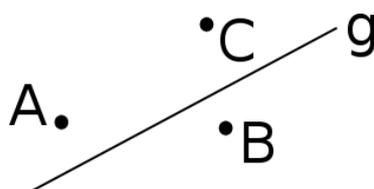
- Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei beliebige Punkte. Wir sagen „ $B$  liegt zwischen  $A$  und  $C$ “, falls das Tripel  $(A, B, C)$  in  $Z$  liegt, und schreiben  $A \star B \star C$ .
- Sei  $g \in \mathbf{G}$  eine beliebige Gerade, und seien  $A, B \in \mathbf{P}$  zwei beliebige Punkte, die nicht auf  $g$  liegen. Wir sagen „ $A$  und  $B$  liegen auf derselben Seite von  $g$ “, falls es keinen Punkt  $C \in g$  gibt mit  $A \star C \star B$ . Gibt es doch einen solchen Punkt, so sagen wir „ $A$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $g$ “.

**Definition 2.1** Das Tripel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  erfüllt die **Anordnungsaxiome**, falls gilt:

- (A<sub>1</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \star B \star C$ , dann sind  $A, B, C$  kollinear, paarweise verschieden, und es gilt  $C \star B \star A$ .
- (A<sub>2</sub>) Auf der Verbindungsgeraden  $A \vee B$  zweier verschiedener Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gibt es Punkte  $P, Q, R$  mit  $P \star A \star Q$  und  $Q \star B \star R$ .
- (A<sub>3</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  paarweise verschieden und kollinear, so gibt es unter diesen drei Punkten genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.
- (A<sub>4</sub>) Für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  und alle Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P} \setminus g$  gilt
- Liegen  $A, B$  auf derselben Seite von  $g$  und  $B, C$  ebenfalls, so liegen auch  $A, C$  auf derselben Seite von  $g$ .



- Liegen  $A, B$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  und  $B, C$  ebenfalls, so liegen  $A, C$  auf derselben Seite von  $g$ .



Um die Notation einfach zu halten, wollen wir von nun an „ $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  erfüllt  $(I + A)$ “ schreiben, wenn das Tripel die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome erfüllt.

Diese Anordnungsaxiome sorgen dafür, dass wir uns Geraden in einer Inzidenzebene tatsächlich so vorstellen können wie wir das gerne täten.

**Proposition 2.2** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und sei  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade. Dann ist „liegt auf derselben Seite von  $g$  wie  $\cdot$ “ eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbf{P} \setminus g$ . Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen  $S_1$  und  $S_2$ ; insbesondere gilt

$$\mathbf{P} = g \cup S_1 \cup S_2.$$

$S_1$  und  $S_2$  heißen die **Seiten** von  $g$  oder die **von  $g$  begrenzten Halbebenen**.

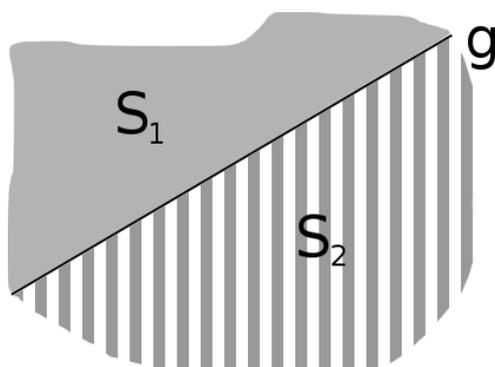


Abbildung II.8: Nach  $(A_1)$  und  $(A_4)$  gibt es Geradenseiten. Nach  $(A_2)$  und  $(A_4)$  gibt es davon genau zwei Stück.

*Beweis.* Zeigen wir zunächst die Reflexivität. Sei dafür  $A \in \mathbf{P} \setminus g$ . Da für einen beliebigen Punkt  $P \in g$  die drei Punkte  $A, P, A$  nicht paarweise verschieden sind, folgt mit  $(A_1)$ , dass es keinen Punkt  $P \in g$  mit  $A \star P \star A$  geben kann, so dass nach Definition  $A$  auf derselben Seite von  $g$  liegt wie es selbst.

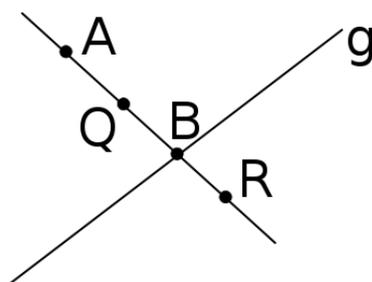
Um die Symmetrie zu zeigen, betrachten wir zwei Punkte  $A, B \in \mathbf{P} \setminus g$ , die auf derselben Seite von  $g$  liegen. Dann gibt es kein  $P \in g$  mit  $A \star P \star B$ . Nach  $(A_1)$  gibt es also auch kein  $P \in g$  mit  $B \star P \star A$ , so dass auch  $B$  auf derselben Seite von  $g$  liegt wie  $A$ .

Die Transitivität ist schließlich gerade die erste Aussage von  $(A_4)$ .

Wir haben insgesamt gezeigt, dass „liegt auf derselben Seite von  $g$  wie“ eine Äquivalenzrelation ist und wollen als nächstes beweisen, dass es mindestens zwei Äquivalenzklassen gibt. Nach Proposition 1.9 gibt es einen Punkt  $A \in \mathbf{P}$ , der nicht auf  $g$  liegt. Nach  $(I_2)$  gibt es ein  $B \in \mathbf{P}$  mit  $B \in g$ . Nach  $(I_1)$  liegt  $A \vee B$  in  $\mathbf{G}$ . Wegen  $(A_2)$  gibt es  $Q, R \in A \vee B$  mit  $Q \star B \star R$ . Nach Konstruktion sind  $A, Q, B, R$  kollinear, so dass  $Q, R$  nicht auf  $g$  liegen,

denn: Läge etwa  $Q \in g$ , so folgte mit  $Q \neq B \in g$  und  $(I_1)$  die Gleichheit  $A \vee B = Q \vee B = g$ , so dass auch  $A$  auf  $g$  läge, was wir ausgeschlossen hatten. Der Beweis für  $R$  statt  $Q$  geht analog. #

Es folgt, dass  $Q$  und  $R$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen, so dass es mindestens zwei Seiten von  $g$  gibt.



Abschließend wollen wir zeigen, dass es auch nicht mehr als zwei Seiten von  $g$  geben kann.

Seien dafür  $Q$  und  $R$  die soeben konstruierten Punkte und  $P$  ein von diesen verschiedener weiterer Punkt in  $\mathbf{P} \setminus g$ . Wir wollen zeigen, dass  $P$  immer auf derselben Seite wie  $Q$  oder wie  $R$  liegt. Falls  $P$  auf derselben Seite liegt wie  $Q$ , ist daher nichts mehr zu zeigen. Liege also  $P$  nicht auf derselben Seite wie  $Q$ . Dann folgt mit der zweiten Aussage von  $(A_4)$ , dass  $P$  und  $R$  auf derselben Seite liegen, was zu zeigen war.  $\square$

Wir wollen nun Beispiele für Inzidenzebenen betrachten, die auch die Anordnungsaxiome erfüllen. Dazu müssen wir einige Vorbereitungen treffen und führen zunächst den Begriff des angeordneten Körpers ein.

**Definition 2.3** Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper  $K$  zusammen mit einer Totalordnung „ $\leq$ “ auf  $K$ , so dass für alle  $a, b, c \in K$  gilt:

$$(I) \text{ Aus } a \leq b \text{ folgt } a + c \leq b + c.$$

$$(II) \text{ Aus } 0 \leq a \text{ und } 0 \leq b \text{ folgt } 0 \leq ab.$$

Um die Notation einfach zu halten, werden wir meist die Totalordnung aus den Bezeichnungen heraushalten und kurz von einem angeordneten Körper  $K$  sprechen.

**Beispiel 2.4** Offenbar ist der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen mit der Standardanordnung ein angeordneter Körper. Deshalb ist auch jeder Teilkörper von  $\mathbb{R}$  (mit der eingeschränkten Standardanordnung) ein angeordneter Körper (z. B. der Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ).

**Proposition 2.5** Jeder angeordnete Körper hat Charakteristik 0, enthält also den Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen.

*Beweis.* Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Für alle  $a \in K$  mit  $0 < a$  folgt mit 2.3 (I):

$$-a = -a + 0 \leq -a + a = 0$$

und wegen  $-a \neq 0$  dann auch  $-a < 0$ . Es gilt also insbesondere entweder  $-1 < 0 < 1$  oder  $1 < 0 < -1$ . Gälte  $0 < -1$ , so folgte mit 2.3 (I) sofort  $0 \leq 1$ , was ein Widerspruch zum eben Gezeigten ist. Es muss in  $K$  also  $-1 < 0 < 1$  gelten. Durch Anwendung von 2.3 (I) zeigt man  $1 \leq 1 + 1$ . Wegen  $0 < 1$  gilt hierbei sogar  $1 < 1 + 1$ . Induktiv folgern wir so

$$0 < 1 < 1 + 1 < \dots < \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ Mal}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , insbesondere ist  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ Mal}} \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und deshalb ist  $\text{char}(K) = 0$ .

Wir erhalten eine Inklusion  $\mathbb{Z} \subseteq K$ . Da  $K$  zu jedem seiner Elemente außer der Null auch das multiplikative Inverse enthält und Produkte von Elementen von  $K$  wieder in  $K$  liegen, sind auch die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  in  $K$  enthalten.  $\square$

**Übung** Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Man zeige, dass die Einschränkung der Anordnung von  $K$  auf seinen Teilkörper  $\mathbb{Q}$  mit der Standardanordnung auf  $\mathbb{Q}$  übereinstimmt.

Für einen angeordneten Körper  $K$  ist für  $a \in K^\times$  stets  $a^2 > 0$ ; für  $a > 0$  folgt das direkt aus 2.3 (II), für  $a < 0$  folgt aus 2.3 (I) unmittelbar  $0 < -a$ , woraus mit 2.3 (II) wiederum  $a^2 = (-a)(-a) > 0$  folgt. Insbesondere kann der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen durch keine Wahl einer Totalordnung zu einem angeordneten Körper gemacht werden, denn es ist  $i^2 = -1 < 0$ .

Wir führen den Begriff des Vorzeichens eines Elements  $a \in K$  in der naheliegenden Weise ein:

**Definition 2.6** Sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $a \in K$ . Dann heißt

$$\operatorname{sgn} a := \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0, \\ 0 & \text{falls } a = 0, \\ -1 & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

das **Vorzeichen** von  $a$ .

Die Behauptung ist nun, dass es für einen angeordneten Körper  $K$  eine geeignete Wahl der Anordnung  $\star$  in der affinen Koordinatenebene  $\mathbb{A}_2(K)$  gibt, so dass die Anordnungsaxiome erfüllt sind. Um eine geeignete Definition zu erhalten, bedienen wir uns der Anschauung im  $\mathbb{R}^2$ . Sind im  $\mathbb{R}^2$  zwei verschiedene Punkte  $A, C$  gegeben, so ist die Verbindungsgerade  $A \vee C$  durch

$$A \vee C \stackrel{\text{(II.1)}}{=} g_{C, A-C} = \{C + \lambda(A - C) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda A + (1 - \lambda)C \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Die Bedingung, dass ein Punkt  $B$  auf dieser Gerade zwischen  $A$  und  $C$  liegt, ist offenbar äquivalent dazu, dass ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \lambda < 1$  existiert, so dass  $B = \lambda A + (1 - \lambda)C$  ist. Diese Charakterisierung lässt sich direkt auf den Fall eines beliebigen angeordneten Körpers übertragen.

**Definition 2.7** Sei  $K$  ein angeordneter Körper, und seien  $A, B, C \in K^2$ . Wir sagen, es gelte  $A \star B \star C$ , falls  $A \neq C$  ist und ein  $\lambda \in K$  mit  $0 < \lambda < 1$  existiert, so dass  $B = \lambda A + (1 - \lambda)C$  ist.

**Übung** Man zeige, dass obige Definition der Anordnung auf  $\mathbb{A}_2(K)$  äquivalent zu folgender Definition ist: Es gelte  $A \star B \star C$ , wenn  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$  paarweise verschieden und kollinear sind und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$a_1 < b_1 < c_1, \quad a_2 < b_2 < c_2, \quad a_1 > b_1 > c_1 \quad \text{oder} \quad a_2 > b_2 > c_2.$$

Wir wollen jetzt die Gültigkeit der Anordnungsaxiome verifizieren. Zu diesem Zweck werden wir zunächst eine äquivalente Charakterisierung der Relation „auf derselben Seite einer Gerade liegen“ behandeln. Dafür ist es sinnvoll, sich an die Bilinearform

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

auf  $K^2$  zu erinnern. Im Fall  $K = \mathbb{R}$  ist das genau das Standardskalarprodukt.

**Definition 2.8** Für eine Gerade  $g = g_{P,v}$  mit einem Aufpunkt  $P \in K^2$  und einem Richtungsvektor  $v \in K^2 \setminus \{0\}$  heißt ein Vektor  $n \in K^2 \setminus \{0\}$  ein **Normalenvektor** von  $g$ , falls  $\langle v \mid n \rangle = 0$  gilt.

Da die Richtung  $Kv$  der Geraden eindeutig bestimmt ist, ist der Begriff des Normalenvektors wohldefiniert. Es ist eine leichte Übung in Linearer Algebra, nachzurechnen, dass die Normalenvektoren von  $g_{P,v}$  gerade die Elemente der (nicht leeren) Menge  $Kv^\perp$  mit

$$v^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v$$

sind und dass  $(v^\perp)^\perp = -v$  gilt. Wir können daher die Gerade  $g_{P,v}$  in ihrer **Hesseschen Normalform**

$$g_{P,v} = \{A \in K^2 \mid \langle A - P \mid v^\perp \rangle = 0\} = \{A \in K^2 \mid \langle A \mid v^\perp \rangle = \langle P \mid v^\perp \rangle\}$$

schreiben,

denn:

$$\langle A - P \mid v^\perp \rangle = 0 \iff A - P \in Kv \iff A \in g_{P,v}$$

#

Dies können wir nutzen, um „auf derselben Seite einer Gerade liegen“ in der Sprache der Bilinearformen auszudrücken.

**Proposition 2.9** Seien  $g = g_{P,v}$  eine Gerade mit Aufpunkt  $P \in K^2$  und Richtungsvektor  $v \in K^2 \setminus \{0\}$  und  $A, B$  zwei Punkte in  $\mathbf{P} \setminus g$ . Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

- (i)  $A$  und  $B$  liegen auf derselben Seite von  $g$ ,
- (ii)  $\langle A - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle B - P \mid v^\perp \rangle$  haben dasselbe Vorzeichen.

Insbesondere sind die zwei Seiten von  $g$  durch  $\{A \in K^2 \mid \langle A - P \mid v^\perp \rangle > 0\}$  und  $\{A \in K^2 \mid \langle A - P \mid v^\perp \rangle < 0\}$  gegeben.

*Beweis.* Nach Definition liegen  $A, B$  genau dann auf verschiedenen Seiten von  $g$ , wenn es ein  $Q \in g$  gibt mit  $A \star Q \star B$ , also wenn es ein  $\lambda \in K$  mit  $0 < \lambda < 1$  gibt, für das  $Q = \lambda A + (1 - \lambda)B$  in  $g$  liegt. Nach dem gerade Gezeigten ist das genau dann der Fall, wenn für dieses  $\lambda$

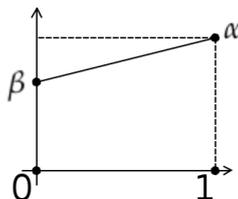
$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q - P \mid v^\perp \rangle = \langle \lambda A + (1 - \lambda)B - P \mid v^\perp \rangle = \langle \lambda(A - P) + (1 - \lambda)(B - P) \mid v^\perp \rangle \\ &= \lambda \cdot \underbrace{\langle A - P \mid v^\perp \rangle}_{=:\alpha} + (1 - \lambda) \cdot \underbrace{\langle B - P \mid v^\perp \rangle}_{=:\beta} \end{aligned}$$

gilt. Um zu verstehen, wann das passiert, machen wir eine Fallunterscheidung nach den Vorzeichen von  $\alpha, \beta$ . Da wir die Gleichung gegebenenfalls mit  $-1$  durchmultiplizieren können, reicht es, die folgenden beiden Fälle zu betrachten:

- $\alpha, \beta > 0$ : Für jedes  $\lambda \in K$  mit  $0 < \lambda < 1$  ist dann  $\lambda\alpha > 0$  und  $(1 - \lambda)\beta > 0$ , was  $\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta > 0$  impliziert. Insbesondere  $\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \neq 0$ , weshalb kein  $\lambda \in K$  mit den gesuchten Eigenschaften existiert.

- $\alpha < 0, \beta > 0$ : In diesem Fall setzen wir  $\lambda := \frac{\beta}{\beta - \alpha}$ , woraus sich sofort  $\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta = 0$  und  $0 < \lambda < 1$  ergibt.

Somit existiert ein  $\lambda \in K$  mit den gewünschten Eigenschaften genau dann, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  verschiedenes Vorzeichen haben.  $\square$



Im obigen Beweis haben wir im Fall  $K \subseteq \mathbb{R}$  die Anschauung, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{\lambda \in K \mid 0 < \lambda < 1\} & \rightarrow & K \\ x & \mapsto & \alpha x + \beta(1 - x) \end{array}$$

eine Nullstelle haben soll, was offensichtlich genau für  $\alpha\beta < 0$  der Fall ist.

**Satz 2.10** Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann erfüllt die affine Koordinatenebene  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star)$  die Axiome  $(I + A)$ .<sup>2</sup>

*Beweis.* Zum Nachweis von  $(A_1)$  seien  $A, B, C \in K^2$  mit  $A \star B \star C$ , d.h.  $A \neq C$  und es existiert ein  $\lambda \in K, 0 < \lambda < 1$  mit  $B = \lambda A + (1 - \lambda)C$ . Somit liegt  $B$  auf der Geraden

$$A \vee C = g_{C, A-C} = \{C + \lambda(A - C) \mid \lambda \in K\} = \{\lambda A + (1 - \lambda)C \mid \lambda \in K\},$$

d.h.  $A, B, C$  sind kollinear. Setzen wir  $\lambda' = 1 - \lambda$ , so ist  $B = \lambda'C + (1 - \lambda')A$ . Aus  $0 < \lambda < 1$  folgt aus den Eigenschaften angeordneter Körper  $-1 < -\lambda < 0$  und deshalb  $0 < 1 - \lambda < 1$ . Insbesondere gilt  $C \star B \star A$ . Es verbleibt zu zeigen, dass  $A, B, C$  paarweise verschieden sind. Nehmen wir an, es wäre  $A = B$ . Dann gälte  $A = B = \lambda A + (1 - \lambda)C$ , also  $(1 - \lambda)A = (1 - \lambda)C$ . Aus  $\lambda \neq 1$  würde  $A = C$  folgen im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Der Fall  $\lambda = 1$  führt aufgrund von  $\lambda < 1$  ebenfalls zum Widerspruch. Es ergibt sich  $A \neq B$ , analog zeigt man  $B \neq C$ .

Zum Beweis von  $(A_2)$  seien  $A, B \in K^2, A \neq B$ . Unter Verwendung der Tatsache, dass der Körper  $K$  Charakteristik 0 hat, definieren wir

$$P := B + 2(A - B) = 2A - B, \quad Q := \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B, \quad R := A + 2(B - A) = -A + 2B \in A \vee B.$$

Offenbar ist  $P \neq Q, Q \neq R$ . Für  $\lambda = \frac{1}{3}$  erhalten wir:

$$\lambda P + (1 - \lambda)Q = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}Q = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B = A.$$

<sup>2</sup>Obwohl wir die affine Koordinatenebene über  $K$  nur als das Tupel  $(K^2, \mathbf{G}_K)$  definiert haben, nennen wir für Körper  $K$  wie oben auch das Tripel  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star)$  die affine Koordinatenebene über  $K$ . Ähnliches gilt für später, wenn für geeignete Körper  $K$  das Hinzufügen weiterer Strukturen möglich ist.

und deshalb  $P \star A \star Q$ . Analog ergibt sich für  $\lambda = \frac{2}{3}$ :

$$\lambda Q + (1 - \lambda)R = \frac{2}{3}Q + \frac{1}{3}R = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B - \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = B$$

und deshalb  $Q \star B \star R$ .

Nun wollen wir  $(A_3)$  zeigen und betrachten dafür drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte  $A, B, C \in K^2$ . Insbesondere ist  $B \in A \vee C = g_{C, A-C}$ , d.h. es gibt ein  $\lambda \in K$  mit  $B = C + \lambda(A - C) = \lambda A + (1 - \lambda)C$ . Wegen  $B \neq A, C$  ist offenbar  $\lambda \neq 0, 1$ . Es verbleiben genau drei Fälle:

- $0 < \lambda < 1$ : Das Eintreten dieses Falles ist äquivalent zur Gültigkeit von  $A \star B \star C$
- $\lambda > 1$ : Wie man sich leicht überlegt, ist dies äquivalent zur Gültigkeit von  $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$ . Setzen wir  $\lambda' := \frac{1}{\lambda}$ , so erhalten wir aus der obigen Gleichung für  $B$  durch Division mit  $\lambda$  die Gleichung  $\lambda' B = A + (\lambda' - 1)C$  oder äquivalent dazu  $A = \lambda' B + (1 - \lambda')C$ , also  $B \star A \star C$ .
- $\lambda < 0$ : Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies äquivalent zur Gültigkeit von  $0 < \frac{1}{1-\lambda} < 1$  ist. Definieren wir  $\lambda'' := \frac{1}{1-\lambda}$ , dann erhalten wir aus der obigen Gleichung für  $B$  durch Division mit  $1 - \lambda$  die Gleichung  $\lambda'' B = (\lambda'' - 1)A + C$ , was äquivalent zu  $C = \lambda'' B + (1 - \lambda'')A$  und damit zur Gültigkeit von  $A \star C \star B$  ist.

Es folgt, dass es unter den drei Punkten  $A, B, C$  genau einen gibt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Es verbleibt der Nachweis von  $(A_4)$ . Seien also  $g = g_{P,v}$  eine Gerade mit Aufpunkt  $P \in K^2$  und Richtungsvektor  $v \in K^2 \setminus \{0\}$  und  $A, B, C$  drei Punkte in  $K^2 \setminus g$ .

- Liegen  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $g$ , so haben nach der Proposition  $\langle A - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle B - P \mid v^\perp \rangle$  dasselbe Vorzeichen. Liegen nun auch  $B$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g$ , so sind auch die Vorzeichen von  $\langle B - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle C - P \mid v^\perp \rangle$  identisch. Es folgt trivialerweise, dass die Vorzeichen von  $\langle A - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle C - P \mid v^\perp \rangle$  übereinstimmen, so dass wieder nach der Proposition  $A$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g$  liegen.
- Liegen  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ , so haben nach der Proposition  $\langle A - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle B - P \mid v^\perp \rangle$  verschiedene Vorzeichen. Liegen nun auch  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ , so sind auch die Vorzeichen von  $\langle B - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle C - P \mid v^\perp \rangle$  verschieden. Es folgt trivialerweise, dass die Vorzeichen von  $\langle A - P \mid v^\perp \rangle$  und  $\langle C - P \mid v^\perp \rangle$  übereinstimmen, so dass wieder nach der Proposition  $A$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g$  liegen.

In Verbindung mit 1.6 haben wir damit gezeigt, dass für einen angeordneten Körper  $K$  die affine Koordinatenebene  $\mathbb{A}_2(K)$  zusammen mit der oben eingeführten Anordnung die Axiome  $(I + A)$  erfüllt.  $\square$

Wir verlassen an der Stelle das Beispiel affiner Koordinatenebenen wieder und wollen im abstrakten Kontext nun noch einige Konsequenzen aus den Anordnungsaxiomen beweisen.

**Proposition 2.11** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B, C, D$  vier Punkte in  $\mathbf{P}$ . Genau dann gelten  $A \star B \star C$  und  $A \star C \star D$ , wenn auch  $B \star C \star D$  und  $A \star B \star D$  gelten.

*Beweis.* Wir zeigen nur die Hinrichtung, die Rückrichtung geht analog. Es gelten also  $A \star B \star C$  und  $A \star C \star D$ . Nach  $(A_1)$  sind dann die Punkte  $A, B, C$  und  $A, C, D$  jeweils kollinear, so dass dies auch auf die vier Punkte  $A, B, C, D$  zutrifft. Außerdem sind wieder nach  $(A_1)$  die Punkte  $A, B, C$  und  $A, C, D$  jeweils paarweise verschieden. Da aus  $B = D$  sofort  $A \star B \star C$  und  $A \star C \star B$  folgte, was nach  $(A_3)$  nicht sein kann, sind die vier Punkte  $A, B, C, D$  auch paarweise verschieden.

Nach Voraussetzung ist  $\mathbf{P}$  eine Inzidenzebene, so dass es nach Proposition 1.9 einen Punkt  $P \in \mathbf{P}$  gibt, der nicht auf der Geraden  $g := A \vee C$  liegt. Setzen wir nun  $h := P \vee C$ , so ist

$$g \wedge h = (A \vee C) \wedge (P \vee C) = C$$

der eindeutig bestimmte Geradenschnittpunkt. Wegen  $A \star C \star D$  liegen  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $h$ .

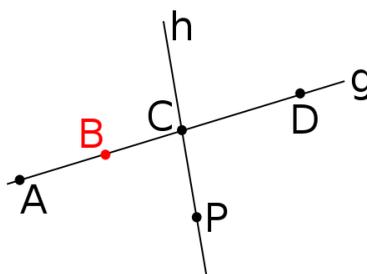


Abbildung II.9: Auf welcher Seite von  $h$  liegt  $B$ ?

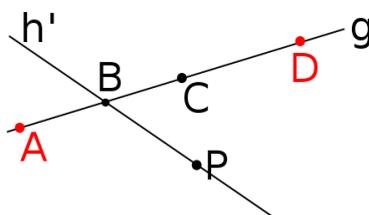
Andererseits liegen  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $h$ ,

*denn:* Nehmen wir das Gegenteil an, so gibt es ein  $Q \in h$  mit  $A \star Q \star B$ . Nach  $(A_1)$  liegt  $Q$  aber auch auf der Geraden  $A \vee B = A \vee C = g$ , so dass  $Q = C$  gelten muss. Es folgt  $A \star C \star B$ , was nach  $(A_3)$  ein Widerspruch zu unserer Annahme  $A \star B \star C$  ist. #

Mit Proposition 2.2 folgt, dass  $B$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $h$  liegen. Es muss also einen Punkt  $Q \in h$  geben mit  $B \star Q \star D$ . Da dann  $Q \in B \vee D = A \vee C = g$  folgt, gilt wie gerade eben  $Q = C$  und somit  $B \star C \star D$ .

Es bleibt  $A \star B \star D$  zu zeigen. Sei dafür  $P$  wieder ein Punkt außerhalb von  $g$ , und sei  $h' := B \vee P$ . Dann liegen mit  $A \star B \star C$  die Punkte  $A$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $h'$ . Andererseits liegen  $C$  und  $D$  auf derselben Seite von  $h'$ ,

*denn:* Lägen sie auf verschiedenen Seiten, gäbe es ein  $Q \in h'$  mit  $C \star Q \star D$ . Dieses  $Q$  läge dann insbesondere auf  $g = C \vee D$ , wäre also gleich dem eindeutig bestimmten Schnittpunkt  $B$  von  $g$  und  $h'$ . Die Folgerung  $C \star B \star D$  steht nach  $(A_3)$  im Widerspruch zum bereits bewiesenen  $B \star C \star D$ . #

Abbildung II.10:  $A$  und  $D$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $h'$ .

Mit Proposition 2.2 folgt, dass  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $h'$  liegen, dass es also ein  $Q \in h'$  gibt mit  $A \star Q \star D$ . Wieder muss  $Q$  dann schon auf  $g = A \vee D$  liegen und also gleich  $B = g \wedge h'$  sein. Es folgt das behauptete  $A \star B \star D$ .  $\square$

**Übung** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B, C, D$  vier Punkte in  $\mathbf{P}$ . Aus  $A \star B \star C$  und  $B \star C \star D$  folgen dann  $A \star B \star D$  und  $A \star C \star D$ .

**Übung** Ist  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , dann hat  $\mathbf{P}$  unendlich viele Elemente.

**Definition 2.12** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbf{P}$ . Dann heißt die Menge

$$\overline{AB} := \{P \in \mathbf{P} \mid A \star P \star B\} \cup \{A, B\}$$

die **Strecke**  $\overline{AB}$  mit den **Endpunkten**  $A$  und  $B$ .



Die Menge

$$\overrightarrow{AB} := \{P \in \mathbf{P} \mid A \star P \star B \text{ oder } A \star B \star P\} \cup \{A, B\}$$

heißt der **Strahl**  $\overrightarrow{AB}$  mit dem **Ausgangspunkt**  $A$ .



Zwei Strahlen  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  heißen **entgegengesetzt**, falls  $A$  zwischen  $B$  und  $C$  liegt. Wird im Folgenden eine der Notationen  $\overline{AB}$  oder  $\overrightarrow{AB}$  verwendet, ohne dass wir ausdrücklich  $A \neq B$  voraussetzen, so ist dies an dieser Stelle als implizit angenommen zu verstehen.

**Übung** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

- Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  Punkte und  $\overline{AB}$  die sie verbindende Strecke. Dann gibt es in  $\overline{AB}$  keine Punkte  $C, D$  mit  $C \star A \star D$ . Die Endpunkte von  $\overline{AB}$  sind also bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.
- Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  Punkte und  $\overrightarrow{AB}$  der Strahl von  $A$  durch  $B$ . Dann gibt es in  $\overrightarrow{AB}$  keinen Punkt  $C$  mit  $C \star A \star B$ . Der Ausgangspunkt eines Strahls ist also eindeutig bestimmt. Ist  $C$  ein beliebiger, von  $A$  verschiedener Punkt auf  $\overrightarrow{AB}$ , dann ist  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ .
- Der Begriff entgegengesetzter Strahlen ist wohldefiniert.
- Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}$  Punkte und  $\overrightarrow{AB}$  der Strahl von  $A$  durch  $B$ . Dann gibt es ein  $C \in \mathbf{P}$ , so dass die Strahlen  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  entgegengesetzt sind, und der Strahl  $\overrightarrow{AC}$  ist mit dieser Eigenschaft eindeutig. Zu jedem Strahl gibt es also genau einen entgegengesetzten Strahl (mit demselben Ausgangspunkt).

**Proposition 2.13** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbf{P}$ . Dann gelten

- $\overline{AB} = \overline{BA}$ ,
- $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ .

*Beweis.* Aussage (a) folgt unmittelbar aus  $(A_1)$ .

Im Beweis von Aussage (b) folgt die Inklusion  $\supseteq$  unmittelbar aus den Definitionen von „Strecke“ und „Strahl“. Sei für die andere Inklusion  $P$  ein beliebiger Punkt aus  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ . Für  $P \in \{A, B\}$  ist nichts zu zeigen, so dass wir annehmen können,  $P$  sei weder  $A$  noch  $B$ . Mit  $P \in \overrightarrow{AB}$  gilt

$$A \star P \star B \quad \text{oder} \quad A \star B \star P,$$

so dass die drei Punkte  $A, B, P$  kollinear und paarweise verschieden sind. Mit  $P \in \overrightarrow{BA}$  gilt aber auch

$$B \star P \star A \quad \text{oder} \quad B \star A \star P.$$

Falls  $A \star P \star B$  nicht gilt, kann nach  $(A_1)$  auch  $B \star P \star A$  nicht gelten. Es folgt, dass dann sowohl  $A \star B \star P$  als auch  $B \star A \star P$  gelten müssten, was ein Widerspruch zu  $(A_3)$  wäre und deshalb nicht sein kann. Es folgt also  $A \star P \star B$ , also  $P \in \overline{AB}$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 2.14** Seien  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ ,  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $B \star A \star C$  und  $g = A \vee B$ . Dann gilt

$$g = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}.$$

*Beweis.* Wir wollen zunächst die Behauptung  $g = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$  zeigen. Sei dafür  $P \in g \setminus \overrightarrow{AB}$ . Nach Definition von „Strahl“ und  $(A_3)$  gilt dann  $P \star A \star B$ . Für  $P = C$  ist  $P$  definitionsgemäß in  $\overrightarrow{AC}$ . Sei also von nun an ohne Einschränkung  $P \neq C$ . Dann sind  $A, P, C$  drei kollineare, paarweise verschiedene Punkte, von denen nach  $(A_3)$  genau einer zwischen den anderen beiden liegen

muss. Zum Beweis der Behauptung müssen wir zeigen, dass nicht  $C \star A \star P$  gelten kann, da die anderen beiden Fälle sofort  $P \in \overrightarrow{AC}$  implizieren. Nehmen wir also an, es gelte  $C \star A \star P$ . Wieder nach  $(A_3)$  gibt es drei Möglichkeiten für die Lage der drei paarweise verschiedenen kollinearen Punkte  $B, C, P$  zueinander.

- Gilt  $B \star C \star P$ , so folgt mit der Voraussetzung  $B \star A \star C$  und Proposition 2.11 insbesondere  $A \star C \star P$ , was im Widerspruch zur Annahme  $C \star A \star P$  steht.
- Gilt  $C \star P \star B$ , so folgt mit der Annahme  $C \star A \star P$  und Proposition 2.11 sofort  $A \star P \star B$ , was ein Widerspruch zum bereits gezeigten  $P \star A \star B$  ist.
- Gilt schließlich  $P \star B \star C$ , so folgt mit dem bereits gezeigten  $P \star A \star B$  und Proposition 2.11 sofort  $A \star B \star C$ , was ein Widerspruch zur Voraussetzung  $B \star A \star C$  ist.

Da also der Fall  $C \star A \star P$  nicht eintreten kann, folgt die erste Behauptung.

Zum Beweis der Behauptung  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$  betrachten wir einen Punkt  $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$ . Dieser erfüllt die Bedingung

$$(A \star P \star B \text{ oder } A \star B \star P \text{ oder } P \in \{A, B\}) \text{ und } (A \star P \star C \text{ oder } A \star C \star P \text{ oder } P \in \{A, C\}).$$

Letztere zerfällt in neun Fälle, die man zum Beweis der Behauptung einzeln abarbeitet. Dies verläuft ganz so wie der Beweis der ersten Behauptung (Übung).  $\square$

**Satz 2.15 (Satz von Pasch)** Seien  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ ,  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage und  $g \in \mathbf{G}$  mit  $g \cap \overrightarrow{AB} = \{P\}$  für ein  $P \in \mathbf{P}$  mit  $A \star P \star B$ . Dann schneidet  $g$  eine der Strecken  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{BC}$ . Falls  $C$  nicht auf  $g$  liegt, schneidet  $g$  genau eine der beiden Strecken.

halten. Bei der Untersuchung dieses Falles kann man eine Beobachtung benutzen, welche auch zur Beantwortung anderer, auf

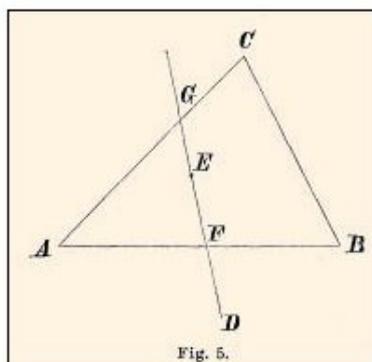


Fig. 5.

die Begegnung von Linien bezüglicher Fragen erforderlich ist. In einer ebenen Fläche seien drei Punkte  $A, B, C$  zu einem Dreieck zusammengefügt, d. h. durch die geraden Strecken  $AB, AC, BC$  paarweise verbunden. In derselben Fläche sei die gerade Strecke  $DE$  gelegen und zwar so, dass sie einen innerhalb der Strecke  $AB$  gelegenen Punkt  $F$  enthält. Die Strecke  $DE$  hat dann allemal entweder mit der Strecke  $AC$  oder

mit der Strecke  $BC$  einen Punkt gemein, oder sie kann bis zu einem solchen Punkte verlängert werden.

**IV. Grundsatz.** — Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte  $A, B, C$  durch die geraden Strecken  $AB, AC, BC$  paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke  $DE$  durch einen innerhalb der Strecke  $AB$  gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke  $DE$  oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der Strecke  $AC$  oder durch einen Punkt der Strecke  $BC$ .

Oder: Liegen die Punkte  $A, B, C, D$  in einer ebenen Fläche,  $F$  in der Geraden  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$ , so geht die Gerade  $DF$  entweder durch einen Punkt der Strecke  $AC$  oder durch einen Punkt der Strecke  $BC$ .

**I. Lehrsatz.** — Liegen die Punkte  $A, B, C, D$  in einer ebenen Fläche  $P$ , zugleich die Punkte  $A, B, C$  in einer ebenen Fläche  $P'$ , aber nicht in einer geraden Linie, so existirt eine ebene Fläche, welche alle Punkte von  $P'$  enthält und auch den Punkt  $D$ .

**Beweis.** — Liegt  $D$  in einer der Geraden  $AB, AC, BC$ , so existirt eine solche Fläche nach dem zweiten Grundsatz. Liegt  $D$  in keiner der Geraden  $AB, AC, BC$ , so werde in der Geraden  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$  ein Punkt  $F$  angenommen; es mag dann (IV) die Gerade  $DF$  etwa durch einen Punkt  $G$  der Strecke  $AC$  gehen;  $F$  und  $G$  sind von einander verschieden,  $D$  in der Geraden  $FG$ . Es existirt jetzt eine ebene Fläche  $Q$ , welche alle Punkte von  $P'$  enthält und auch  $F$ ; weiter eine ebene Fläche  $Q'$ , welche alle Punkte von  $Q$  enthält und auch  $G$ ; schliesslich eine ebene Fläche welche alle Punkte von  $Q'$  enthält und auch  $D$ .

Abbildung II.11: Auszug aus der Arbeit von Pasch aus dem Jahr 1882. Pasch nennt seinen Satz hier einen „Grundsatz“, also ein Axiom. In der Tat kann man das Anordnungsaxiom ( $A_4$ ) durch den Satz von Pasch ersetzen und bekommt dieselbe Theorie. Quelle: <http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABV7607.0001.001?view=toc>

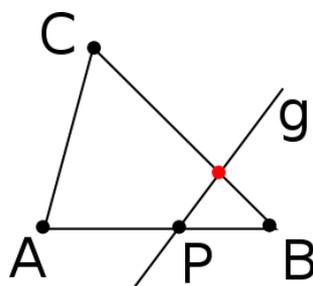


Abbildung II.12: Schneidet eine Gerade eine Dreiecksseite außerhalb ihrer Endpunkte, so schneidet sie das Dreieck noch einmal.

*Beweis.* Da für  $C \in g$  nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung  $C \notin g$  annehmen. Außerdem liegen wegen  $A \star P \star B$  die Punkte  $A, B$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ , so dass der Punkt  $C$  nach Proposition 2.2 entweder auf derselben Seite wie  $A$  oder auf derselben Seite wie  $B$  liegt. Da sich diese beiden Situationen durch eine Umbenennung von  $A$  in  $B$  und umgekehrt ineinander überführen lassen, können wir ohne Einschränkung annehmen,  $C$  liege auf derselben Seite von  $g$  wie  $A$ . Nach Proposition 2.2 liegen dann die Punkte  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ , so dass es also einen Punkt  $Q \in g$  gibt mit  $B \star Q \star C$ . Dieser Punkt  $Q$  liegt nach Konstruktion im Durchschnitt  $g \cap \overline{BC}$ , der somit nicht leer sein kann.  $\square$

### §3 Die Kongruenzaxiome für Strecken

Wir haben im letzten Abschnitt den Begriff der Strecke eingeführt, haben bislang aber noch keine Möglichkeit, deren Länge zu vergleichen. Wir führen daher den Begriff der **Kongruenz von Strecken** als Relation  $\cong$  auf der Menge  $\mathbf{S}$  aller Strecken in  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein.

**Definition 3.1** Wir sagen, das 4-Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  erfüllt die **Kongruenzaxiome für Strecken**, wenn gilt

(K<sub>1</sub>)  $\cong$  ist auf  $\mathbf{S}$  eine Äquivalenzrelation.

(K<sub>2</sub>) Sind  $A \neq B \in \mathbf{P}$  und  $A' \neq C' \in \mathbf{P}$ , so gibt es genau ein  $B' \in \overrightarrow{A'C'}$  mit  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ .

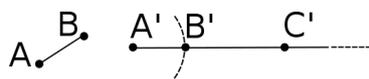
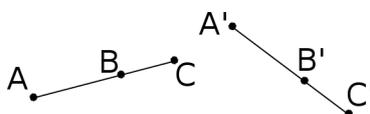


Abbildung II.13: Man sagt: Eine beliebige Strecke lässt sich auf einen beliebigen Strahl **abtragen**. In der Schulgeometrie nimmt man hierfür mit dem Zirkel die Länge der Strecke ab und schneidet den Strahl mit dem Kreis mit diesem Radius um dessen Ausgangspunkt.

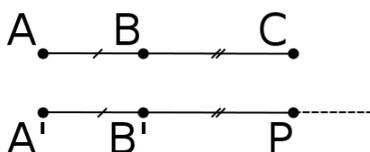
(K<sub>3</sub>) Sind  $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}$  mit  $A \star B \star C$ ,  $A' \star B' \star C'$  und  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ , so gilt auch  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ .



Wieder führen wir eine abkürzende Notation ein: Erfüllt das 4-Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  die Inzidenz-, die Anordnungs- und die Kongruenzaxiome für Strecken, so schreiben wir kurz „ $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  erfüllt  $(I + A + K)$ “.

**Proposition 3.2** Seien  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  ein 4-Tupel mit  $(I + A + K)$ ,  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte mit  $A \star B \star C$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  drei Punkte mit  $C' \in \overrightarrow{A'B'}$ , so dass  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  und  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  gelten. Dann folgt  $A' \star B' \star C'$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ .

*Beweis.* Wir wissen, dass es einen eindeutig bestimmten Strahl mit Ausgangspunkt  $B'$  gibt, der dem Strahl  $\overrightarrow{B'A'}$  entgegengesetzt ist. Sei  $P$  der nach  $(K_2)$  existierende eindeutige Punkt auf diesem Strahl mit  $\overline{BC} \cong \overline{B'P}$ . Daraus und aus  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$  folgern wir mit  $(K_3)$ , dass auch  $\overline{AC} \cong \overline{A'P}$  gilt.



Nun liegen aber sowohl  $P$  als auch  $C'$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$ , denn für  $C'$  ist das vorausgesetzt, und nach Konstruktion von  $P$  gilt  $A' \star B' \star P$ . Da nach Voraussetzung  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  gilt, folgt mit  $(K_1)$  unmittelbar  $\overline{A'P} \cong \overline{A'C'}$  und mit der Eindeutigkeitsaussage in  $(K_2)$  schon  $P = C'$ . Das impliziert  $A' \star B' \star C'$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ , also die Behauptung.  $\square$

**Definition 3.3** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  ein 4-Tupel mit  $(I + A + K)$  und seien  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$  vier Punkte mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$ . Falls es einen Punkt  $P \in \mathbf{P}$  gibt mit  $C \star P \star D$  und  $\overline{AB} \cong \overline{CP}$ , dann sagen wir, die Strecke  $\overline{AB}$  sei **kleiner** als die Strecke  $\overline{CD}$  (bzw.  $\overline{CD}$  **größer** als  $\overline{AB}$ ) und schreiben  $\overline{AB} < \overline{CD}$ .

**Übung** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  ein 4-Tupel mit  $(I + A + K)$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (a) Seien  $A, B, C, D, A', B', C', D'$  Punkte in  $\mathbf{P}$  mit  $A \neq B, C \neq D, A' \neq B', C' \neq D'$  und  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ . Dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{CD} \iff \overline{A'B'} < \overline{C'D'}.$$

- (b) Sind  $A, B, C, D, E, F$  Punkte in  $\mathbf{P}$  mit  $A \neq B, C \neq D, E \neq F$ , dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{CD} \quad \text{und} \quad \overline{CD} < \overline{EF} \implies \overline{AB} < \overline{EF}.$$

- (c) Für beliebige vier Punkte  $A, B, C, D$  in  $\mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$  gilt genau eine der folgenden Aussagen

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}.$$

Wir wollen nun für geeignete Teilkörper von  $\mathbb{R}$  (mit der von  $\mathbb{R}$  eingeschränkten Anordnung) die affine Koordinatenebene  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star)$  mit einem geeigneten Kongruenzbegriff versehen, um so ein **Beispiel** für ein 4-Tupel, das  $(I + A + K)$  erfüllt, zu schaffen. Natürlich haben wir in dieser speziellen Situation bereits eine naive Vorstellung davon, wann zwei Strecken kongruent sein sollen: wenn sie nämlich die gleiche Länge, also als Elemente von  $K^2$  die gleiche Norm, haben. Wir wählen für die Norm den im Fall  $K = \mathbb{R}$  bereits aus der Linearen Algebra bekannten **Euklidischen Abstand**

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A \mid B - A \rangle} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \in \mathbb{R}$$

zweier Punkte  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$  in  $K^2$ . Dieser hat für angeordnete Körper  $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$  bekanntermaßen folgende Eigenschaften.

- Positive Definitheit:  $d(A, B) \geq 0$  für alle  $A, B \in K^2$  und  $d(A, B) = 0$  nur für  $A = B$ ,
- Symmetrie:  $d(A, B) = d(B, A)$  für alle  $A, B \in K^2$ ,
- Dreiecksungleichung:  $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$  für alle  $A, B, C \in K^2$ .

Passend zu unserer naiven Vorstellung definieren wir, dass zwei Strecken in  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star)$  genau dann kongruent sind, wenn sie dieselbe **Länge** haben, wenn also ihre jeweiligen Endpunkte denselben euklidischen Abstand haben. Wir halten das in der folgenden Definition fest.

**Definition 3.4** Sei  $K$  ein Teilkörper von  $\mathbb{R}$ , und seien  $A, B, C, D \in K^2$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$ . Dann setzen wir

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad :\iff \quad d(A, B) = d(C, D).$$

Die Axiome  $(K_1)$  und  $(K_3)$  können wir in dieser Situation leicht verifizieren.

**Proposition 3.5** Sei  $K$  ein Teilkörper von  $\mathbb{R}$ . Dann erfüllt die affine Koordinatenebene  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star, \cong)$  die Axiome  $(K_1)$  und  $(K_3)$ .

*Beweis.* Dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist, also  $(K_1)$  gilt, ist mit der angegebenen Definition trivial. Zum Beweis von  $(K_3)$  ist es offensichtlich hinreichend, die Additivität des Euklidischen Abstands für kollineare Punkte zu zeigen, dass also für beliebige drei Punkte  $A, B, C \in K^2$  mit  $A \star B \star C$  die Gleichung

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

gilt. Aufgrund von  $A \star B \star C$  existiert ein  $\lambda \in K$  mit  $0 < \lambda < 1$ , so dass  $B = \lambda A + (1 - \lambda)C$  ist. Es ergibt sich

$$d(A, B) = \|B - A\| = \|(\lambda - 1)A + (1 - \lambda)C\| = (1 - \lambda)\|C - A\|$$

sowie

$$d(B, C) = \|C - B\| = \|\lambda C - \lambda A\| = \lambda\|C - A\|$$

Die Behauptung folgt. □

Die Voraussetzungen, die wir bisher an den Körper  $K$  gestellt haben, sind jedoch nicht stark genug, um auch das Axiom  $(K_2)$  zu erhalten. In der Tat ist etwa im Fall  $K = \mathbb{Q}$  das Axiom  $(K_2)$  verletzt: Die Strecke von  $(0,0)$  nach  $(1,1)$  lässt sich nicht auf den Strahl aus  $(0,0)$  durch  $(1,0)$  abtragen, weil  $\sqrt{2}$  nicht in  $\mathbb{Q}$  liegt.

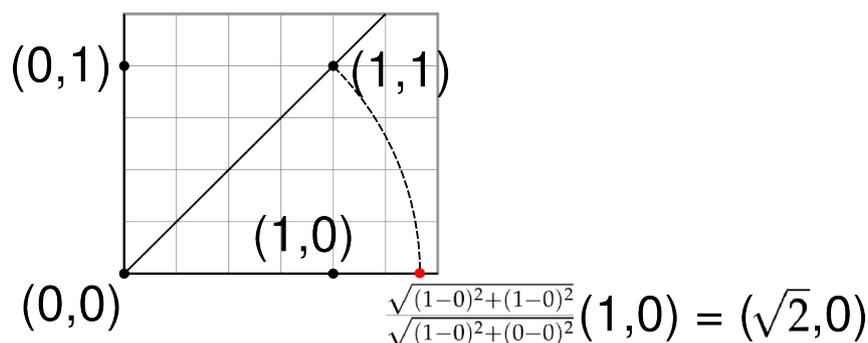


Abbildung II.14: In  $\mathbb{A}_2(\mathbb{Q})$  ist  $(K_2)$  verletzt.

Was genau geht schief, und durch welche zusätzlichen Voraussetzungen an den Körper  $K$  können wir erreichen, dass  $(K_2)$  gilt? Dazu betrachten wir eine Strecke  $\overline{AB}$  mit Länge  $d = d(A, B) > 0$ . Sei weiter  $A' = (a'_1, a'_2)$  ein Punkt in  $K^2$ , von dem ein Strahl durch einen von  $A'$  verschiedenen Punkt  $C' = (c'_1, c'_2)$  ausgeht. Dann lässt sich jeder Punkt  $P_\lambda \neq A'$  auf diesem Strahl schreiben als

$$P_\lambda = A' + \lambda \cdot (C' - A') = ((1 - \lambda)a'_1 + \lambda c'_1, (1 - \lambda)a'_2 + \lambda c'_2) \quad \text{mit einem } \lambda > 0;$$

hierfür nutzen wir nur die bekannte Struktur der Geraden  $g_{A', C' - A'}$  und die Definition von „Strahl“ aus. Für ein solches  $P_\lambda$  gilt dann

$$d(A', P_\lambda) = \sqrt{(a'_1 - ((1 - \lambda)a'_1 + \lambda c'_1))^2 + (a'_2 - ((1 - \lambda)a'_2 + \lambda c'_2))^2} = \lambda \cdot d(A', C').$$

Wählen wir  $\lambda = d(A, B) \cdot d(A', C')^{-1}$ , so können wir  $P_\lambda$  als den gesuchten Punkt  $B'$  wählen. Das funktioniert allerdings nur, wenn dieser Wert von  $\lambda$  bereits in  $K$  liegt. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist offensichtlich, dass alle Normwerte von Punkten in  $\mathbb{A}_2(K)$  wieder in  $K$  liegen, oder äquivalent, dass für alle  $a, b \in K$  die Zahl  $a^2 + b^2$  in  $K$  eine Quadratwurzel hat.

**Definition 3.6** Ein Körper  $K$  heißt ein **pythagoräischer Körper**, wenn für alle  $a, b \in K$  das Element  $a^2 + b^2$  in  $K$  eine Quadratwurzel in  $K$  hat

Offensichtliche **Beispiele** für pythagoräische Körper sind  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ , wobei letzterer nicht angeordnet ist und für uns somit nicht infrage kommt. Ein weiteres Beispiel ist der algebraische Abschluss  $\overline{\mathbb{Q}}$  von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{C}$ , genauso wie sein maximaler reeller Teilkörper  $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ . Letzterer ist ein zweites Beispiel für einen angeordneten pythagoräischen Körper. Wir werden später noch einmal kurz auf ihn zu sprechen kommen.

Unsere Überlegungen fassen wir wie folgt zusammen.

**Satz 3.7** Sei  $K$  ein pythagoräischer Teilkörper von  $\mathbb{R}$ . Dann erfüllt die affine Koordinatenebene  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star, \cong)$  die Axiome  $(I + A + K)$ .

#### §4 Die Kongruenzaxiome für Winkel

Natürlich sind nicht nur die Längen vorhandener Strecken für die Geometrie von Interesse sondern auch die Winkel, unter denen sich Geraden schneiden.

**Definition 4.1** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt

$$\angle BAC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

der Winkel  $\angle BAC$ ,  $A$  sein *Scheitel* und  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  seine *Schenkel*.

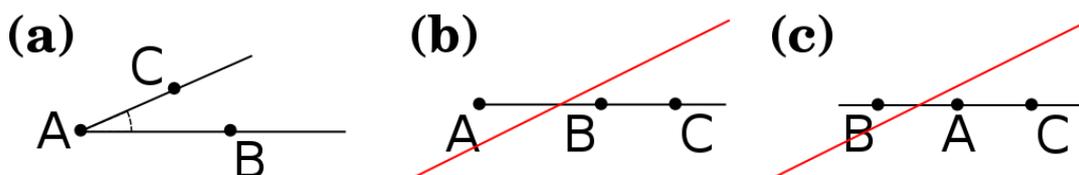


Abbildung II.15: Man bemerke, dass die obige Definition den Nullwinkel (b) und den geraden Winkel (c) ausschließt.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt

**Übung** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i)  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ,
- (ii)  $A = A'$  und entweder  $(B' \in \overrightarrow{AB} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AC})$  oder  $(B' \in \overrightarrow{AC} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AB})$ .

Insbesondere hat jeder Winkel einen eindeutig bestimmten Scheitel. Wir wollen nun den Begriff der *Kongruenz von Winkeln* als Relation  $\simeq$  auf der Menge  $\mathbf{W}$  aller Winkel in  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$  einführen.

**Definition 4.2** Wir sagen, ein 5-Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  mit  $(I + A + K)$  erfüllt die *Kongruenzaxiome für Winkel*, wenn gilt

(K<sub>4</sub>)  $\simeq$  ist auf  $\mathbf{W}$  eine Äquivalenzrelation,

(K<sub>5</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage und  $A' \neq B' \in \mathbf{P}$ , dann gibt es für jede Seite von  $A' \vee B'$  genau einen Strahl  $\overrightarrow{A'C'}$ , der in dieser Seite verläuft (d. h.  $\overrightarrow{A'C'} \subseteq \text{Seite} \cup \{A'\}$ ) und für den  $\angle B'A'C' \simeq \angle BAC$  gilt.

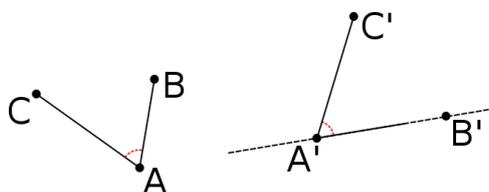


Abbildung II.16: Man sagt: Ein beliebiger Winkel lässt sich auf einen beliebigen Strahl *abtragen*.

(K<sub>6</sub>) Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so gilt

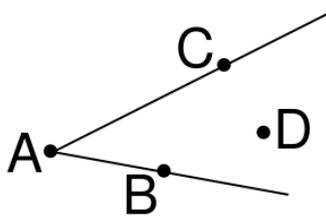
$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C' \quad \text{und} \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'.$$

In diesem Fall nennen wir das 5-Tupel  $\mathbb{H} := (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  auch eine **Hilbertebene**. Wir werden, wenn wir im Folgenden eine Hilbertebene  $\mathbb{H}$  einführen und nichts anderes sagen, stets diese Notation annehmen.

**Bemerkung 4.3** Fordert man für das Tupel  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  nicht die Gültigkeit von Axiomen, so nennt man es eine **ebene Geometrie**.

Da wir nun einen Begriff dafür haben, wann zwei Winkel „gleich groß“ sind (wenn sie nämlich kongruent sind), sollten wir also auch eine Methode entwickeln können, um zu sagen, wann ein Winkel „größer“ als ein anderer ist. Das funktioniert über Addition von Winkeln.

**Definition 4.4** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene, und seien  $A, B, C, D \in \mathbf{P}$ , so dass  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind. Wir sagen,  $D$  **liege im Inneren** von  $\angle BAC$  (bzw.  $\overrightarrow{AD}$  **liege zwischen**  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$ ), falls  $D$  auf derselben Seite von  $A \vee C$  wie  $B$  und auf derselben Seite von  $A \vee B$  wie  $C$  liegt.



In diesem Fall sagen wir auch, der Winkel  $\angle BAC$  sei die **Summe** der Winkel  $\angle BAD$  und  $\angle DAC$  und schreiben

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC.$$

**Definition 4.5** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene, und seien  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  je drei Punkte in  $\mathbf{P}$  in allgemeiner Lage. Falls es einen Strahl  $\overrightarrow{A'P}$  zwischen  $\overrightarrow{A'B'}$  und  $\overrightarrow{A'C'}$  gibt mit  $\angle BAC \simeq \angle PA'C'$ , so sagen wir, der Winkel  $\angle BAC$  sei **kleiner** als der Winkel  $\angle B'A'C'$  (bzw.  $\angle B'A'C'$  **größer** als  $\angle BAC$ ) und schreiben  $\angle BAC < \angle B'A'C'$ .

**Übung** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene. Dann gilt

- (a) Sind  $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{W}$  mit  $\alpha \simeq \alpha'$  und  $\beta \simeq \beta'$ , so ist genau dann  $\alpha < \beta$ , wenn  $\alpha' < \beta'$  gilt.
- (b) Sind  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{W}$ , so folgt aus  $\alpha < \beta$  und  $\beta < \gamma$ , dass auch  $\alpha < \gamma$  gilt.
- (c) Für zwei Winkel  $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$  gilt genau eine der drei folgenden Aussagen

$$\alpha < \beta, \quad \alpha \cong \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Wenn man genau hinschaut, stellt man fest, dass Axiom  $(K_6)$  eigentlich Aussagen über Kongruenzen von Dreiecken macht. Wir wollen diesen Begriff nun einführen, um eine etwas anschaulichere Formulierung von  $(K_6)$  zu erhalten.

**Definition 4.6** Sei  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  ein Tripel mit  $(I + A)$ , und seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann heißt das Tupel

$$\triangle ABC := (A, B, C)$$

das **Dreieck** mit den **Eckpunkten**  $A, B, C$ . Die Strecken  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$  heißen die **Seiten** des Dreiecks  $\triangle ABC$ .

Ist auf  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$  die Struktur einer Hilbertebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  definiert, und sind  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  weitere drei Punkte in allgemeiner Lage, so heißen die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  **kongruent** (schreibe:  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ), falls die folgenden Bedingungen gelten:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

und

$$\angle BAC \simeq \angle B'A'C', \quad \angle ABC \simeq \angle A'B'C', \quad \angle ACB \simeq \angle A'C'B'.$$

**Bemerkung 4.7** Rein formal sind also die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BAC$  nicht zwangsläufig kongruent; durch Umbenennen können wir dieses Problem natürlich sofort beheben.

**Übung** Die Kongruenz von Dreiecken ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der dreielementigen Teilmengen von  $\mathbf{P}$ .

Mithilfe dieser Bezeichnung können wir nun Axiom  $(K_6)$  umformulieren zum **SWS-Kriterium**

$(K'_6)$  Sind  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C',$$

so sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  kongruent.

Wir wollen nun untersuchen, wann in einer ebenen Geometrie mit gewissen Zusatzvoraussetzungen das SWS-Kriterium gilt. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Bewegung ein.

**Definition 4.8** Sei  $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine ebene Geometrie. Eine **Bewegung** in  $\Pi$  ist dann eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$  mit

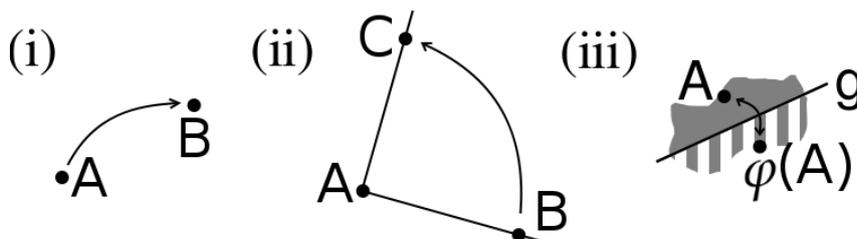
- (i) Für alle  $g \in \mathbf{G}$  liegt  $\varphi(g)$  wieder in  $\mathbf{G}$ ,
- (ii) für beliebige drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  gilt  $A \star B \star C \iff \varphi(A) \star \varphi(B) \star \varphi(C)$ ,
- (iii) für beliebige zwei verschiedene Punkte  $A, B \in \mathbf{P}$  gilt  $\overline{AB} \cong \overline{\varphi(A)\varphi(B)}$ ,
- (iv) für beliebige drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage gilt  $\angle ABC \cong \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$ .

Die Menge aller Bewegungen in  $\Pi$  bezeichnen wir mit  $\text{Bew}(\Pi)$ .

Wenn wir uns die Definition noch einmal anschauen, wird klar, dass wir vereinfachend sagen können, dass Bewegungen gerade diejenigen bijektiven Abbildungen auf  $\mathbf{P}$  sind, die die bislang von uns eingeführte Geometrie im Sinne der Kongruenz unverändert lassen. Wenn wir zusätzlich noch fordern, dass  $\cong$  und  $\simeq$  transitiv sind, wird  $\text{Bew}(\Pi)$  offensichtlich zu einer Gruppe.

**Definition 4.9** Sei  $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine ebene Geometrie mit  $(I + A)$ . Dann sagen wir,  $\Pi$  habe **genügend viele Bewegungen (gvB)**, wenn folgende Bedingungen gelten.

- (i) Für jede zwei Punkte  $A, B \in \mathbf{P}$  gibt es ein  $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi(A) = B$ ,
- (ii) für beliebige drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$  gibt es ein  $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi(A) = A$  und  $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ ,
- (iii) für jede Gerade  $g \in \mathbf{G}$  gibt es ein  $\varphi \in \text{Bew}(\Pi)$ , so dass zum einen  $\varphi(A) = A$  gilt für alle  $A \in g$  und zum anderen für alle  $A \in \mathbf{P} \setminus g$  die beiden Punkte  $A$  und  $\varphi(A)$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen.

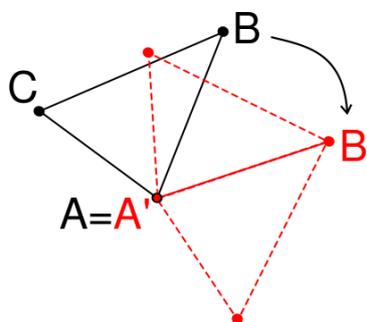


**Satz 4.10** Sei  $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine ebene Geometrie mit  $(I + A + K_1 + K_2 + K_4 + K_5)$ . Falls  $\Pi$  genügend viele Bewegungen hat, so gilt in  $\Pi$  das SWS-Kriterium  $(K'_6)$ .

*Beweis.* Seien also  $A, B, C \in \mathbf{P}$  und  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  je drei Punkte in allgemeiner Lage, und gelte

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \angle BAC \simeq \angle B'A'C'. \quad (\text{II.2})$$

Wegen (gvB) (i) gibt es ein  $\varphi_1 \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi_1(A) = A'$ . Da andererseits  $\varphi_1$  bijektiv ist und Anordnung und Kongruenz von Strecken und Winkeln erhält, können wir also ohne Einschränkung  $A = A'$  annehmen.



Mit (gvB) (ii) gibt es ein  $\varphi_2 \in \text{Bew}(\Pi)$  mit  $\varphi_2(A) = A$  und  $\varphi_2(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB'}$ . Mit demselben Argument wie oben können wir daher ohne Einschränkung annehmen, dass neben  $A = A'$  auch  $B = B'$  gilt.

Schließlich gibt es mit (gvB) (iii) ein  $\varphi_3 \in \text{Bew}(\Pi)$ , das die Gerade  $A \vee B$  punktweise festlässt, und für das  $C$  und  $\varphi_3(C)$  auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, dass nicht nur  $A = A'$  und  $B = B'$  gelten, sondern auch  $C$  und  $C'$  auf derselben Seite der Geraden  $A \vee B = A' \vee B'$  liegen.

Unsere Voraussetzungen (II.2) lauten nun

- (i)  $\angle BAC \simeq \angle BAC'$ ,
- (ii)  $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$ ,
- (iii)  $C$  und  $C'$  liegen auf derselben Seite von  $A \vee B$ .

Mit  $(K_5)$  folgt aus (i) und (iii) sofort  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$ , mit  $(K_2)$  daraus und aus (ii) die Gleichheit  $C = C'$ . Insgesamt haben wir also gezeigt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen eine Bewegung in  $\text{Bew}(\Pi)$  gibt, die das Dreieck  $\triangle ABC$  auf das Dreieck  $\triangle A'B'C'$  abbildet. Letztere sind also kongruent, was zu zeigen war.  $\square$

Wir wollen als **Beispiel** wieder die affine Koordinatenebene  $\mathbb{A}_2(K)$  über einem pythagoräischen Teilkörper von  $\mathbb{R}$  betrachten. Zusätzlich zu den bereits eingeführten  $\star$  und  $\cong$  müssen wir nun einen Kongruenzbegriff  $\simeq$  für Winkel definieren.

Wir erinnern uns also an den aus der Linearen Algebra bekannten Zusammenhang des Skalarprodukts mit dem Kosinus. Seien  $v, w \in K^2 \setminus \{0\}$  zwei Vektoren. Für diese definieren wir  $\angle(v, w)$  als die eindeutig bestimmte reelle Zahl im Intervall  $[0, \pi]$  mit

$$\cos \angle(v, w) = \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist dies wohldefiniert. Einem Winkel  $\angle ABC$  lässt sich so seine **Winkelgröße** (auch **Bogenmaß** genannt)

$$\angle ABC := \angle(A - B, C - B)$$

zuteilen. Wir definieren jetzt, dass zwei Winkel in der affinen Koordinatenebene  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star, \cong)$  genau dann kongruent sind, wenn sie die gleiche Winkelgröße haben.

**Definition 4.11** Sei  $K$  ein pythagoräischer Teilkörper von  $\mathbb{R}$ . Es seien  $A, B, C$  sowie  $A', B', C'$  jeweils drei Punkte in  $K^2$  in allgemeiner Lage. Wir setzen

$$\angle ABC \simeq \angle A'B'C' : \iff \angle(A - B, C - B) = \angle(A' - B', C' - B').$$

Wir wollen nun die Kongruenzaxiome für Winkel überprüfen.

**Übung**  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation, es gilt also  $(K_4)$ .

Bevor wir  $(K_5)$  zeigen, wollen wir zunächst die Bewegungen von  $K^2$  untersuchen.

**Übung**  $\text{Bew}((K^2, \mathbf{G}_K, \star, \cong, \simeq))$  enthält die (für  $K = \mathbb{R}$  aus der Linearen Algebra bekannten) **Bewegungen**  $\varphi : K^2 \rightarrow K^2$  mit

$$\varphi(P) = M \cdot P + A \quad \text{für alle } P \in K^2$$

für ein  $M \in \text{O}_2(K) = \text{O}_2(\mathbb{R}) \cap K^{2 \times 2}$  und ein  $A \in K^2$ .

Eine solche Bewegung heißt dabei **eigentlich**, wenn  $M$  bereits in  $\text{SO}_2(K)$  liegt, und **uneigentlich** sonst. Aus der Linearen Algebra ist bekannt:

- Jedes  $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$  lässt sich eindeutig schreiben als die **Drehung**

$$M = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

um einen Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  mit Zentrum  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Insbesondere gilt dann

$$\angle(A, D_\alpha \cdot A) = \begin{cases} \alpha & \text{für } \alpha \in [0, \pi], \\ 2\pi - \alpha & \text{für } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

- Jedes  $M \in \text{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$  lässt sich eindeutig schreiben als die **Spiegelung**

$$M = S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

an der Geraden  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  für ein  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

**Übung** Sei  $K$  ein pythagoräischer Teilkörper von  $\mathbb{R}$ , und seien  $A, B, C \in K^2$  in allgemeiner Lage. Man zeige, dass  $\cos \angle ABC$  und  $\sin \angle ABC$  in  $K$  liegen. Insbesondere ist  $D_{\angle ABC} \in \text{O}_2(K)$ .

Zum Nachweis von  $(K_5)$  betrachten wir nun drei Punkte  $A, B, C \in K^2$  in allgemeiner Lage und zwei verschiedene Punkte  $A', B' \in K^2$ . Für ein  $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  mit  $D_\alpha \in \text{O}_2(K)$  setzen wir

$$P'_\alpha := A' + D_\alpha \cdot (B' - A').$$

Dann sind die Punkte  $A', B', P'_\alpha$  in allgemeiner Lage, denn  $B' - A', P'_\alpha - A' = D_\alpha(B' - A')$  sind linear unabhängig. Nach dem obigen gilt außerdem

$$\angle B'A'P'_\alpha = \angle(B' - A', P'_\alpha - A') = \angle(B' - A', D_\alpha \cdot (B' - A')) = \begin{cases} \alpha & \text{für } \alpha \in (0, \pi), \\ 2\pi - \alpha & \text{für } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

insbesondere durchläuft  $\angle A'B'P'_\alpha$  mit  $\alpha$  alle Kongruenzklassen von Winkeln. Es folgt

$$\begin{aligned} \angle B'A'P'_\alpha \simeq \angle BAC &\iff \angle B'A'P'_\alpha = \angle BAC \\ &\iff \alpha \in \{\angle BAC, 2\pi - \angle BAC\}. \end{aligned}$$

Für  $(K_5)$  müssen wir also noch zeigen, dass die beiden Punkte

$$C'_1 := P'_{\angle BAC} = A' + D_{\angle BAC} \cdot (B' - A') \quad \text{und} \quad C'_2 := P'_{2\pi - \angle BAC} = A' + D_{2\pi - \angle BAC} \cdot (B' - A')$$

auf verschiedenen Seiten der Geraden  $A' \vee B'$  liegen. Dies stimmt, da

$$\frac{1}{2}C'_1 + \frac{1}{2}C'_2 = A' + \frac{1}{2}(D_{\angle BAC} + D_{2\pi - \angle BAC}) \cdot (B' - A') = A' + \cos \angle BAC \cdot (B' - A')$$

ein Punkt zwischen  $C'_1$  und  $C'_2$  ist, der auch auf  $A' \vee B'$  liegt.

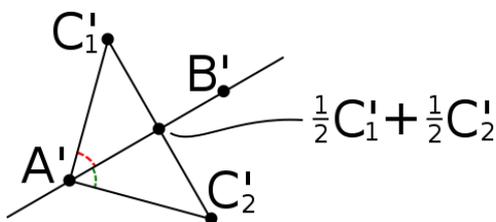


Abbildung II.17: Da der rote und der grüne Winkel die gleiche Winkelgröße haben, liegt der konstruierte Punkt auf der Geraden  $A' \vee B'$ .

Abschließend wollen wir zeigen, dass für die Relation  $\simeq$  das SWS-Kriterium  $(K'_6)$  gilt. Nach Satz 4.10 genügt es dafür, den folgenden Satz zu zeigen.

**Satz 4.12** Für einen pythagoräischen Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{R}$  hat die ebene Geometrie  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star, \cong, \simeq)$  genügend viele Bewegungen.

*Beweis.* Für je zwei Punkte  $A, B \in K^2$  ist durch

$$\varphi : \begin{cases} K^2 & \rightarrow K^2, \\ P & \mapsto I_2 \cdot P + (B - A) \end{cases}$$

eine Bewegung von  $K^2$  gegeben, die  $A$  auf  $B$  abbildet. Das zeigt (gvB) (i).

Wir wollen nun (gvB) (ii) zeigen. Seien dafür  $A, B, C \in K^2$  drei beliebige Punkte mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$ . Falls  $C$  auf  $A \vee B$  liegt, definieren wir eine Bewegung  $\varphi$  durch

$$\varphi(P) := \begin{cases} P & \text{falls } C \in \overrightarrow{AB}, \\ -(P - A) + A & \text{falls } C \in (A \vee B) \setminus \overrightarrow{AB}, \text{ d.h. falls } C \star A \star B. \end{cases}$$

Nach Konstruktion erfüllt diese  $\varphi(A) = A$  und  $\varphi(B) \in \overrightarrow{AC}$  (im zweiten Fall ist der Strahl  $\overrightarrow{AC}$  entgegengesetzt zu  $\overrightarrow{AB}$ , und aus  $\varphi(B) = 2A - B$  folgt  $\varphi(B) \star A \star B$ ). Im Folgenden seien die

drei Punkte  $A, B, C$  in allgemeiner Lage. Wir setzen  $\alpha := \angle BAC \in (0, \pi)$  und definieren zwei Bewegungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  durch

$$\varphi_1(P) := D_\alpha \cdot (P - A) + A \quad \text{und} \quad \varphi_2(P) := D_{2\pi-\alpha} \cdot (P - A) + A \quad \text{für alle } P \in K^2.$$

Beide bilden nach Konstruktion  $A$  auf sich selbst ab. Weiter gilt

$$\angle BA\varphi_1(B) = \angle(B - A, \varphi_1(B) - A) = \angle(B - A, D_\alpha(B - A)) = \alpha = \angle BAC$$

sowie

$$\angle BA\varphi_2(B) = \angle(B - A, D_{2\pi-\alpha}(B - A)) = 2\pi - (2\pi - \alpha) = \alpha = \angle BAC.$$

Wie im Beweis von  $(K_5)$  gerade eben (vgl. Abbildung II.17) liegen  $\varphi_1(B)$  und  $\varphi_2(B)$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $A \vee B$ . Nach  $(K_5)$  liegt daher genau eines der beiden auf dem Strahl  $\overrightarrow{AC}$ , was zu zeigen war.

Wir schließen den Beweis mit einem Beweis von (gvB) (iii) ab. Sei dafür  $g = g_{Q,v}$  mit  $Q, v \in K^2$  und  $v \neq 0$  eine beliebige Gerade in  $\mathbf{G}_K$ . Wir definieren eine Abbildung  $\varphi : K^2 \rightarrow K^2$  durch

$$\varphi(P) := M \cdot P + A \quad \text{mit } M := I_2 - \frac{2}{\|v\|^2} v^\perp \cdot {}^t v^\perp \quad \text{und} \quad A = 2 \frac{\langle Q | v^\perp \rangle}{\|v\|^2} v^\perp.$$

Es ist

$${}^t M \cdot M = M^2 = I_2 - \frac{4}{\|v\|^2} v^\perp \cdot {}^t v^\perp + \frac{4}{\|v\|^4} (v^\perp \cdot {}^t v^\perp) \cdot (v^\perp \cdot {}^t v^\perp) = I_2,$$

d.h.  $M \in O_2(K)$ , also ist  $\varphi$  eine Bewegung. Ein beliebiger Punkt  $P \in K^2$  lässt sich schreiben als  $P = Q + \lambda v + \mu v^\perp$  mit  $\lambda, \mu \in K$ . In dieser Sprache lässt sich  $\varphi$  wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi(Q + \lambda v + \mu v^\perp) &= \left( I_2 - \frac{2}{\|v\|^2} v^\perp \cdot {}^t v^\perp \right) \cdot (Q + \lambda v + \mu v^\perp) + 2 \frac{\langle Q | v^\perp \rangle}{\|v\|^2} v^\perp \\ &= (Q + \lambda v + \mu v^\perp) - \frac{2}{\|v\|^2} (\langle Q | v^\perp \rangle v^\perp + 0 + \mu \|v\|^2 v^\perp) + 2 \frac{\langle Q | v^\perp \rangle}{\|v\|^2} v^\perp \\ &= Q + \lambda v + \left( \mu - 2 \frac{\langle Q | v^\perp \rangle}{\|v\|^2} - 2\mu + 2 \frac{\langle Q | v^\perp \rangle}{\|v\|^2} \right) v^\perp \\ &= Q + \lambda v - \mu v^\perp. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort  $\varphi(P) = P$  für alle  $P \in g$ . Außerdem gilt für ein beliebiges  $P = Q + \lambda v + \mu v^\perp$  aus  $K^2 \setminus g$

$$\langle \varphi(P) - Q | v^\perp \rangle = \langle \lambda v - \mu v^\perp | v^\perp \rangle = -\mu \|v\|^2 = \dots = -\langle P - Q | v^\perp \rangle,$$

so dass nach Proposition 2.9 die Punkte  $P$  und  $\varphi(P)$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen. Es folgt (gvB) (iii).  $\square$

Insgesamt haben wir folgendes gezeigt:

**Satz 4.13** Sei  $K$  ein pythagoräischer Teilkörper von  $\mathbb{R}$ . Dann ist die affine Koordinatenebene  $(K^2, \mathbf{G}_K, \star, \cong, \simeq)$  eine Hilbertebene.

## §5 Geometrie in Hilbertebenen

In Hilbertebenen ist recht viel von der aus der Schule bekannten Geometrie bereits möglich, und es wird Zeit, dass wir nach all diesen Definitionen ein wenig innehalten und ein paar Resultate zeigen. Sei in diesem Abschnitt stets  $\mathbb{H} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  eine Hilbertebene.

### §5.1 Das vierte Euklidische Postulat

Wir beginnen damit, dass wir Winkel in Hilbertebenen noch etwas genauer studieren. Wir werden Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel definieren und Euklids viertes Postulat zeigen, dass nämlich je zwei rechte Winkel zueinander kongruent sind.

**Definition 5.1** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien weiter  $B', C' \in \mathbf{P}$  mit  $B' \star A \star B$  und  $C' \star A \star C$ . Dann heißen  $\angle BAC'$  und  $\angle B'AC$  **Ergänzungswinkel** zu  $\angle BAC$ . Der Winkel  $\angle B'AC'$  heißt der **Gegenwinkel** von  $\angle BAC$ .

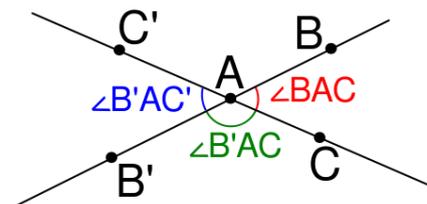


Abbildung II.18: Der ursprüngliche Winkel, ein Ergänzungswinkel und der Gegenwinkel.

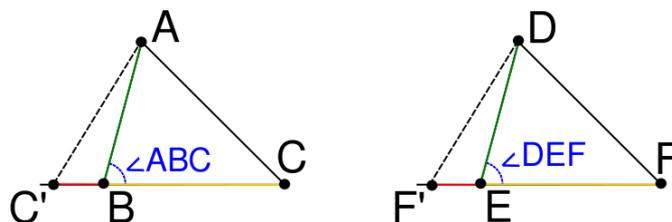
**Proposition 5.2** Seien  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$  Dreiecke und  $C', F' \in \mathbf{P}$  derart, dass  $\angle ABC'$  und  $\angle DEF'$  Ergänzungswinkel zu  $\angle ABC$  bzw.  $\angle DEF$  sind. Dann gilt

$$\angle ABC \simeq \angle DEF \implies \angle ABC' \simeq \angle DEF'.$$

*Beweis.* Indem wir gegebenenfalls die Punkte  $D, F, F'$  durch andere Punkte auf dem jeweils gleichen von  $E$  ausgehenden Strahl ersetzen, können wir ohne Einschränkung

$$\overline{ED} \cong \overline{BA}, \quad \overline{EF} \cong \overline{BC} \quad \text{und} \quad \overline{EF'} \cong \overline{BC'}$$

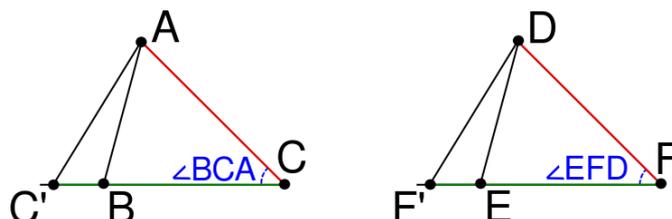
annehmen. Dies ist möglich nach  $(K_2)$ .



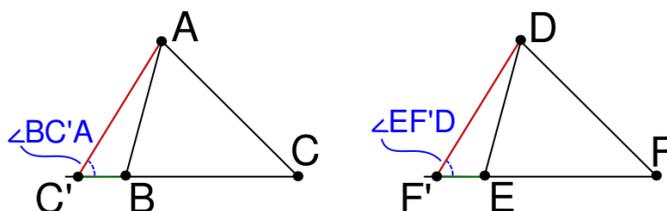
Nach dem SWS-Kriterium folgt dann aus  $\angle ABC \simeq \angle DEF$  die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$ , insbesondere also auch die Kongruenz der Winkel  $\angle BCA$  und  $\angle EFD$ . Andererseits gelten

$$C' \star B \star C, \quad F' \star E \star F, \quad \overline{C'B} \cong \overline{F'E} \quad \text{und} \quad \overline{BC} \cong \overline{EF},$$

so dass nach  $(K_3)$  auch  $\overline{C'C} \cong \overline{F'F}$  gilt.



Wir können also wieder das SWS-Kriterium anwenden und erhalten die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle ACC'$  und  $\triangle DFF'$ . Hieraus folgen sofort die Kongruenz der Strecken  $\overline{AC'}$  und  $\overline{DF'}$  und die Kongruenz der Winkel  $\angle AC'B$  und  $\angle DF'E$ .



Ein letztes Mal können wir das SWS-Kriterium anwenden und erhalten die Kongruenz von Dreiecken  $\triangle ABC' \cong \triangle DEF'$ , was insbesondere die Proposition beweist.  $\square$

**Proposition 5.3** Seien  $A, B, B', C, C' \in \mathbf{P}$  derart, dass  $\angle BAC$  und  $\angle B'AC'$  Gegenwinkel sind. Dann gilt  $\angle BAC \simeq \angle B'AC'$ ; Gegenwinkel sind also stets kongruent.

*Beweis.* Nach Voraussetzung sind  $\angle BAC$  und  $\angle BAC'$  Ergänzungswinkel, genauso  $\angle B'AC'$  und  $\angle BAC'$ . Wenn wir Proposition 5.2 auf die Situation  $\angle BAC' \simeq \angle BAC'$  anwenden, folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 5.4** Seien  $A, B, B', C, C' \in \mathbf{P}$  derart, dass  $\angle BAC'$  und  $\angle B'AC$  Ergänzungswinkel zu  $\angle BAC$  sind. Dann gilt  $\angle B'AC \simeq \angle BAC'$ ; die Ergänzungswinkel zu einem festen Winkel sind also kongruent zueinander.

*Beweis.* Die Behauptung folgt sofort aus der Proposition, da  $\angle B'AC$  und  $\angle BAC'$  Gegenwinkel sind.  $\square$

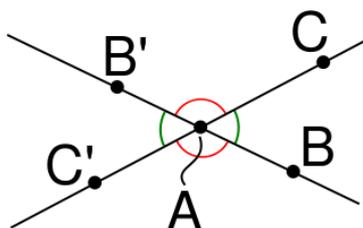


Abbildung II.19: Schneiden sich zwei Geraden in einem **Winkel**, so ist dieser zu seinem **Gegenwinkel** kongruent. Ebenfalls kongruent (zueinander) sind seine beiden **Ergänzungswinkel**.

**Definition 5.5** In einer Hilbertebene  $\mathbb{H}$  heißt  $\alpha \in \mathbf{W}$  genau dann ein **rechter Winkel**, wenn  $\alpha$  zu einem seiner Ergänzungswinkel kongruent ist.

Nach dem gerade Gezeigten und wegen der Transitivität der Kongruenz ist dies offensichtlich genau dann der Fall, wenn  $\alpha$  kongruent zu allen seinen Ergänzungswinkeln ist.

**Proposition 5.6** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$  zwei Winkel. Dann gilt: Ist  $\alpha$  ein rechter Winkel, und sind  $\alpha$  und  $\beta$  kongruent, so ist auch  $\beta$  rechter Winkel. Insbesondere ist jeder Ergänzungswinkel eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel.

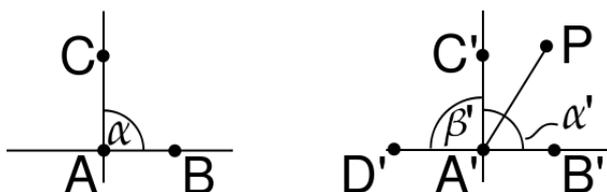
*Beweis.* Sei  $\alpha'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\alpha$ , und sei  $\beta'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\beta$ . Aus  $\alpha \simeq \beta$  folgt mit Proposition 5.2 und ggf. dem Korollar von Proposition 5.3, dass auch  $\alpha'$  und  $\beta'$  zueinander kongruent sind. Da  $\alpha$  ein rechter Winkel ist, folgt

$$\beta \simeq \alpha \simeq \alpha' \simeq \beta'$$

und somit die Behauptung. □

**Satz 5.7 (Viertes Euklidisches Postulat)** In einer Hilbertebene sind je zwei rechte Winkel zueinander kongruent.

*Beweis.* Seien  $\alpha = \angle BAC$  und  $\alpha' = \angle B'A'C'$  zwei nicht kongruente rechte Winkel. Dann gilt  $\alpha < \alpha'$  oder  $\alpha' < \alpha$ ; ohne Einschränkung ersteres. Es existiert also ein Strahl  $\overrightarrow{A'P}$  zwischen  $\overrightarrow{A'B'}$  und  $\overrightarrow{A'C'}$  mit  $\angle PA'B' \simeq \alpha$ .



Sei nun  $\beta' = \angle C'A'D'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\alpha'$ .

**Übung** Dann liegt  $\overrightarrow{A'C'}$  zwischen  $\overrightarrow{A'D'}$  und  $\overrightarrow{A'P}$ .

Daraus folgt sofort  $\beta' < \angle PA'D'$ . Weiter ist  $\angle PA'D'$  Ergänzungswinkel zu  $\angle PA'B' \simeq \alpha$ , so dass nach dem Korollar von Proposition 5.3 jeder Ergänzungswinkel  $\beta$  von  $\alpha$  kongruent zu  $\angle PA'D'$  ist. Es folgt  $\beta' < \beta$ . Andererseits folgt aus der Rechtwinkligkeit von  $\alpha$  und  $\alpha'$

$$\beta \simeq \alpha < \alpha' \simeq \beta',$$

also  $\beta < \beta'$ , was nicht sein kann. □

Proposition 5.6 und der Satz lassen sich zusammenfassen zu

**Korollar 5.8** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene. Dann bilden die rechten Winkel eine „ $\simeq$ “-Äquivalenzklasse in  $\mathbf{W}$ .

## §5.2 Orthogonalität und Parallelität

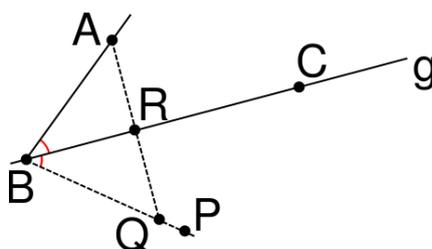
Unsere naive Vorstellung sagt uns, dass wir mit dem Begriff des rechten Winkels ein Kriterium für Parallelität angeben können sollten. Dies soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

**Definition 5.9** In einer Hilbertebene heißen zwei Geraden  $g, h \in \mathbf{G}$  genau dann **orthogonal**, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden (also  $g \nparallel h$ ) und einer der gebildeten Winkel ein rechter Winkel ist. Sind  $g$  und  $h$  orthogonal aufeinander, so schreiben wir  $g \perp h$ .

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts ist dies genau dann der Fall, wenn alle gebildeten Winkel rechte Winkel sind.

**Satz 5.10** Seien  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade und  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt. Dann gibt es eine Gerade durch  $A$ , die orthogonal auf  $g$  ist.<sup>3</sup>

**Beweis. Fall 1:**  $A \notin g$ . Nach  $(I_2)$  gibt es zwei Punkte  $B \neq C \in g$ . Weiter gibt es nach  $(K_5)$  auf der Seite von  $g$ , auf der  $A$  nicht liegt, genau einen Strahl  $\overrightarrow{BP}$  mit  $\angle PBC \simeq \angle ABC$ . Nach  $(K_2)$  gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt  $Q$  auf  $\overrightarrow{BP}$  mit  $\overline{BQ} \cong \overline{BA}$ . Da  $A$  und  $Q$  nach Konstruktion auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen, gibt es einen Punkt  $R \in g$  mit  $A \star R \star Q$ .



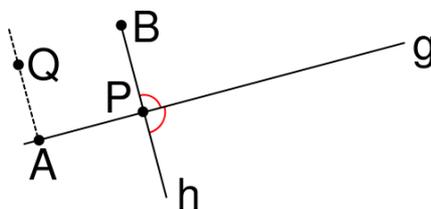
<sup>3</sup>Der Satz macht nur eine Aussage über die Existenz, nicht jedoch über die Eindeutigkeit. Diese zeigen wir später noch.

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass der Winkel  $\angle ARC$  kongruent zu seinem Ergänzungswinkel  $\angle QRC$  ist. Nach Definition ist er dann ein rechter Winkel, und mit  $A \vee Q$  ist eine auf  $g$  orthogonale Gerade gefunden. Im Fall  $R = B$  gilt einfach  $\angle QRC = \angle PBC \simeq \angle ABC = \angle ARC$ . Sind andererseits  $R$  und  $B$  verschieden, so erhalten wir mit dem SWS-Kriterium  $\triangle ABR \simeq \triangle QBR$ ,

denn: Nach Konstruktion gelten  $\overline{BA} \simeq \overline{BQ}$  und  $\overline{BR} \simeq \overline{BR}$ . Es bleibt  $\angle ABR \simeq \angle QBR$  zu zeigen. Im Fall  $B \star R \star C$  folgt dies direkt aus  $\angle ABR = \angle ABC \simeq \angle PBC = \angle QBR$ . Im Fall  $R \star B \star C$  gilt zu beachten, dass  $\angle ABC$  und  $\angle ABR$  bzw.  $\angle QBC$  und  $\angle QBR$  Ergänzungswinkel sind. Aus  $\angle ABC \simeq \angle QBC$  folgt somit nach Proposition 5.2, dass auch  $\angle ABR$  und  $\angle QBR$  kongruent sind. #

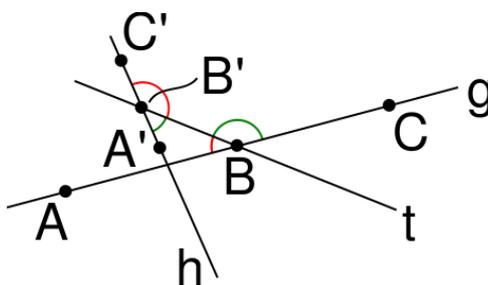
Die gesuchte Kongruenz  $\angle ARB \simeq \angle QRB$  folgt hieraus direkt.

**Fall 2:**  $A \in g$ . Nach  $(I_3)$  gibt es ein  $B \in \mathbf{P} \setminus g$ , und nach Fall 1 dann auch eine Gerade  $h$  durch  $B$ , die orthogonal auf  $g$  steht. Sei  $P$  der Geradenschnittpunkt  $g \wedge h$ .



Falls bereits  $P = A$  gilt, sind wir fertig. Ansonsten ist nach Konstruktion  $\angle BPA$  ein rechter Winkel. Andererseits gibt es nach  $(K_5)$  auf derselben Seite von  $g$  wie  $B$  einen Strahl  $\overrightarrow{AQ}$  mit  $\angle BPA \simeq \angle QAP$ . Da die rechten Winkel ein Kongruenzklasse bilden, ist also  $\angle QAP$  ein rechter Winkel und  $Q \vee A$  die gesuchte orthogonale Gerade.  $\square$

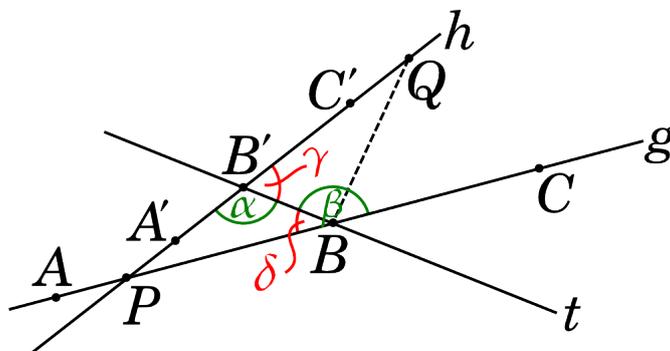
**Definition 5.11** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene, und seien  $g, h \in \mathbf{G}$ . Eine Gerade  $t \in \mathbf{G}$  heißt eine **Transversale** zu  $g$  und  $h$ , falls sie die Geraden  $g$  und  $h$  jeweils genau einmal schneidet und diese Schnittpunkte voneinander verschieden sind.



Setzen wir  $B := g \wedge t$  und  $B' := h \wedge t$ , und wählen wir weiter Punkte  $A, C \in g$  und  $A', C' \in h$  mit  $A \star B \star C$  und  $A' \star B' \star C'$ , so dass  $A$  und  $A'$  auf derselben Seite von  $t$  liegen, dann heißen  $\angle ABB'$  und  $\angle C'B'B$  bzw.  $\angle A'B'B$  und  $\angle CBB'$  Paare von **Wechselwinkeln**.

**Satz 5.12 (Schwacher Wechselwinkelsatz)** Haben in einer Hilbertebene zwei von einer Transversalen geschnittene Geraden ein Paar kongruenter Wechselwinkel, so sind sie parallel.

*Beweis.* Wir benutzen die Notation aus der Definition und setzen  $\alpha := \angle A'B'B$ ,  $\beta := \angle CBB'$ ,  $\gamma := \angle C'B'B$  und  $\delta := \angle ABB'$ . Nach Annahme und Proposition 5.2 gelten  $\alpha \simeq \beta$  und  $\gamma \simeq \delta$ .



Wir nehmen nun an,  $g$  und  $h$  seien nicht parallel und schnitten sich also in genau einem Punkt  $P \in \mathbf{P}$ . Ohne Einschränkung liegt  $P$  dann auf derselben Seite von  $t$  wie  $A$  und  $A'$ ; sonst ersetze man  $\alpha$  und  $\beta$  durch ihre Ergänzungswinkel.

Nach  $(K_2)$  können wir die Strecke  $\overline{BP}$  in einem Punkt  $Q$  auf den Strahl  $\overrightarrow{B'C'}$  abtragen. Nach dem SWS-Kriterium ist dann  $\triangle B'BP \cong \triangle BB'Q$ , insbesondere gilt  $\beta \simeq \alpha \simeq \angle QBB'$ .

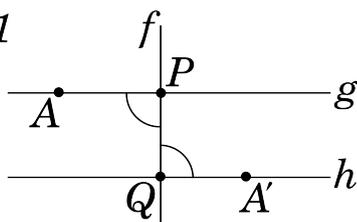
Nach Konstruktion liegen  $Q$  und  $C$  auf derselben Seite von  $t$ . Mit  $(K_5)$  folgt  $Q \in \overrightarrow{BC} \subseteq g$ , was ein Widerspruch dazu ist, dass  $P$  der einzige Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  ist. Die beiden Geraden sind also parallel.  $\square$

**Korollar 5.13** Seien  $f, g, h \in \mathbf{G}$  mit  $g \perp f$  und  $h \perp f$ . Dann gilt  $g \parallel h$ .

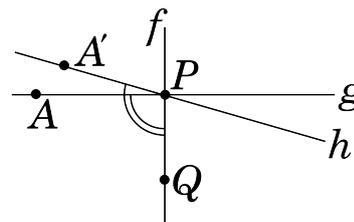
*Beweis. Fall 1:  $f$  Transversale zu  $g$  und  $h$ .* Sei  $P := f \wedge g$  und  $Q := f \wedge h$ . Seien außerdem  $A \in g$  und  $A' \in h$  auf verschiedenen Seiten von  $f$ . Dann sind die Winkel  $\angle APQ$  und  $\angle PQA'$  Wechselwinkel. Wegen  $g \perp f$  und  $h \perp f$  sind sie aber auch beide rechte Winkel und somit nach dem vierten Euklidischen Postulat zueinander kongruent. Die Behauptung folgt mit dem Schwachen Wechselwinkelsatz 5.12.

**Fall 2:  $f, g, h$  haben einen gemeinsamen Schnittpunkt  $P$ .** Seien  $A \in g$  und  $A' \in h$  auf derselben Seite von  $f$  und  $Q \neq P$  ein weiterer Punkt auf  $f$ . Dann sind die Winkel  $\angle APQ$  und  $\angle A'PQ$  beides rechte Winkel und somit nach dem Vierten Euklidischen Postulat kongruent. Nach  $(K_5)$  liegt also  $A'$  auf  $\overrightarrow{PA}$ , so dass  $h = P \vee A' = P \vee A = g$  und insbesondere  $g \parallel h$  folgt.

*Fall 1*



*Fall 2*



□

**Korollar 5.14** Seien  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade und  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade  $h$  durch  $A$ , die orthogonal zu  $g$  ist. Diese heißt das **Lot** von  $A$  auf  $g$ .  $h \wedge g$  heißt der **Lotfußpunkt**.

*Beweis.* Die Existenz des Lots haben wir bereits in Satz 5.10 gezeigt. Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei Geraden  $h, h' \in \mathbf{G}$ , die beide durch  $A$  gehen und beide orthogonal auf  $g$  stehen. Aus dem vorigen Korollar folgt  $h \parallel h'$ , was wegen  $A \in h \cap h'$  sofort  $h = h'$  impliziert. □

**Korollar 5.15** Seien  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade und  $A \in \mathbf{P}$  ein Punkt. Dann gibt es eine Gerade  $h \in \mathbf{G}$  durch  $A$  mit  $g \parallel h$ .

*Beweis.* Sei  $f$  das Lot von  $A$  auf  $g$  und  $h$  das Lot von  $A$  auf  $f$ . Dann ist  $f \perp g$  und  $f \perp h$ , woraus mit 5.13 sofort  $g \parallel h$  folgt. □

### §5.3 Das SSS-Kriterium

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist, ein weiteres Kriterium für die Kongruenz von Dreiecken zu zeigen. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Propositionen.

**Proposition 5.16** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage und  $A' \neq B' \in \mathbf{P}$  zwei verschiedene Punkte mit  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ . Dann gibt es auf jeder Seite von  $A' \vee B'$  genau einen Punkt  $C'$  mit  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

*Beweis.* Wir wählen fest eine Seite von  $A' \vee B'$  aus. Nach  $(K_5)$  gibt es auf dieser Seite genau einen Strahl  $\overrightarrow{A'P}$  mit  $\angle CAB \simeq \angle PA'B'$ . Weiter gibt es nach  $(K_2)$  genau einen Punkt  $C'$  auf diesem Strahl mit  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ . Nach dem SWS-Kriterium sind die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  kongruent. □

**Proposition 5.17** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Genau dann wenn  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  gilt, so auch  $\angle ABC \simeq \angle ACB$ . In diesem Fall nennt man das Dreieck  $\triangle ABC$  **gleichschenkelig**, die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  seine **Schenkel** und die Strecke  $\overline{BC}$  seine **Basis**.

*Beweis.* Dass aus der Kongruenz der Strecken die Kongruenz der Winkel folgt, sehen wir sofort durch Anwenden des SWS-Kriteriums auf die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle ACB$ .

Gelte nun umgekehrt  $\angle ABC \simeq \angle ACB$ . Angenommen, es gälte  $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$ . Dann hätten wir entweder  $\overline{AB} < \overline{AC}$  oder  $\overline{AB} > \overline{AC}$ . Da die beiden Fälle symmetrisch sind, können wir ohne Einschränkung  $\overline{AB} > \overline{AC}$  annehmen. Dann gibt es ein  $D \in \overline{AB}$  mit  $\overline{DB} \cong \overline{AC}$  und insbesondere  $A \star D \star B$ . Nach Konstruktion liegt daher  $D$  im Inneren von  $\angle BCA$ . Da  $D$  auf  $\overline{AB}$  liegt, gilt aber andererseits  $\angle ABC = \angle DBC$ . Mit dem (SWS)-Kriterium gilt  $\triangle DBC \cong \triangle ACB$  und

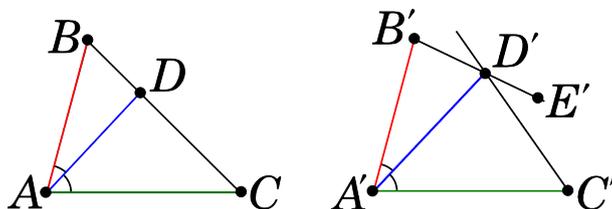
insbesondere  $\angle DCB \simeq \angle ACB$ . Das ist ein Widerspruch dazu, dass  $D$  im Inneren von  $\angle ACB$  liegt.  $\square$

**Übung** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Falls  $D$  ein Punkt im Inneren von  $\angle BAC$  ist, so trifft der Strahl  $\overrightarrow{AD}$  die Strecke  $\overline{BC}$ .

**Hinweis:** Wählen Sie einen Punkt  $E$  auf  $A \vee C$  mit  $E \star A \star C$  und wenden Sie den Satz von Pasch auf die drei Punkte  $E, C, B$  an. Nun müssen Sie noch  $(A_4)$  nutzen, um unerwünschte Möglichkeiten für die Schnittpunkte auszuschließen.

**Proposition 5.18 (Summen kongruenter Winkel sind kongruent)** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei  $D$  ein Punkt im Inneren von  $\angle BAC$ . Seien weiter  $A', B', C', D'$  vier Punkte mit  $\angle B'A'D' \simeq \angle BAD$  und  $\angle D'A'C' \simeq \angle DAC$ , so dass die Strahlen  $\overrightarrow{A'B'}$  und  $\overrightarrow{A'C'}$  auf verschiedenen Seiten von  $A' \vee D'$  liegen. Dann sind die Punkte  $A', B', C'$  in allgemeiner Lage, es gilt  $\angle B'A'C' \simeq \angle BAC$ , und  $D'$  liegt im Inneren von  $\angle B'A'C'$ .

*Beweis.* Nach der obigen Übung schneidet der Strahl  $\overrightarrow{AD}$  die Strecke  $\overline{BC}$ . Indem wir  $D$  durch diesen Schnittpunkt ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $B \star D \star C$  gilt. Weiter können wir nach  $(K_2)$  die Punkte  $B', C', D'$  jeweils durch Punkte auf demselben Strahl aus  $A'$  ersetzen, so dass  $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ ,  $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$  und  $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$  gilt. Nach Annahme gelten außerdem  $\angle BAD \simeq \angle B'A'D'$  und  $\angle D'A'C' \simeq \angle DAC$ . Nach dem SWS-Kriterium sind dann die Dreiecke  $\triangle BAD$  und  $\triangle B'A'D'$  bzw.  $\triangle DAC$  und  $\triangle D'A'C'$  kongruent.



Sei nun  $E'$  ein Punkt auf der Geraden  $B' \vee D'$  mit  $B' \star D' \star E'$ ; so etwas gibt es nach  $(A_2)$ . Dann ist  $\angle A'D'E'$  ein Ergänzungswinkel zu  $\angle A'D'B' \simeq \angle ADB$ . Andererseits ist  $\angle ADC$  ein Ergänzungswinkel zu  $\angle ADB$ , so dass mit Proposition 5.2 die Kongruenz  $\angle A'D'E' \simeq \angle ADC \simeq \angle A'D'C'$  folgt.

Da  $C'$  und  $B'$  auf verschiedenen Seiten von  $A' \vee D'$  liegen und  $B'$  und  $E'$  ebenso, liegen nach  $(A_4)$  die Punkte  $C'$  und  $E'$  auf derselben Seite von  $A' \vee D'$ . Nach  $(K_5)$  sind daher die Winkel  $\angle A'D'E'$  und  $\angle A'D'C'$  sogar identisch. Insbesondere gilt  $B' \star D' \star C'$ .

Da wir mit der Kongruenz der Dreiecke schon vorhin  $\overline{B'D'} \cong \overline{BD}$  und  $\overline{D'C'} \cong \overline{DC}$  eingesehen hatten, folgt mit  $(K_3)$  die Kongruenz  $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$ . Weiter hatten wir schon  $\angle A'C'B' \simeq \angle A'C'D' \simeq \angle ACD \simeq \angle ACB$  erkannt und  $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$  vorausgesetzt. Mit dem SWS-Kriterium folgt somit die Kongruenz der Dreiecke  $\triangle A'B'C'$  und  $\triangle ABC$  und insbesondere die Behauptung.  $\square$

**Korollar 5.19** Seien  $A, B, C \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei  $D$  ein Punkt im Inneren von  $\angle BAC$ . Seien weiter  $A', B', C' \in \mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage, und sei  $D'$  ein Punkt im Inneren von  $\angle B'A'C'$ . Wir setzen  $\alpha := \angle DAB$ ,  $\beta := \angle DAC$ ,  $\gamma := \angle BAC$ ,  $\alpha' := \angle D'A'B'$ ,  $\beta' := \angle D'A'C'$ ,  $\gamma' := \angle B'A'C'$ . Dann gilt:

- (a)  $\alpha \simeq \alpha'$  und  $\beta \simeq \beta' \implies \gamma \simeq \gamma'$ ,  
 (b)  $\alpha \simeq \alpha'$  und  $\gamma \simeq \gamma' \implies \beta \simeq \beta'$ .

d.h. die Kongruenz von zwei Paaren von beteiligten Winkeln impliziert die Kongruenz des dritten Paares.

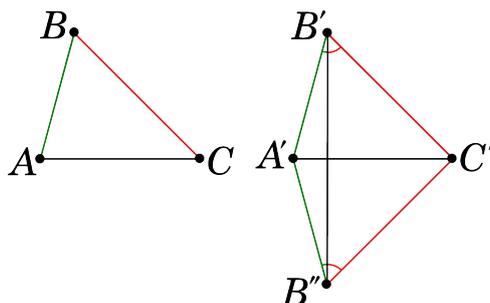
*Beweis.* Aussage (a) folgt unmittelbar aus Proposition 5.18. Zum Nachweis von (b) seien also  $\alpha \simeq \alpha'$  und  $\gamma \simeq \gamma'$ . Aufgrund von (K5) existiert in der Seite von  $A' \vee D'$ , in der der Punkt  $C'$  liegt, ein Strahl  $\overrightarrow{A'C''}$  mit  $\angle D'A'C'' \simeq \beta$ . Aus Proposition 5.18 erhalten wir wegen  $\alpha' \simeq \alpha$ , dass  $\angle B'A'C'' \simeq \gamma$  ist. Das impliziert  $\angle B'A'C' = \gamma' \simeq \gamma \simeq \angle B'A'C''$  und somit  $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ . Daraus ergibt sich  $\beta \simeq \angle D'A'C'' \simeq \angle D'A'C' = \beta'$ .  $\square$

**Satz 5.20 (SSS-Kriterium)** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene, und seien  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  je drei Punkte in allgemeiner Lage mit

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'},$$

so sind die beiden Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  kongruent.

*Beweis.* Nach Proposition 5.16 gibt es auf der  $B'$  gegenüberliegenden Seite von  $A' \vee C'$  genau einen Punkt  $B''$  mit  $\triangle A'B''C' \cong \triangle ABC$ . Wir setzen  $P := (A' \vee C') \wedge (B' \vee B'')$ .



In Abhängigkeit von der Lage von  $P$  auf der Geraden  $A' \vee C'$  ergeben sich verschiedene Fälle:

- $P = A'$ : In diesem Fall sind die Punkte  $A', B', B''$  kollinear, weswegen die Punkte  $C', B', B''$  in allgemeiner Lage sind (andernfalls wären  $A', B', C'$  kollinear). Aufgrund von  $\overline{C'B'} \cong \overline{C'B''}$  ist das Dreieck  $\triangle C'B'B''$  gleichschenkelig. Nach Proposition 5.17 sind daher insbesondere die Winkel  $\angle C'B'B'' = \angle C'B'A'$  und  $\angle C'B''B' = \angle C'B''A'$  kongruent. Das reicht, um mit dem SWS-Kriterium die Kongruenz von Dreiecken  $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C' \cong \triangle A'B'C'$  folgern zu können.

- $P = C'$ : Die Argumentation läuft analog zum ersten Fall.
- $A' * P * C'$ : Analog zu oben sind die Dreiecke  $\triangle C'B'B''$  und  $\triangle A'B'B''$  gleichschenkelig, woraus mit 5.17 die Kongruenzen  $\angle C'B'P \simeq \angle C'B''P$  und  $\angle A'B'P \simeq \angle A'B''P$  folgen. Mittels Korollar 5.19(a) erhalten wir  $\angle C'B'A' \simeq \angle C'B''A'$ , was mit Hilfe des SWS-Kriteriums die Behauptung impliziert.
- $P * A' * C'$  oder  $A' * C' * P$ : Die Argumentation verläuft analog zum vorangegangenen Fall, nur dass wir diesmal zum Nachweis der Kongruenz der Winkel  $\angle C'B'A'$  und  $\angle C'B''A'$  Korollar 5.19(b) verwenden.

## §6 Euklidische Ebenen

Wir haben gesehen, dass man in Hilbertebenen schon recht viel Geometrie betreiben kann. Ohne Kreise ist jedoch die klassische Geometrie nicht vorstellbar. Diese einzuführen wollen wir nun nachholen. Sei dafür in diesem Abschnitt  $\mathbb{H} = (\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$  wieder eine Hilbertebene.

**Definition 6.1** Seien  $M, A \in \mathbf{P}$  zwei verschiedene Punkte. Dann heißt

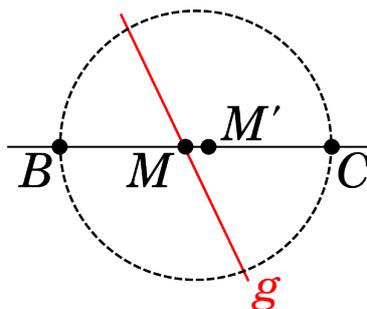
$$K(M, A) := \{P \in \mathbf{P} \mid \overline{MA} \cong \overline{MP}\}$$

der Kreis mit **Mittelpunkt**  $M$  und **Radius**  $\overline{MA}$ .

Aus der Definition können wir direkt ablesen, dass ein beliebiger Kreis  $K(M, A)$  Punkte hat:  $A$  liegt auf dem Kreis, und auf jedem Strahl aus  $M$  können wir eindeutig den Radius abtragen. Insbesondere schneidet jede Gerade durch den Mittelpunkt den Kreis in genau zwei Punkten. Nicht klar ist, dass der Mittelpunkt eines Kreises schon mit den Axiomen einer Hilbertebene eindeutig ist.

**Proposition 6.2** Ist  $K \subseteq \mathbf{P}$  ein Kreis, so hat  $K$  genau einen Mittelpunkt.

*Beweis.* Seien  $A \in K$ , und seien  $M \neq M'$  zwei Mittelpunkte von  $K$ , so dass wir  $K = K(M, A) = K(M', A)$  schreiben können. Nach der obigen Überlegung schneidet die Gerade  $M \vee M'$  den Kreis  $K$  in genau zwei Punkten, die wir  $B$  und  $C$  nennen wollen. Diese erfüllen einerseits  $B \star M \star C$  und  $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ , andererseits  $B \star M' \star C$  und  $\overline{BM'} \cong \overline{M'C}$ .



Ohne Einschränkung können wir  $B \star M \star M'$  annehmen. Nach Proposition 1.9 gibt es eine von  $M \vee M'$  verschiedene Gerade  $g$  durch  $M$ . Nach Konstruktion liegen dann  $B$  und  $M'$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ . Wegen  $B \star M \star C$  liegen also  $C$  und  $M'$  auf derselben Seite von  $g$ . Wegen der Kollinearität von  $M, M', C$  gilt also entweder  $M \star M' \star C$  oder  $M \star C \star M'$ . Letzteres kann aber nicht sein, da dann mit Proposition 2.11 auch  $B \star C \star M'$  gälte, was  $\overline{BM'} > \overline{CM'}$  impliziert im Widerspruch zur Annahme, dass  $B$  und  $C$  beide in  $K(M', A)$  liegen.

Es gelten also  $B \star M \star M'$  und  $M \star M' \star C$ , was  $\overline{BM} < \overline{BM'} \cong \overline{M'C} < \overline{MC}$  impliziert. Das steht im Widerspruch dazu, dass  $B$  und  $C$  beide in  $K(M, A)$  liegen.  $K$  kann also nur einen Mittelpunkt haben.  $\square$

So wie wir Geraden mit Geraden oder Geraden mit Kreisen schneiden können, wollen wir auch die Schnittpunkte von zwei Kreisen bestimmen. In unserer naiven Vorstellung der euklidischen Geometrie schneiden sich zwei Kreise genau dann, wenn einer von ihnen Punkte „innerhalb“ und „außerhalb“ des anderen hat. Es ist aber nicht klar, dass in jeder Hilbertebene ein solcher Schnittpunkt auch tatsächlich existiert. Die einfachste Möglichkeit, dieses Problem zu beheben, ist sicherlich, genau die Kreisschnitteigenschaft zu fordern. Wir wollen jedoch ein etwas stärkeres Axiom einführen, das noch ein weiteres Problem für uns löst, wie wir sehen werden.

Bevor wir das tun, machen wir noch geschwind präzise, was es für einen Punkt einer Hilbertebene heißt, „innerhalb“ bzw. „außerhalb“ eines Kreises zu liegen.

**Definition 6.3** Seien  $M \neq A \in \mathbf{P}$  und  $K = K(M, A)$ . Wir sagen, ein Punkt  $B \in \mathbf{P}$  liege **innerhalb** von  $K$ , falls  $B = M$  ist oder  $\overline{MB} < \overline{MA}$ . Ist  $\overline{MB} > \overline{MA}$ , so sagen wir,  $B$  liege **außerhalb** von  $K$ .

Unser Problem ist ja in gewisser Weise ein Problem der mangelnden Stetigkeit. Wollen wir ihm beikommen, sollten wir daher so etwas wie Stetigkeit erzwingen. Analog dem aus Analysis bekannten

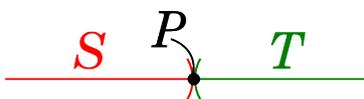
**Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen** Sei  $\mathbb{R} = \tilde{S} \cup \tilde{T}$  mit zwei nichtleeren Mengen  $\tilde{S}, \tilde{T}$ , so dass für alle Paare  $(s, t) \in \tilde{S} \times \tilde{T}$  die Ungleichung  $s < t$  gilt. Dann gibt es genau ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $s \leq r \leq t$  für alle Paare  $(s, t) \in \tilde{S} \times \tilde{T}$ .

formulieren wir also die folgende

**Definition 6.4** Eine Hilbertebene  $\mathbb{H}$  erfüllt das **Stetigkeitsaxiom**, wenn folgende Bedingung gilt. Falls sich eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  als disjunkte Vereinigung  $g = S \cup T$  zweier nichtleerer Mengen  $S, T \subseteq \mathbf{P}$  schreiben lässt, so dass kein Punkt von  $S$  zwischen zwei Punkten von  $T$  und kein Punkt von  $T$  zwischen zwei Punkten von  $S$  liegt, dann gibt es genau einen Punkt  $P \in \mathbf{P}$ , so dass für alle Paare  $(A, B) \in S \times T$  genau eine der folgenden drei Aussagen gilt:

$$A = P, \quad B = P \quad \text{oder} \quad A \star P \star B.$$

Wir schreiben dann kurz:  $\mathbb{H}$  erfüllt (S).



**Gegenbeispiel** In  $\mathbb{A}_2(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R})$  lässt sich die  $x$ -Achse schreiben als die disjunkte Vereinigung der Mengen  $S = \{(x, 0) \in (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R})^2 \mid x < \pi\}$  und  $T = \{(x, 0) \in (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R})^2 \mid x > \pi\}$ . Ein Punkt  $P$  wie im Stetigkeitsaxiom gefordert existiert aber nicht, da  $\pi$  transzendent ist und somit nicht in  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$  liegt.

**Satz 6.5** Die reell-affine Koordinatenebene  $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$  erfüllt (S).

*Beweis.* Wir betrachten eine Gerade  $g$ , die sich wie im Axiom gefordert als disjunkte Vereinigung  $g = S \cup T$  zweier nichtleerer Mengen  $S, T \subseteq \mathbf{P}$  schreiben lässt, so dass kein Punkt von  $S$  zwischen zwei Punkten von  $T$  und kein Punkt von  $T$  zwischen zwei Punkten von  $S$  liegt. Seien nun  $A \neq B \in g$ . Dann können wir  $g$  schreiben als  $g = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  und setzen

$$\tilde{S} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda A + (1 - \lambda)B \in S\} \quad \text{und} \quad \tilde{T} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda A + (1 - \lambda)B \in T\}.$$

Weil  $g$  die disjunkte Vereinigung von  $S$  und  $T$  ist, gilt hierbei  $\mathbb{R} = \tilde{S} \cup \tilde{T}$ . Nun sind entweder alle  $s \in \tilde{S}$  kleiner als alle  $t \in \tilde{T}$  oder umgekehrt,

denn: Sonst gibt es  $s_1, s_2 \in \tilde{S}$  und  $t_1, t_2 \in \tilde{T}$  mit  $s_1 > t_1$  und  $s_2 < t_2$ .

- Gilt nun  $t_1 > s_2$ , so haben wir  $s_1 > t_1 > s_2$ , und es folgt schnell, dass es einen Punkt von  $T$  gibt, der zwischen zwei Punkten von  $S$  liegt.
- Ist  $t_1 = s_2$ , so sind  $\tilde{S}$  und  $\tilde{T}$  und damit auch  $S$  und  $T$  nicht disjunkt.
- Gilt schließlich  $t_1 < s_2$ , so ergibt sich  $t_1 < s_2 < t_2$ , und wir sehen schnell ein, dass es einen Punkt von  $S$  gibt, der zwischen zwei Punkten von  $T$  liegt.

Da alle drei Möglichkeiten zu einem Widerspruch führen, muss die Behauptung gelten. #

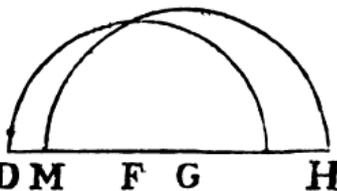
Nehmen wir ohne Einschränkung an, für alle  $s \in \tilde{S}$  und  $t \in \tilde{T}$  gelte  $s < t$ . Nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen gibt es genau  $r \in \mathbb{R}$  mit  $s \leq r \leq t$  für alle Paare  $(s, t) \in \tilde{S} \times \tilde{T}$ . Dies ist äquivalent dazu, dass genau ein  $R \in g$  existiert, so dass für alle Paare  $(A, B) \in S \times T$  genau eine der folgenden Aussagen gilt:

$$R = A, \quad R = B \quad \text{oder} \quad A \star R \star B.$$

Damit ist die Gültigkeit von (S) nachgewiesen. □

## PROP. XXII. B. I.

Some Authors blame Euclid because he does not demonstrate that the two circles made use of in the construction of this Problem must cut one another. but this is very plain from the determination he has given, viz. that any two of the straight lines DF, FG, GH must be greater than the third. for who is so dull, tho' only beginning to learn the Elements, as not to perceive that the circle described from the center F, at the distance FD, must meet FH betwixt F and H, because FD is less than FH; and that, for the like reason, the circle described from the center G, at the distance GH or GM must meet DG betwixt D and G; and



T 3

that

Digitized by Google

294

## NOTES.

Book I. that these circles must meet one another, because FD and GH are together greater than FG? and this determination is easier to be understood than that which Mr. Thomas Simpson derives from it, and puts instead of Euclid's, in the 49. page of his Elements of Geometry, that he may supply the omission he blames Euclid for; which determination is, that any of the three straight lines must be less than the sum, but greater than the difference of the other two. from this he shews the circles must meet one another, in one case; and says that it may be proved after the same manner in any other case. but the straight line GM which he bids take from GF may be greater than it, as in the figure here annexed, in which case his demonstration must be changed into another.

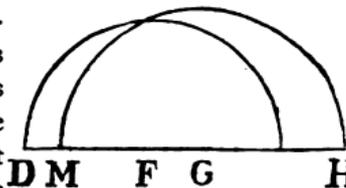


Abbildung II.20: Robert Simson hält das Thema des Durchschnitts zweier Kreise für trivial und wird deshalb hier ein wenig ausfallend. Einen Stetigkeitsbegriff wie Axiom (S) wurde zu seiner Zeit (1762) noch nicht verwendet. Quelle: [http://books.google.de/books/about/The\\_Elements\\_of\\_Euclid.html?id=FOE2AAAAMAAJ](http://books.google.de/books/about/The_Elements_of_Euclid.html?id=FOE2AAAAMAAJ)

Natürlich würden wir nun gerne die Früchte unserer Arbeit ernten und zeigen, dass das Stetigkeitsaxiom dazu führt, dass sich zwei Kreise in geeigneter Lage zueinander auch tatsächlich

schneiden.

**Satz 6.6** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene mit (S), und seien  $K, K' \subseteq \mathbf{P}$  Kreise, so dass  $K$  einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von  $K'$  besitzt. Dann schneiden sich  $K$  und  $K'$  in genau zwei Punkten.

Wir werden diese Aussage in §9 für den (zugegebenermaßen wichtigen) Spezialfall der reellen affinen Koordinatenebene beweisen. Daher betrachten wir hier zunächst nur eine andere Folgerung des Stetigkeitsaxioms. Dieses ist eher eine Messbarkeitsaussage und wird bisweilen auch als *Archimedisches Axiom* bezeichnet.

**Übung** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene, und seien  $A \neq B$  und  $A' \neq B'$  beliebige Punkte darin. Seien induktiv für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  die Punkte  $A'_k$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$  durch folgende Vorschrift eindeutig bestimmt:

- $A'_0 := A'$ ,
- $A'_1$  ist der eindeutige Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$  mit  $\overline{A'_0A'_1} \cong \overline{AB}$ ,
- für alle natürlichen  $k > 1$  ist  $A'_k$  der eindeutige Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{A'B'}$  mit  $\overline{A'_kA'_{k-1}} \cong \overline{AB}$  und  $A'_{k-2} \star A'_{k-1} \star A'_k$ .

Ist das Stetigkeitsaxiom (S) erfüllt, so gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , für die entweder  $A'_n = B'$  oder  $A' \star B' \star A'_n$  gilt.

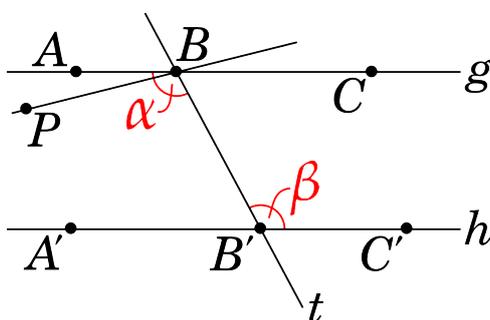
Wir haben nun genügend Axiome eingeführt, um alle bei Euklid vorkommenden Propositionen zu zeigen. Das wollen wir durch folgende Definition festhalten.

**Definition 6.7** Eine Hilbertebene  $\mathbb{H}$ , die das Stetigkeitsaxiom (S) und das (starke) Parallelenaxiom (P) erfüllt, heißt *Euklidische Ebene*.

Zu dieser Definition sei angemerkt, dass wir das starke Parallelenaxiom (P) auch durch das schwache Parallelenaxiom (p) ersetzen können, da wir am Ende von Abschnitt §5.2 in einer Übung gezeigt haben, dass es in Hilbertebenen für beliebige Geraden  $g$  und Punkte  $A$  immer eine Gerade  $h$  mit  $A \in h$  und  $h \parallel g$  gibt. Dass (P) zu den übrigen Axiomen der Euklidischen Ebene unabhängig ist, war, wie bereits im ersten Kapitel erläutert, lange Jahre umstritten. Erst Beltrami gelang 1868 ein rigoroser Beweis, indem er das Beltramimodell der hyperbolischen Ebene einführte. In Kapitel IV werden wir (skizzenartig) das Poincarémodell der hyperbolischen Ebene einführen und uns die Unabhängigkeit so veranschaulichen. Je nach Geschmack kann das Parallelenaxiom allerdings auch noch durch den Wechselwinkelsatz ersetzt werden, zu dem es äquivalent ist, wie wir nun einsehen wollen.

**Satz 6.8 (Wechselwinkelsatz)** Sei  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene mit (P). Seien  $g \parallel h \in \mathbf{G}$  zwei parallele Geraden und  $t \in \mathbf{G}$  eine Transversale zu  $g, h$ . Dann haben  $g, h$  bezüglich  $t$  zwei Paare kongruenter Wechselwinkel.

*Beweis.* Wir benennen  $B := t \wedge g$  und  $B' := t \wedge h$ . Außerdem wählen wir Punkte  $A, C \in g$  mit  $A \star B \star C$  und Punkte  $A', C' \in h$  mit  $A' \star B' \star C'$ , so dass  $A$  und  $A'$  auf derselben Seite von  $t$  liegen. In dieser Notation lautet die Behauptung des Satzes  $\alpha := \angle ABB' \simeq \angle C'B'B =: \beta$ .



Nehmen wir nun das Gegenteil an, dass also  $\alpha \neq \beta$  gälte; ohne Einschränkung  $\alpha > \beta$ . Dann gibt es einen Punkt  $P$  im Inneren von  $\alpha$  mit  $\angle PBB' \simeq \beta$ . Nach dem Schwachen Wechselwinkelsatz 5.12 sind dann  $B \vee P$  und  $h$  parallel. Andererseits liegt  $B$  auch in  $g$ , und wir hatten  $g \parallel h$  vorausgesetzt. Nach (P) gilt daher  $B \vee P = g$ , was im Widerspruch dazu steht, dass  $P$  ein Punkt im Inneren von  $\alpha$  ist.  $\square$

**Übung** Ist umgekehrt  $\mathbb{H}$  eine Hilbertebene, in der der Wechselwinkelsatz gilt, so erfüllt  $\mathbb{H}$  auch (P).

Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich unmittelbar der folgende Satz.

**Satz 6.9** Die reell-affine Koordinatenebene ist eine Euklidische Ebene. Wir schreiben für diese ab sofort auch  $\mathbb{E} := (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$  und nennen sie das kartesische Modell der **Euklidischen Standardebene**.

**Satz 6.10** Sei  $\mathbb{E}$  die Euklidische Standardebene und  $\mathbb{E}' := (\mathbf{P}', \mathbf{G}', \star', \cong', \simeq')$  eine weitere Euklidische Ebene. Dann gibt es einen **Isomorphismus** zwischen  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{E}'$ , also eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{P}'$  mit

- (i)  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  gilt genau dann, wenn auch  $\varphi(g) \in \mathbf{G}'$  erfüllt ist,
- (ii) für alle Tripel  $(A, B, C)$  von Punkten in  $\mathbb{R}^2$  gilt  $A \star B \star C$  genau dann, wenn auch  $\varphi(A) \star' \varphi(B) \star' \varphi(C)$  erfüllt ist,
- (iii) für alle  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  mit  $A \neq B$  und  $C \neq D$  ist  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  genau dann erfüllt, wenn auch  $\overline{\varphi(A)\varphi(B)} \cong' \overline{\varphi(C)\varphi(D)}$  gilt,
- (iv) für alle  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}^2$ , so dass  $A, B, C$  und  $D, E, F$  jeweils drei Punkte in allgemeiner Lage sind, gilt genau dann  $\angle ABC \simeq \angle DEF$ , wenn auch  $\angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \simeq' \angle \varphi(D)\varphi(E)\varphi(F)$  erfüllt ist.

Ein Isomorphismus Euklidischer Ebenen bildet also die Punkte, Geraden, Anordnungen, Strecken und Winkel eins zu eins aufeinander ab. Ein bereits bekanntes Beispiel hierfür sind die Automorphismen einer Euklidischen Ebene. Diese sind nämlich nichts anderes als die in Definition 4.8 eingeführten Bewegungen der der Euklidischen Ebene zugrundeliegenden ebenen Geometrie.

*Beweisidee.* Man führt auf der Menge der Kongruenzklassen von Strecken in  $\mathbb{E}'$  eine Addition und eine Multiplikation ein und erhält so einen Körper  $K$ .<sup>4</sup> Mit den Anordnungsaxiomen zeigt man, dass  $K$  ein angeordneter Körper ist; es folgt die Isomorphie von  $\mathbb{E}'$  und  $\mathbb{A}_2(K)$ . Insbesondere mit dem Stetigkeitsaxiom zeigt man schließlich  $K = \mathbb{R}$ .  $\square$

**Bemerkung 6.11** *Mit Satz 6.10 haben wir nun zwei verschiedene Möglichkeiten, um Aussagen in der ebenen euklidischen Geometrie zu zeigen:*

- *Wir können einen **synthetischen Beweis** führen, also einen Beweis unter Verwendung der in diesem Kapitel eingeführten Axiome,*
- *oder wir können einen **analytischen Beweis** führen, also einen Beweis unter Verwendung des kartesischen Modells der Euklidischen Standardebene.*

---

<sup>4</sup>Das ist ziemlich aufwändig und der Hauptgrund, warum wir den Beweis hier nicht vorführen.

---

## Ebene Euklidische Geometrie

---

In diesem Kapitel wollen wir einige Standardresultate der ebenen Euklidischen Geometrie beweisen. Dafür sei stets  $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$  die Euklidische Standardebene.

### §7 Dreiecke

Wir wollen nun ausnutzen, dass wir im kartesischen Modell der Euklidischen Ebene mit der Bogenlänge eine Möglichkeit zur Quantifizierung von Winkeln geschaffen haben. Es gilt nämlich

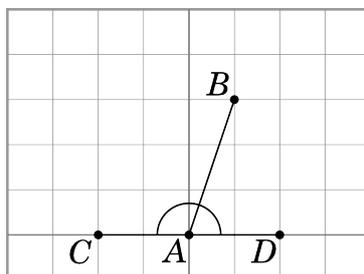
**Proposition 7.1** *Seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  vier Punkte, so dass sowohl  $A, B, C$  als auch  $A, B, D$  in allgemeiner Lage sind. Dann gilt*

- (a) *Sind  $\angle CAB, \angle BAD$  Ergänzungswinkel, dann gilt  $\angle CAB + \angle BAD = \pi$ . Insbesondere ist  $\angle CAB$  genau dann ein rechter Winkel, wenn  $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$  ist.*
- (b) *Liegt  $D$  im Inneren von  $\angle BAC$ , so gilt  $\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$ .*

*Beweis.* Wir beweisen zunächst (a). Seien also  $\angle CAB$  und  $\angle BAD$  Ergänzungswinkel. Dann gilt  $C \star A \star D$ , so dass es eine Bewegung gibt, die  $A$  auf den Ursprung und  $C, D$  auf Punkte auf der  $x$ -Achse abbildet, die auf verschiedenen Seiten von  $A$  liegen. Da Bewegungen Winkel unverändert lassen, können wir ohne Einschränkung von dieser Situation ausgehen. Weiter können wir  $C$  und  $D$  durch beliebige Punkte ihres jeweiligen von  $A$  ausgehenden Strahls ersetzen. Insgesamt können wir daher für geeignete  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  ohne Einschränkung

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

annehmen.



Wir können nun die Bogenmaße der uns interessierenden Winkel berechnen zu

$$\angle CAB = \angle(C - A, B - A) = \angle((-1, 0), (b_1, b_2)),$$

$$\angle BAD = \angle(B - A, D - A) = \angle((b_1, b_2), (1, 0)).$$

Für die Kosinuswerte folgt

$$\cos \angle CAB = \frac{-b_1}{\|B\|},$$

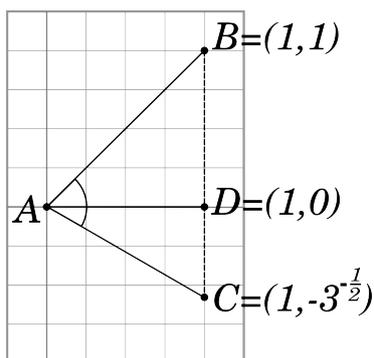
$$\cos \angle BAD = \frac{b_1}{\|B\|},$$

so dass insbesondere  $\cos \angle CAB = -\cos \angle BAD$  gilt. Da beide Bogenmaße im Intervall  $(0, \pi)$  liegen, folgt die Behauptung.

Um (b) zu zeigen können wir ohne Einschränkung wieder ein paar vereinfachende Annahmen machen. Wir unterscheiden dabei mehrere Fälle. Im ersten Fall sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $b_2 > 0$  und  $c_2 < 0$ .



Da der Kosinus eine Bijektion  $(0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$  ist, ist die Behauptung äquivalent zu

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \cos(\angle BAD + \angle DAC) \\ &= \cos \angle BAD \cdot \cos \angle DAC - \sin \angle BAD \cdot \sin \angle DAC \\ &= \cos \angle BAD \cdot \cos \angle DAC - \sqrt{(1 - \cos^2 \angle BAD) \cdot (1 - \cos^2 \angle DAC)}, \end{aligned}$$

wo wir im zweiten Schritt das Additionstheorem des Kosinus verwendet haben und beim dritten Schritt beachten, dass beide Sinuswerte in der Tat positive reelle Zahlen sind. Wir können nun beide Seiten mit dem Skalarprodukt ausdrücken und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\langle B | C \rangle}{\|B\| \cdot \|C\|} &= \frac{1}{\|B\|} \cdot \frac{1}{\|C\|} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\|B\|^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\|C\|^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\|B\| \cdot \|C\|} - \frac{\sqrt{\|B\|^2 \cdot \|C\|^2 - \|B\|^2 - \|C\|^2 + 1}}{\|B\| \cdot \|C\|} \\ &= \frac{1}{\|B\| \cdot \|C\|} - \frac{|b_2 \cdot c_2|}{\|B\| \cdot \|C\|} \\ &= \frac{1}{\|B\| \cdot \|C\|} + \frac{b_2 \cdot c_2}{\|B\| \cdot \|C\|} \end{aligned}$$

als zur Behauptung äquivalente Aussage. Da dies offensichtlich korrekt ist, ist der Beweis für den ersten Fall abgeschlossen. Im den anderen Fällen ist (bei unveränderten  $A, C, D$ )

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit  $b_2 > 0$ . Die Behauptung folgt in diesen Fällen aus einer analogen Rechnung zur obigen.  $\square$

Dies wollen wir nun auf Winkel in Dreiecken anwenden und führen dafür den Begriff der Innenwinkel ein.

**Definition 7.2** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann heißen  $(\angle CAB, \angle CBA, \angle ACB)$  seine **Winkelgrößen** (oder auch **Innenwinkel**) und  $(\|B - C\|, \|C - A\|, \|A - B\|)$  seine **Seitenlängen**.

**Satz 7.3 (Winkelsumme im Dreieck)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Dann gilt  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ; die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist also  $\pi$ .

*Beweis.* Da Bewegungen Winkelgrößen unverändert lassen, können wir ohne Einschränkung

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_1, c_2 > 0$$

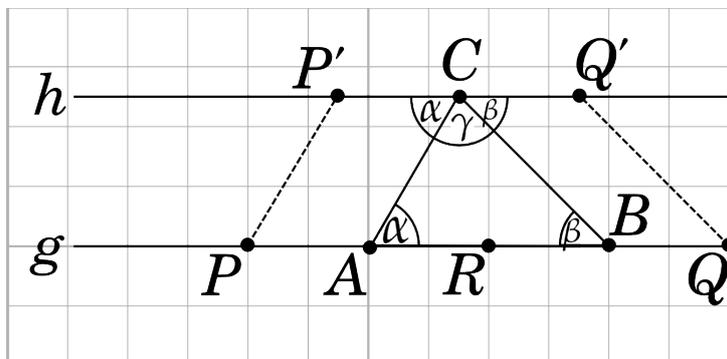
annehmen. Sei  $h$  die nach (P) eindeutige Parallele zu  $g := A \vee B$  durch  $C$ . Wir setzen

$$P' = \begin{pmatrix} c_1 - b_1/2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} c_1 + b_1/2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -b_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} b_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3b_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offenbar  $P', Q' \in h$ ,  $P' \star C \star Q'$ , sowie  $P, R, Q \in g$ ,  $P \star A \star R$  und  $R \star B \star Q$ . Des weiteren gilt  $P \star A \star B$ . Außerdem liegen  $P$  und  $P'$  auf derselben Seite von  $A \vee C$ ,

*denn:* Man sieht leicht, dass  $P \vee P'$  parallel zu  $A \vee C$  ist. Da  $P$  nicht auf  $A \vee C$  liegt, ist der Schnitt dieser beiden Geraden leer. #

Ganz analog zeigt man, dass  $Q$  und  $Q'$  auf derselben Seite von  $B \vee C$  liegen.



Nach dem Wechselwinkelsatz gelten  $\angle BAC \simeq \angle P'CA$  und  $\angle ABC \simeq \angle Q'CB$ ; die entsprechenden Bogenmaße sind nach Voraussetzung  $\alpha$  und  $\beta$ . Wegen  $P' \star C \star Q'$  sind  $\angle P'CA$  und  $\angle ACQ'$  Ergänzungswinkel. Mit dem (a)-Teil von Proposition 7.1 gilt also

$$\alpha + \angle ACQ' = \angle P'CA + \angle ACQ' = \pi. \quad (\text{III.1})$$

Außerdem liegt  $B$  im Inneren von  $\angle Q'CA$ ,

denn: Zum einen liegen  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $h = C \vee Q'$ , da  $C$  nicht auf  $g$  liegt und  $h$  und  $g$  parallel sind.

Wir müssen nun noch zeigen, dass auch  $B$  und  $Q'$  auf derselben Seite von  $C \vee A$  liegen. Wegen  $P \star A \star B$  genügt es dafür auch zu zeigen, dass  $P$  und  $Q'$  auf verschiedenen Seiten von  $C \vee A$  liegen, und wegen  $P' \star C \star Q'$ , dass  $P$  und  $P'$  auf derselben Seite von  $A \vee C$  liegen. Das hatten wir aber schon oben eingesehen. #

Wir können nun den (b)-Teil von Proposition 7.1 auf den Winkel  $\angle ACQ'$  anwenden und erhalten

$$\angle ACQ' = \angle ACB + \angle BCQ' = \gamma + \beta.$$

Der Satz folgt, wenn wir dies in (III.1) einsetzen.  $\square$

**Satz 7.4 (Kosinussatz)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Dann gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

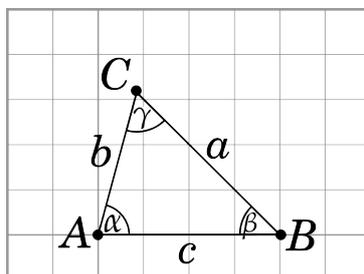
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

*Beweis.* Es genügt offensichtlich, eine der Gleichungen zu zeigen. Da Bewegungen weder Längen noch Winkelgrößen ändern, können wir ohne Einschränkung

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c, c_2 > 0$$

wählen.



Mit diesen Werten können wir leicht

$$a^2 = \|B - C\|^2 = (c - c_1)^2 + c_2^2 = (c_1^2 + c_2^2) + c^2 - 2cc_1 = b^2 + c^2 - 2cc_1 \quad (\text{III.2})$$

berechnen. Andererseits gilt auch

$$\cos \alpha = \frac{\langle C | B \rangle}{\|C\| \cdot \|B\|} = \frac{\langle \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{bc} = \frac{c_1 c}{bc} = \frac{c_1}{b}.$$

Der Satz folgt, wenn wir dies in (III.2) einsetzen.  $\square$

**Korollar 7.5 (Satz des Pythagoras)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Genau dann ist  $\angle BCA$  ein rechter Winkel, wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt.

*Beweis.* Nach dem Kosinussatz gilt  $a^2 + b^2 = c^2$  genau dann, wenn wir  $\cos \gamma = 0$  haben. Da für uns das Bogenmaß eines Winkels immer im Intervall  $(0, \pi)$  liegt, ist letzteres genau für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  der Fall. Nach Proposition 7.1 (a) und weil das Bogenmaß eine klassifizierende Kongruenzinvariante ist, ist dies äquivalent dazu, dass  $\angle BCA$  ein rechter Winkel ist.  $\square$

**Satz 7.6 (Sinussatz)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

*Beweis.* Nach dem Kosinussatz gilt  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ , also

$$4b^2c^2 \cos^2 \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

und analog

$$4a^2c^2 \cos^2 \beta = (a^2 + c^2 - b^2)^2.$$

Dies verwenden wir, um folgende Umformungen zu zeigen.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} &= \frac{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha)}{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2 \beta)} = \frac{4a^2b^2c^2 - a^2 \cdot (4b^2c^2 \cos^2 \alpha)}{4a^2b^2c^2 - b^2 \cdot (4a^2c^2 \cos^2 \beta)} \\ &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Da  $a, b, \sin \alpha, \sin \beta$  alles positive reelle Zahlen sind, folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b'}$$

also das erste Gleichheitszeichen der Behauptung. Die zweite Gleichheit zeigt man analog.  $\square$

**Korollar 7.7** Sei  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2})$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ . Dann heißen  $a, b$  die Längen der **Katheten** und  $c$  die Länge der **Hypothense** von  $\triangle ABC$ , und es gilt

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

*Beweis.* Mit dem Sinussatz und dem Satz über die Innenwinkelsumme des Dreiecks gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \alpha = \sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta$$

und

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \beta = \sin(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha.$$

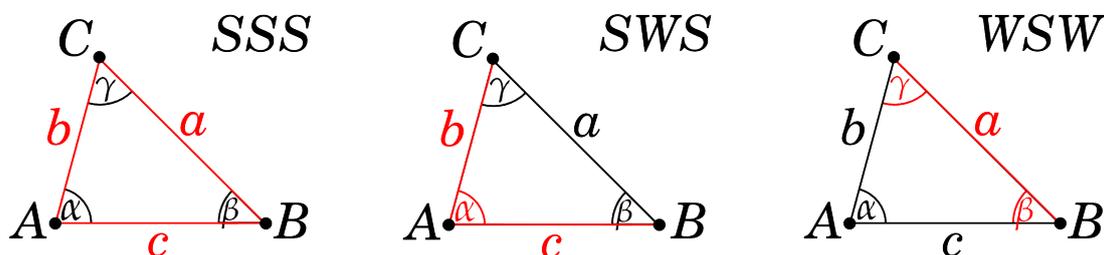
$\square$

**Definition 7.8** Zwei Dreiecke mit denselben Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und denselben Verhältnissen  $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$  von Seitenlängen heißen **ähnlich**.

Mit dem obigen Korollar sehen wir, dass zwei rechtwinklige Dreiecke bereits ähnlich zueinander sind, wenn sie außer dem rechten Winkel noch eine weitere Winkelgröße gemeinsam haben. Allgemeinere Ähnlichkeitskriterien ergeben sich, wenn wir im folgenden Kongruenzsatz für Dreiecke jeweils die Kongruenz von Seiten durch die Kongruenz nach Multiplikation mit einem konstanten Streckfaktor ersetzen.

**Satz 7.9 (Kongruenzsatz für Dreiecke)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ , und sei  $\triangle A'B'C'$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha', \beta', \gamma')$  und Seitenlängen  $(a', b', c')$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ,
- (ii)  $a = a', b = b'$  und  $c = c'$ , (SSS)
- (iii)  $b = b', \alpha = \alpha'$  und  $c = c'$ , (SWS)
- (iv)  $\beta = \beta', a = a'$  und  $\gamma = \gamma'$ . (WSW)



*Beweis.* Dass aus (i) die anderen drei Aussagen folgen, ist klar, das (SWS)-Kriterium gilt nach Definition der Euklidischen Ebene, und das (SSS)-Kriterium haben wir in Abschnitt §5.3 gezeigt. Zum Beweis des Satzes genügt es daher, aus (iv) irgendeine der übrigen Aussagen herzuleiten; hierfür wählen wir (iii).

Es gelte also (WSW). Da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gleich  $\pi$  ist, folgt

$$\alpha = \pi - (\beta + \gamma) = \pi - (\beta' + \gamma') = \alpha'.$$

Nach dem Sinussatz gilt

$$b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = a' \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} = b'$$

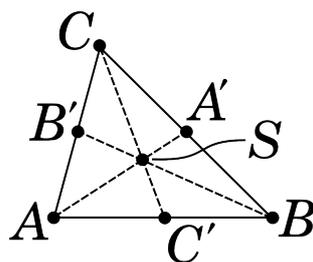
und analog auch  $c = c'$ . Die Behauptung folgt.  $\square$

**Übung** Folgern Sie das (SSS)-Kriterium ohne die Ergebnisse aus Abschnitt §5.3 aus dem Kosinussatz!

**Definition 7.10** Für ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißen die Punkte

$$A' := \frac{1}{2}(B + C), \quad B' := \frac{1}{2}(A + C), \quad C' := \frac{1}{2}(A + B)$$

seine **Seitenmitten** und die Geraden  $A \vee A'$ ,  $B \vee B'$  und  $C \vee C'$  seine **Seitenhalbierenden**.



**Satz 7.11 (Schwerpunktsatz)** Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks  $\triangle ABC$  schneiden sich alle drei im Punkt  $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ .  $S$  heißt der **Schwerpunkt** von  $\triangle ABC$ .

*Beweis.* Wegen

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A' \quad (\text{III.3})$$

liegt der Schwerpunkt  $S$  auf der Seitenhalbierenden  $A \vee A'$ . Analog zeigen wir, dass  $S$  auch auf den anderen beiden Seitenhalbierenden liegt.

Wir zeigen nun noch, dass die Seitenhalbierenden paarweise verschieden sind und daher der Schnitt von je zweien von ihnen höchstens einen Punkt enthalten kann. Nehmen wir dafür beispielsweise an,  $A \vee A'$  und  $B \vee B'$  seien identisch. Dann läge  $B$  auf  $A \vee A' = g_{A,A'-A}$ , ließe sich also schreiben als

$$B = A + \lambda \left( \frac{1}{2}(B + C) - A \right) = (1 - \lambda)A + \frac{\lambda}{2}(B + C)$$

mit einem geeigneten  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nach Auflösen nach  $C$  ergäbe sich dann

$$C = \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda}A + \frac{2 - \lambda}{\lambda}B.$$

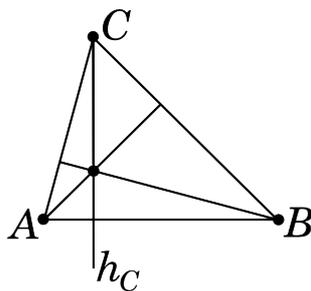
Wegen  $\frac{2(\lambda-1)}{\lambda} + \frac{2-\lambda}{\lambda} = 1$  folgte dann  $C \in A \vee B$ , was nicht sein kann. Analog zeigt man, dass die Seitenhalbierenden tatsächlich paarweise verschieden sind, und damit den Satz.  $\square$

Aus (III.3) folgt sofort das

**Korollar 7.12** *Der Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis  $2 : 1$ ; es gilt also*

$$\frac{\|S - A\|}{\|S - A'\|} = \frac{\|S - B\|}{\|S - B'\|} = \frac{\|S - C\|}{\|S - C'\|} = 2.$$

**Definition 7.13** *Für ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißt das Lot von  $C$  auf die Gerade  $A \vee B$  die **Höhe von  $\triangle ABC$  durch  $C$**  und wird mit  $h_C$  bezeichnet. Der Schnittpunkt  $h_C \wedge (A \vee B)$  heißt dabei der **Fußpunkt** der Höhe  $h_C$ . Analog lassen sich natürlich auch die Höhen  $h_A$  und  $h_B$  und ihre Fußpunkte einführen.*



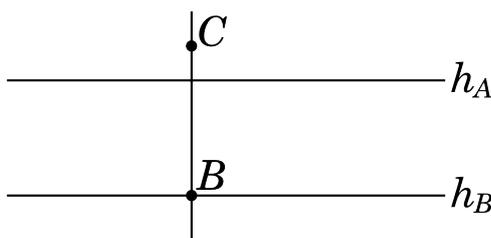
Nach Definition ist  $B - A$  ein Normalenvektor der Geraden  $h_C$ . Die Hesse'sche Normalform (vgl. Abschnitt §2) von  $h_C$  lautet also

$$h_C = \{P \in \mathbf{P} \mid \langle P \mid B - A \rangle = \langle C \mid B - A \rangle\} \quad (\text{III.4})$$

und für die anderen beiden Höhen entsprechend.

**Satz 7.14 (Höhensatz)** Die Höhen  $h_A, h_B, h_C$  eines Dreiecks  $\triangle ABC$  schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt  $H$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst per Widerspruch, dass die Höhen paarweise nicht parallel sind. Dafür nehmen wir an, dass etwa  $h_A \parallel h_B$  gelte. Da  $h_A$  auf  $B \vee C$  senkrecht steht, folgte dann aus dem Wechselwinkelsatz, dass auch  $h_B \perp B \vee C$  gälte.



Aber andererseits ist  $h_B$  ja auch senkrecht auf  $A \vee C$ , so dass mit Korollar 5.13 schon  $A \vee C$  und  $B \vee C$  parallel wären, was nicht sein kann, weil wir  $A, B, C$  in allgemeiner Lage vorausgesetzt haben.

Die beiden Höhen  $h_A$  und  $h_B$  haben also einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt  $H$ . Wir müssen nun noch zeigen, dass  $H$  auf  $h_C$  liegt. Nutzen wir dafür die oben eingeführte Schreibweise der Höhen in Hesse'scher Normalform. Es gilt

$$\langle H \mid B - C \rangle = \langle A \mid B - C \rangle \quad \text{und} \quad \langle H \mid A - C \rangle = \langle B \mid A - C \rangle.$$

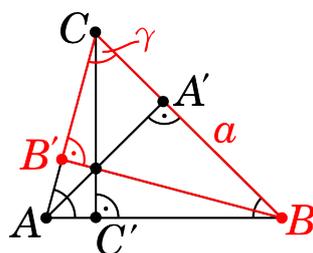
Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle H \mid B - A \rangle &= \langle H \mid (B - C) - (A - C) \rangle \\ &= \langle H \mid B - C \rangle - \langle H \mid A - C \rangle \\ &= \langle A \mid B - C \rangle - \langle B \mid A - C \rangle \\ &= \langle A \mid B \rangle - \langle A \mid C \rangle - \langle B \mid A \rangle + \langle B \mid C \rangle \\ &= \langle C \mid B - A \rangle. \end{aligned}$$

Es liegt also  $H$  auch auf der Höhe  $h_C$ , was zu zeigen war. □

**Satz 7.15 (Höhenformel)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Seitenlängen  $(a, b, c)$ , und seien  $A', B', C'$  die Fußpunkte der Höhen  $h_A, h_B, h_C$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|A - A'\| &= c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma, \\ \|B - B'\| &= a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha, \\ \|C - C'\| &= b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Abbildung III.1: Zum Ablesen markiert:  $\|B - B'\| = a \cdot \sin \gamma$ .

*Beweis.* Wir zeigen nur die zweite Aussage; die anderen Beweise gehen analog.

**Fall 1:**  $C = B'$ . Dann ist  $\|B - B'\| = a = a \cdot \sin \frac{\pi}{2} = a \cdot \sin \gamma$ . Mit dem Sinussatz folgt  $a = c \sin \alpha$  und somit die Behauptung.

**Fall 2:**  $C \neq B'$ . Dann sind die drei Punkte  $C, B, B'$  in allgemeiner Lage, da ja sonst  $C \vee B = C \vee B' = C \vee A$  gälte, was nicht sein kann. Wir können also den Sinussatz auf das Dreieck  $\triangle CB'B$  anwenden und erhalten

$$\frac{\sin \gamma}{\|B - B'\|} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{a} = \frac{1}{a'}$$

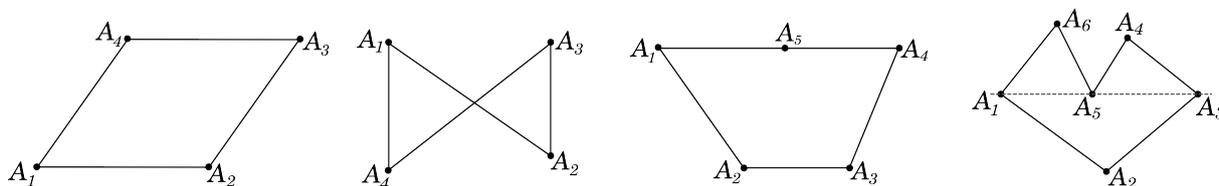
also  $\|B - B'\| = a \cdot \sin \gamma$ . Die Behauptung  $\|B - B'\| = c \cdot \sin \alpha$  folgt, da nach dem Sinussatz für das Dreieck  $\triangle ABC$  die Gleichheit  $a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha$  gilt.  $\square$

## §8 Schnittpunktsätze

**Definition 8.1** Sei  $n$  eine natürliche Zahl größer 2, und seien  $A_1, \dots, A_n$  paarweise verschiedene Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Dann heißt das  $n$ -Tupel  $\Pi A_1 \dots A_n = (A_1, \dots, A_n)$  das  $n$ -Eck mit **Eckpunkten**  $A_1, \dots, A_n$ . Drei Eckpunkte  $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$  von  $\Pi A_1 \dots A_n$  heißen **aufeinanderfolgend**, falls

$$i_1 \equiv i_2 - 1 \equiv i_3 - 2 \pmod{n}$$

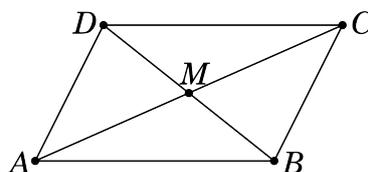
gilt.  $\Pi A_1 \dots A_n$  heißt **entartet**, falls es drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gibt, die kollinear sind, und **nicht entartet** sonst.

Abbildung III.2: Nur das dritte  $n$ -Eck ist entartet.

**Definition 8.2** Ein nicht entartetes Viereck  $\Pi ABCD$  heißt **Parallelogramm**, falls  $A \vee B \parallel C \vee D$  und  $A \vee D \parallel B \vee C$  gelten. Gilt weiterhin  $A \vee B \perp A \vee D$ , so nennt man  $\Pi ABCD$  ein **Rechteck**.

**Satz 8.3 (Diagonalensatz)** Für ein nicht entartetes Viereck  $\Pi ABCD$  sind äquivalent

- (i)  $\Pi ABCD$  ist ein Parallelogramm,
- (ii)  $C - B = D - A$  und  $B - A = C - D$  als Vektoren,
- (iii) Die Diagonalen  $A \vee C$  und  $B \vee D$  schneiden sich in genau einem Punkt  $M$ , dem **Diagonalschnittpunkt**, mit der Eigenschaft  $\|M - A\| = \|M - C\|$  und  $\|M - B\| = \|M - D\|$ ; die Diagonalen halbieren sich also gegenseitig.



*Beweis.*  $\Pi ABCD$  ist genau dann ein Parallelogramm, wenn

$$g_{B,A-B} = A \vee B \parallel C \vee D = g_{D,C-D} \quad \text{und} \quad g_{A,D-A} = A \vee D \parallel C \vee B = g_{B,C-B}$$

gelten. Das ist äquivalent dazu, dass es  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^\times$  mit

$$C - D = \lambda(A - B) \quad \text{und} \quad D - A = \mu(C - B)$$

gibt. An dieser Stelle ist klar, dass Aussage (i) aus Aussage (ii) folgt. Nehmen wir andererseits (i) an, so folgt aus den bisherigen Überlegungen

$$\begin{aligned} (A - B) + (C - D) &= (\lambda + 1)(A - B), \\ (D - A) - (C - B) &= (\mu - 1)(C - B). \end{aligned}$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$0 = (\lambda + 1)(A - B) + (\mu - 1)(C - B).$$

Da  $\Pi ABCD$  nicht entartet ist, sind insbesondere die drei Punkte  $A, B, C$  in allgemeiner Lage, so dass die Vektoren  $A - B$  und  $C - B$  linear unabhängig sind. Mit der obigen Gleichung folgt daher  $\lambda = -1$  und  $\mu = 1$ , also (ii).

Der Satz folgt also, wenn wir zeigen können, dass die Aussagen (ii) und (iii) äquivalent sind. Nehmen wir dafür zunächst (ii) an, so gilt insbesondere  $A + C = B + D$ . Wir setzen  $M := \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$ . Dies ist offensichtlich ein Punkt, der auf beiden Diagonalen liegt und

$$\|M - A\| = \left\| \frac{1}{2}(C - A) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(A - C) \right\| = \|M - C\|$$

und analog  $\|M - B\| = \|M - D\|$  erfüllt. Da  $\Pi ABCD$  nicht entartet ist, haben die beiden Diagonalen keinen weiteren Schnittpunkt, und es folgt Aussage (iii).

Gelte nun umgekehrt (iii). Dann ist zum einen  $M \in A \vee C$  mit  $\|M - A\| = \|M - C\|$  und zum anderen  $M \in B \vee D$  mit  $\|M - B\| = \|M - D\|$ , so dass  $\frac{1}{2}(A + C) = M = \frac{1}{2}(B + D)$  folgt. Dies lässt sich umformen zur Aussage von (ii), und wir sind fertig.  $\square$

**Übung** Für ein Parallelogramm  $\Pi ABCD$  mit Diagonalschnittpunkt  $M$  sind äquivalent

- (i)  $\Pi ABCD$  ist ein Rechteck,
- (ii)  $\|A - C\| = \|B - D\|$ ,
- (iii)  $\angle MAD \simeq \angle ADM$ .

**Satz 8.4 (Strahlensatz)** Seien  $g, h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  zwei nicht parallele Geraden mit Schnittpunkt  $P = g \wedge h$ . Seien weiter  $A, B \in g \setminus \{P\}$  und  $A', B' \in h \setminus \{P\}$ . Dann sind äquivalent

- (i)  $A \vee A' \parallel B \vee B'$ ,
- (ii)  $\frac{\|P - B\|}{\|P - A\|} = \frac{\|P - B'\|}{\|P - A'\|}$  und  $A \star P \star B \iff A' \star P \star B'$ .

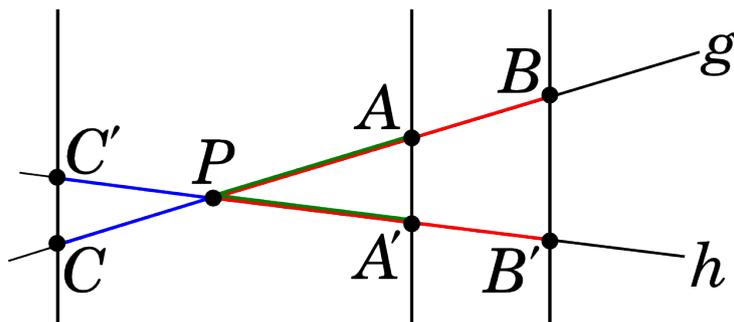


Abbildung III.3: Es gelten  $A \vee A' \parallel B \vee B'$  und  $A \vee A' \parallel C \vee C'$  aber nicht  $A \vee A' \parallel B \vee C'$ .

*Beweis.* Da jede Translation Parallelität, Streckenlängen und Bogenmaße gleich lässt, können wir ohne Einschränkung annehmen,  $P$  liege im Ursprung. Insbesondere sind dann die Geraden  $g$  und  $h$  von der Gestalt  $g = \mathbb{R}A$  und  $h = \mathbb{R}A'$ , und es gibt  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^\times$  mit  $B = \lambda A$  und  $B' = \mu A'$ . Offensichtlich gilt mit dieser Sprechweise

$$\begin{aligned} \frac{\|P - B\|}{\|P - A\|} &= \frac{\|\lambda A\|}{\|A\|} = |\lambda| \text{ und } A \star P \star B \iff \lambda < 0, \\ \frac{\|P - B'\|}{\|P - A'\|} &= \frac{\|\mu A'\|}{\|A'\|} = |\mu| \text{ und } A' \star P \star B' \iff \mu < 0. \end{aligned} \tag{III.5}$$

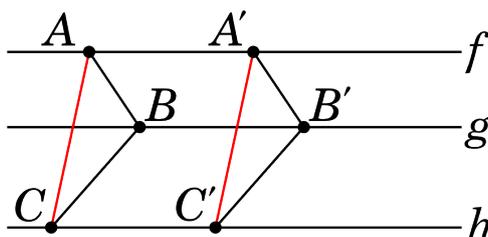
Gelte nun Aussage (i); seien also  $A \vee A'$  und  $B \vee B'$  parallel. Dann gibt es ein  $\nu \in \mathbb{R}^\times$  mit  $\nu(A - A') = B - B' = \lambda A - \mu A'$ ; offensichtlich gilt also  $\lambda = \mu = \nu$ . Setzt man dies in (III.5) ein, folgt sofort (ii).

Gelte umgekehrt Aussage (ii). Dann gilt nach (III.5)  $\mu = \lambda$ , also  $B - B' = \lambda(A - A')$ . Das ist äquivalent zur gewünschten Parallelität (i).  $\square$

**Satz 8.5 (Kleiner Satz von Desargues)** Seien  $f, g, h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  drei paarweise verschiedene parallele Geraden und  $A, A' \in f$ ,  $B, B' \in g$  und  $C, C' \in h$  Punkte auf ihnen, die

$$A \vee B \parallel A' \vee B' \quad \text{und} \quad B \vee C \parallel B' \vee C'$$

erfüllen. Dann gilt auch  $A \vee C \parallel A' \vee C'$ .



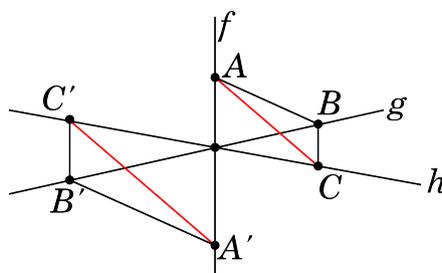
**Beweis. Fall 1:**  $A = A'$ . Dann enthalten die parallelen Geraden  $A \vee B$  und  $A' \vee B'$  einen gemeinsamen Punkt, sind also identisch. Es sind daher  $B$  und  $B'$  beide im Schnitt der Geraden  $A \vee B$  und  $g$ . Da  $f$  und  $g$  disjunkt sind, liegt  $A$  nicht auf  $g$ , so dass  $B = B'$  folgt. Mit derselben Argumentation folgern wir  $C = C'$  und damit die Behauptung.

**Fall 2:**  $A \neq A'$ . Dann gilt auch  $B \neq B'$  und  $C \neq C'$ , da wir sonst mit einer zum Beweis von Fall 1 analogen Argumentation einen Widerspruch erzwingen können. Da die drei Geraden  $f, g, h$  paarweise disjunkt sind, sind somit die sechs Punkte  $A, A', B, B', C, C'$  paarweise verschieden. Insbesondere ist  $\Pi ABB'A'$  ein Viereck, wegen  $f \parallel g$  und  $A \vee B \parallel A' \vee B'$  sogar ein Parallelogramm. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass  $\Pi ABB'A'$  nicht entartet ist. Mit dem Diagonalensatz folgt dann  $B - A = B' - A'$ . Analog zeigen wir  $C - B = C' - B'$  und können so  $C - A = C' - A'$  und damit die Behauptung zeigen.  $\square$

**Übung (Satz von Desargues)** Seien  $f, g, h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  drei paarweise verschiedene Geraden, die sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt  $P$  treffen, und  $A, A' \in f \setminus \{P\}$ ,  $B, B' \in g \setminus \{P\}$  und  $C, C' \in h \setminus \{P\}$  Punkte auf ihnen, die

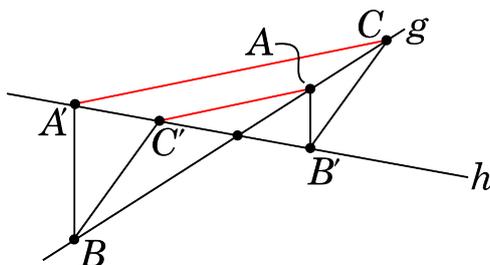
$$A \vee B \parallel A' \vee B' \quad \text{und} \quad B \vee C \parallel B' \vee C'$$

erfüllen. Dann gilt auch  $A \vee C \parallel A' \vee C'$ .



**Hinweis:** Benutzen Sie den Strahlensatz.

**Satz 8.6 (Satz von Pappus)** Seien  $g, h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  zwei Geraden und  $A, B, C \in g \setminus h$  und  $A', B', C' \in h \setminus g$  sechs paarweise verschiedene Punkte mit  $A \vee B' \parallel B \vee A'$  und  $B \vee C' \parallel C \vee B'$ . Dann gilt auch  $A \vee C' \parallel C \vee A'$ .



*Beweis. Fall 1:*  $g \parallel h$ . Dann ist  $IIAB'A'B$  ein Parallelogramm und als solches nach Voraussetzung nicht entartet. Nach dem Diagonalsatz ist dann  $A' - B = B' - A$ . Analog zeigen wir  $B' - C = C' - B$ . Addieren wir diese beiden Gleichungen und ziehen auf beiden Seiten  $B' - B$  ab, so erhalten wir  $A' - C = C' - A$  und somit die Behauptung.

*Fall 2:*  $g \not\parallel h$ . Dann können wir wie im Beweis des Strahlensatzes ohne Einschränkung annehmen, der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  sei im Ursprung. Es gilt dann  $g = \mathbb{R}A$  und  $h = \mathbb{R}A'$ , so dass es geeignete  $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}^\times$  gibt mit  $B = \lambda A$ ,  $C = \mu B$ ,  $B' = \lambda' C'$  und  $A' = \mu' B'$ . Wie in der Hinrichtung des Beweises des Strahlensatzes erhalten wir aus  $A \vee B' \parallel A' \vee B$  die Gleichheit  $\lambda = \mu'$  und aus  $B \vee C' \parallel C \vee B'$  die Gleichheit  $\mu = \lambda'$ .

Insgesamt erhalten wir  $\lambda\mu = \lambda'\mu'$ . Wegen  $C = \mu B = \mu\lambda A$  und  $A' = \mu' B' = \mu'\lambda' C'$  folgt wie in der Rückrichtung des Beweises des Strahlensatzes  $A \vee C' \parallel A' \vee C$ .  $\square$

**Übung (Satz von Pascal)** Seien  $g \not\parallel h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  zwei nicht parallele Geraden,  $P$  ihr Schnittpunkt und  $A, B, C \in g \setminus \{P\}$  und  $A', B', C' \in h \setminus \{P\}$  paarweise verschiedene Punkte. Es gelten außerdem die Bedingungen

$$(A \vee B') \not\parallel (B \vee A'), \quad (A \vee C') \not\parallel (C \vee A') \quad \text{und} \quad (B \vee C') \not\parallel (C \vee B').$$

Dann sind die drei Schnittpunkte

$$S_1 := (A \vee B') \wedge (B \vee A'),$$

$$S_2 := (B \vee C') \wedge (C \vee B'),$$

$$S_3 := (C \vee A') \wedge (A \vee C')$$

kollinear.

Die Sätze von Desargues, Pappus und Pascal gelten allgemeiner in affinen Koordinatenebenen  $\mathbb{A}_2(K)$  über beliebigen Körpern. Das werden wir in Kapitel V einsehen.

## §9 Kreise

Kreise als geometrische Figuren haben wir bereits in Abschnitt §6 eingeführt. Da wir nun das kartesische Modell der Euklidischen Standardebene zur Verfügung haben, bietet sich aber eine



Das ist eine quadratische Gleichung in  $\lambda$ , deren Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Vorzeichen  $\in \{+, 0, -\}$  ihrer Diskriminante

$$\begin{aligned} \text{Disk} &= (2\langle P - M | v \rangle)^2 - 4 \cdot \|v\|^2 \cdot (\|P - M\|^2 - r^2) \\ &= -4\|v\|^2 \cdot (\|P - M\|^2 - r^2 - \langle P - M | \frac{v}{\|v\|} \rangle^2) \end{aligned}$$

zweielementig, einelementig oder leer ist. In den Fällen (b) und (c) gilt wegen  $Q \in g = g_{Q,v}$

$$\|Q - M\|^2 \geq r^2 + \langle Q - M | \frac{v}{\|v\|} \rangle^2 \geq r^2,$$

so dass  $g$  keinen Punkt im Inneren von  $K$  besitzt.  $\square$

**Korollar 9.2** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $g = g_{P,v}$  eine Gerade in  $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  mit  $P, v \in \mathbb{R}^2$  und  $v \neq 0$ . Sei weiter  $Q$  ein Element im Durchschnitt  $K \cap g$ . Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

- (i)  $g$  ist Tangente an  $K$ ,
- (ii)  $\angle(Q - M, v) = \frac{\pi}{2}$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung setzen wir  $P = Q$ . Nach der Proposition gilt dann

$$g \text{ Tangente} \iff \|Q - M\|^2 = r^2 + \langle Q - M | \frac{v}{\|v\|} \rangle^2.$$

Da wir  $Q$  als Element des Kreises angenommen hatten, ist  $\|Q - M\| = r$ , und wir haben

$$\begin{aligned} g \text{ Tangente} &\iff \langle Q - M | \frac{v}{\|v\|} \rangle^2 = 0 \\ &\iff (Q - M) \perp v \\ &\iff \angle(Q - M, v) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 9.3** Sei  $\varphi$  eine Bewegung der Euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$ , und sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann gilt

$$\varphi(K_r(M)) = K_r(\varphi(M)),$$

insbesondere bilden also Bewegungen Kreise auf Kreise ab.

*Beweis.* Sei zunächst  $P \in K_r(M)$  ein Punkt. Dann gilt mit den bekannten Bewegungseigenschaften  $\|\varphi(M) - \varphi(P)\| = \|M - P\| = r$ , so dass  $\varphi(P)$  in  $K_r(\varphi(M))$  liegt. Es folgt

$$\varphi(K_r(M)) \subseteq K_r(\varphi(M)).$$

Da mit  $\varphi$  auch  $\varphi^{-1}$  eine Bewegung ist, folgt hiermit

$$\varphi^{-1}(K_r(\varphi(M))) \subseteq K_r(\varphi^{-1} \circ \varphi(M)) = K_r(M)$$

und also die Proposition.  $\square$

**Definition 9.4** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt. Dann heißt

$$\kappa_K(P) := \|P - M\|^2 - r^2$$

die **Potenz** von  $P$  in Bezug auf  $K$ .

Offensichtlich gibt das Vorzeichen der Potenz Auskunft darüber, ob der Punkt  $P$  in  $K$ , auf  $K$  oder außerhalb von  $K$  liegt. Wir wollen uns jetzt dem Problem des Durchschnitts zweier Kreise widmen. Dazu führen wir ein Hilfsobjekt ein.

**Proposition 9.5** Seien  $K = K_r(M)$ ,  $K' = K_{r'}(M')$  Kreis mit  $M \neq M' \in \mathbb{R}^2$  und  $r, r' \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann gilt:

- (a)  $p_{K,K'} := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \kappa_K(P) = \kappa_{K'}(P)\}$  ist eine Gerade in  $\mathbb{E}$ , die sogenannte **Potenzgerade** von  $K$  und  $K'$ .
- (b)  $p_{K,K'} \perp M \vee M'$ ,
- (c)  $K \cap K' = K \cap p_{K,K'} = K' \cap p_{K,K'}$ .

Insbesondere schneiden sich zwei verschiedene Kreise in höchstens zwei Punkten.

*Beweis.* Zum Nachweis von (a) sei  $P \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} P \in p_{K,K'} &\iff \kappa_K(P) = \kappa_{K'}(P) \\ &\iff \|P - M\|^2 - r^2 = \|P - M'\|^2 - r'^2 \\ &\iff \|P\|^2 - 2\langle P, M \rangle + \|M\|^2 - r^2 = \|P\|^2 - 2\langle P, M' \rangle + \|M'\|^2 - r'^2 \\ &\iff \langle P, M' - M \rangle = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2 + \|M'\|^2 - \|M\|^2). \end{aligned}$$

Aufgrund von  $M \neq M'$  ist deshalb  $p_{K,K'}$  nichtleer. Ist nun  $A \in p_{K,K'}$  fixiert, so ergibt sich

$$P \in p_{K,K'} \iff \langle P, M' - M \rangle = \langle A, M' - M \rangle \iff \langle P - A, M' - M \rangle = 0.$$

Die obige Gleichung beschreibt genau die Hessesche Normalform der Geraden  $g_{A, (M' - M)^\perp}$ , was neben (a) auch die Aussage (b) impliziert. Die erste Gleichung in Aussage (c) ergibt sich direkt aus der Äquivalenz

$$\begin{aligned} P \in K \cap K' &\iff \kappa_K(P) = 0 \text{ und } \kappa_{K'}(P) = 0 \\ &\iff \kappa_K(P) = 0 \text{ und } \kappa_K(P) = \kappa_{K'}(P) \\ &\iff P \in K \cap p_{K,K'}, \end{aligned}$$

die zweite Gleichung folgt aus Symmetriegründen. □

Dies ist nun der geeignete Moment, um Satz 6.6 zumindest für die Euklidische Standardebene zu zeigen.

*Beweis (Satz 6.6) für die Euklidische Standardebene  $\mathbb{E}$  als Hilbertebene  $\mathbb{H}$  mit  $(S)$ .* Seien dazu Kreise  $K = K_r(M)$  und  $K' = K_{r'}(M')$  mit  $M, M' \in \mathbb{R}^2$  und  $r, r' \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeben, so dass der Kreis  $K$

einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von  $K'$  besitzt. Die Voraussetzung impliziert sofort  $M \neq M'$ , denn im Fall  $M = M'$  wäre  $K = K'$ , oder die Punkte von  $K$  lägen alle innerhalb oder alle außerhalb von  $K'$ . Sei nun  $P \in K$  innerhalb von  $K'$  und  $Q \in K$  außerhalb von  $K'$ . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $P$  im Ursprung liegt, so dass  $P \vee Q = \mathbb{R}Q$  ist. Wir definieren

$$\varepsilon_{K'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \kappa_{K'}(\lambda Q).$$

Offenbar ist  $\varepsilon_{K'}$  eine stetige Funktion mit  $\varepsilon_{K'}(0) = \kappa_{K'}(P) < 0$  und  $\varepsilon_{K'}(1) = \kappa_{K'}(Q) > 0$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein  $\mu \in (0, 1)$  mit  $\varepsilon_{K'}(\mu) = 0$  existiert. Wir definieren nun analog

$$\varepsilon_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \kappa_K(\lambda Q).$$

Dies ist ebenfalls eine stetige Funktion mit den Eigenschaften  $\varepsilon_K(0) = \varepsilon_K(1) = 0$  und  $\varepsilon_K(\lambda) < 0$  für  $\lambda \in (0, 1)$ , insbesondere ist  $\varepsilon_K(\mu) < 0$ . Wir setzen

$$\delta_{K,K'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \varepsilon_K(\lambda) - \varepsilon_{K'}(\lambda).$$

Die Funktion  $\delta_{K,K'}$  ist stetig, und es gilt

$$\delta_{K,K'}(0) = \varepsilon_K(0) - \varepsilon_{K'}(0) > 0, \quad \delta_{K,K'}(\mu) = \varepsilon_K(\mu) - \varepsilon_{K'}(\mu) < 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz erhalten wir die Existenz eines  $\nu \in (0, \mu)$  mit  $\delta_{K,K'}(\nu) = 0$ . Setzen wir  $R := \nu Q$ , dann folgt wegen  $\varepsilon_K(\nu) = \varepsilon_{K'}(\nu)$  sofort  $\kappa_K(R) = \kappa_{K'}(R)$ , also ist  $R \in p_{K,K'}$ . Wegen  $\varepsilon_K(\nu) < 0$  ist  $\kappa_K(R) < 0$ , d.h.  $R$  liegt im Inneren von  $K$ . Somit hat die Potenzgerade  $p_{K,K'}$  einen Punkt im Inneren von  $K$ . Aufgrund von 9.1 ist  $p_{K,K'}$  eine Sekante von  $K$ , was  $|p_{K,K'} \cap K| = 2$  impliziert. Mittels 9.5 erhalten wir  $|K \cap K'| = 2$ .  $\square$

**Übung (Satz von Monge)** Es seien  $M, M', M'' \in \mathbb{R}^2$  paarweise verschieden sowie  $r, r', r'' \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wir setzen  $K := K_r(M), K' := K_{r'}(M'), K'' := K_{r''}(M'')$ . Dann gilt:

- $M, M', M''$  sind genau dann kollinear, wenn die Potenzgeraden  $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$  alle parallel zueinander sind.
- $M, M', M''$  sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sich die drei Potenzgeraden  $p_{K,K'}, p_{K,K''}, p_{K',K''}$  in genau einem Punkt schneiden.

**Satz 9.6 (Zwei-Sehnen-Satz)** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus K$  ein Punkt. Sei weiter  $g$  eine Sekante von  $K$  durch  $P$  mit  $g \cap K = \{A, B\}$ . Dann gilt

$$||P - A|| \cdot ||P - B|| = |\kappa_K(P)|,$$

für alle durch  $P$  verlaufenden Sekanten von  $K$  ist also das Produkt der Sehnenabschnitte gleich.

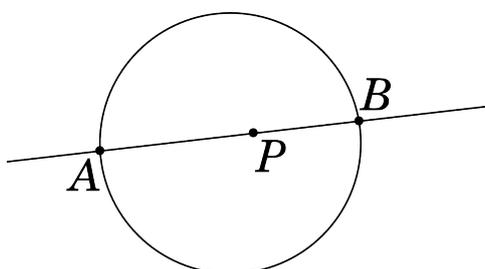


Abbildung III.5: Eine *Sehne* eines Kreises  $K$  ist die Menge der Punkte auf einer Sekante, die zwischen deren beiden Schnittpunkten mit  $K$  liegen.

*Beweis.* Sei  $g_{P,v}$  eine Sekante durch  $P$  mit  $\|v\| = 1$ . Genau dann liegt  $Q := P + \lambda v$  im Durchschnitt  $g_{P,v} \cap K$ , wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \|v\|^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle P - M | v \rangle \cdot \lambda + (\|P - M\|^2 - r^2) \\ &= \lambda^2 + 2\langle P - M | v \rangle \cdot \lambda + \kappa_K(P) \end{aligned}$$

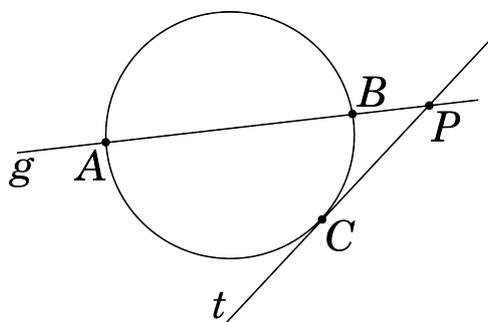
gilt; das ist genau wie im Beweis von Proposition 9.1. Da  $g_{P,v}$  ja eine Sekante von  $K$  ist, hat diese quadratische Gleichung in  $\lambda$  zwei reelle Lösungen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Es gilt also  $\kappa_K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$  und ohne Einschränkung  $A = P + \lambda_1 v$  und  $B = P + \lambda_2 v$ . Es folgt die Behauptung

$$\|P - A\| \cdot \|P - B\| = \|\lambda_1 v\| \cdot \|\lambda_2 v\| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| = |\kappa_K(P)|.$$

□

**Satz 9.7 (Sehnen-Tangenten-Satz)** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt außerhalb von  $K$ . Seien weiter  $g$  eine Sekante von  $K$  durch  $P$  mit  $g \cap K =: \{A, B\}$  und  $t$  eine Tangente an  $K$  durch  $P$  mit  $t \cap K =: \{C\}$ . Dann gilt

$$\|P - C\|^2 = \|P - A\| \cdot \|P - B\| = \kappa_K(P).$$

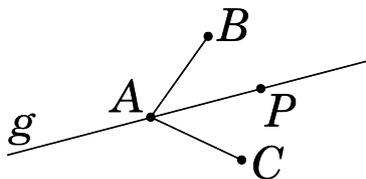


*Beweis.* Nach dem Zwei-Sehnen-Satz ist nur das erste Gleichheitszeichen zu zeigen. Dessen Beweis erfolgt analog, außer, dass es statt zwei verschiedenen Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2$  der quadratischen Gleichung nurmehr eine doppelte Nullstelle  $\mu$  gibt. □

### §10 Inkreis, Umkreis und Feuerbachkreis

Wir wollen nun Kreise dazu verwenden, Dreiecke genauer zu studieren.

**Definition 10.1** Seien  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  drei Punkte in allgemeiner Lage und  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Gerade durch  $A$ . Genau dann heißt  $g$  eine **Winkelhalbierende** von  $\angle BAC$ , wenn  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen und für alle  $P \in g \setminus \{A\}$  die Kongruenz  $\angle PAB \simeq \angle PAC$  gilt.



Um zu zeigen, dass eine Gerade tatsächlich eine Winkelhalbierende ist, genügt es natürlich, wenn ein einziges  $P \in g \setminus \{A\}$  die verlangte Eigenschaft erfüllt; für alle anderen folgt diese daraus.

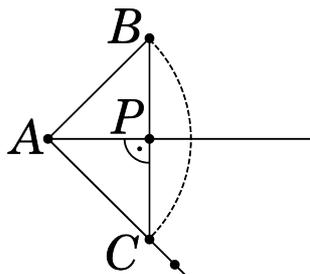
**Übung** Liegt der Punkt  $P$  aus der Definition im Inneren von  $\angle BAC$ , so gilt dann  $\angle PAB = \angle PAC = \frac{1}{2}\angle BAC$ .

**Proposition 10.2** Seien  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Dann gibt es genau eine Winkelhalbierende des Winkels  $\angle BAC$ .

*Beweis.* Zunächst können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte

$$\|B - A\| = \|C - A\|,$$

da wir sonst  $B$  auf den Strahl  $\overrightarrow{AC}$  abtragen können und für den resultierenden Punkt  $C'$  die Gleichheit  $\angle BAC' = \angle BAC$  gilt. Sei nun  $P$  der Höhenfußpunkt von  $A$  im gleichschenkligen Dreieck  $\triangle ABC$ . Dann gilt  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  und  $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ , so dass nach Pythagoras und SSS-Kriterium die beiden rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle APB$  und  $\triangle APC$  kongruent sind und insbesondere  $\angle BAP \simeq \angle CAP$  gilt.  $A \vee P$  ist also eine mögliche Winkelhalbierende.



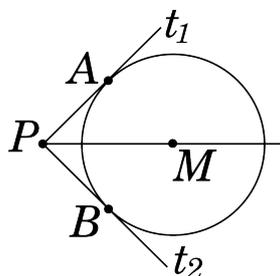
Nehmen wir nun an, es gäbe zwei Winkelhalbierende  $g$  und  $h$  von  $\angle BAC$  mit Punkten  $P \in g \setminus \{A\}$  und  $P' \in h \setminus \{A\}$  im Inneren von  $\angle BAC$ .<sup>5</sup> Dann gälte

$$\angle PAB = \angle PAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle P'AB = \angle P'AC.$$

Wegen  $(K_5)$  müssen die Strahlen  $\overrightarrow{AP}$  und  $\overrightarrow{AP'}$  identisch sein. □

**Übung** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis mit  $M \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , und sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt außerhalb von  $K$ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- (a) Es gibt genau zwei Tangenten  $t_1, t_2$  an  $K$  durch  $P$ .
- (b) Ist  $t_1 \cap K =: \{A\}$  und  $t_2 \cap K =: \{B\}$ , so ist  $M \vee P$  die Winkelhalbierende von  $\angle APB$ .

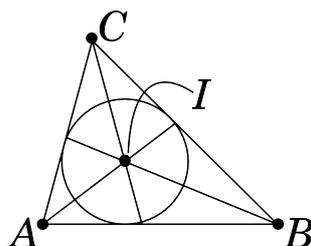


Wenn wir noch eine dritte Dreiecksseite einzeichnen, erinnert die in der Übung behandelte Situation schon an unsere naive Vorstellung eines Inkreises eines Dreiecks. Um dies präzise machen zu können, wollen wir an dieser Stelle definieren, wann ein Punkt innerhalb eines Dreiecks liegt.

**Definition 10.3** Wir sagen, ein Punkt  $P \in \mathbf{P}$  liege **im Inneren** eines Dreiecks  $\triangle ABC$ , wenn  $P$  im Inneren seiner Winkel  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$  und  $\angle ACB$  liegt.

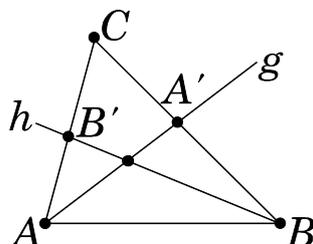
Um zu zeigen, dass  $P$  im Inneren von  $\triangle ABC$  liegt, genügt es natürlich zu zeigen, dass  $P$  im Inneren von zwei beliebigen seiner Winkel liegt.

**Satz 10.4 (Inkreissatz)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt  $I$ . Weiter gibt es genau einen Kreis  $K \subseteq \mathbb{R}^2$ , so dass die Geraden  $A \vee B$ ,  $A \vee C$  und  $B \vee C$  Tangenten an  $K$  sind.  $K$  liegt (mit Ausnahme der Berührungspunkte der Tangenten) innerhalb von  $\triangle ABC$  und heißt der **Inkreis** von  $\triangle ABC$ . Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt  $I$  der Winkelhalbierenden und heißt der **Inkreismittelpunkt**.



<sup>5</sup>Klar, dass es die gibt!

*Beweis.* Sei  $g$  die Winkelhalbierende von  $\angle BAC$  und  $h$  diejenige von  $\angle ABC$ . Wegen  $B \notin g$  und  $B \in h$  sind die beiden Geraden verschieden. Da  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen, gibt es einen Schnittpunkt  $A'$  von  $g$  und  $\overline{BC}$ .



Dann liegen  $A$  und  $A'$  auf verschiedenen Seiten von  $h$ ,

denn:  $A$  und  $C$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $h$  nach Definition der Winkelhalbierenden und  $A'$  und  $C$  liegen auf derselben Seite von  $h$  wegen  $C \star A' \star B$  nach Konstruktion. Die Behauptung folgt mit  $(A_4)$ . #

Es folgt, dass  $h$  und  $\overline{AA'} \subseteq g$  einen Schnittpunkt haben.

Vertauschen wir die Rollen von  $g$  und  $h$  und benennen den Schnittpunkt von  $h$  und  $\overline{AC}$  mit  $B'$ , erhalten wir analog, dass  $g$  und  $\overline{BB'} \subseteq h$  einen Schnittpunkt haben. Es folgt, dass der eindeutig bestimmte Geradenschnittpunkt  $g \cap h$  in  $\overline{AA'} \cap \overline{BB'}$  und somit im Inneren von  $\triangle ABC$  liegt.

Nennen wir den so gewonnenen Schnittpunkt nun  $I$ . Wir wollen zeigen, dass  $I$  auch auf der Winkelhalbierenden  $f$  von  $\angle ACB$  liegt. Seien dafür  $(a, b, c)$  die Seitenlängen von  $\triangle ABC$  und  $F_a, F_b$  und  $F_c$  die Lotfußpunkte von  $I$  auf  $B \vee C, A \vee C$  bzw.  $A \vee B$ .

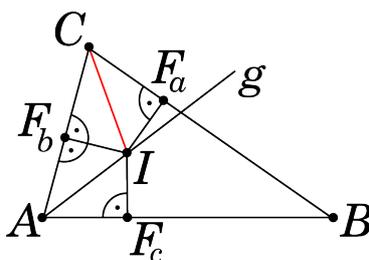


Abbildung III.6: Ist die rote Linie die Winkelhalbierende von  $\angle ACB$ ?

Dann gilt  $\triangle AIF_c \cong \triangle AIF_b$ ,

denn: Da  $g$  Winkelhalbierende ist, gilt  $\angle IAF_b \cong \angle IAF_c$ , also insbesondere  $\angle IAF_b = \angle IAF_c$ . Andererseits ist nach Konstruktion  $\angle IF_cA = \frac{\pi}{2} = \angle IF_bA$ . Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist daher  $\angle AIF_c = \angle AIF_b$ . Da die beiden Dreiecke außerdem die Seite  $\overline{AI}$  gemeinsam haben, folgt mit dem WSW-Kriterium die gesuchte Kongruenz. #

Analog zeigt man  $\triangle BIF_c \cong \triangle BIF_a$ . Aus diesen beiden Kongruenzen von Dreiecken folgt insbesondere  $\overline{IF_b} = \overline{IF_a}$ . Da die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle CIF_b$  und  $\triangle CIF_a$  außerdem die Seite

$\overline{CI}$  gemein haben, folgt mit dem Satz von Pythagoras und dem SSS-Kriterium ihre Kongruenz, also insbesondere die Kongruenz der Winkel  $\angle ICF_b$  und  $\angle ICF_a$ .  $I$  liegt somit auf allen drei Geraden.

Implizit haben wir im bisherigen Beweis schon

$$\|I - F_a\| = \|I - F_b\| = \|I - F_c\| =: r$$

gezeigt. Der Kreis  $K = K_r(I)$  enthält also alle drei Lotfußpunkte  $F_a, F_b$  und  $F_c$ . Da nach Definition die Dreiecksseiten in den Lotfußpunkten senkrecht auf den Loten stehen, sind nach dem Korollar von Proposition 9.1 die Geraden  $A \vee B, A \vee C$  und  $B \vee C$  Tangenten an  $K$ . Außerdem liegt  $K$  im Inneren von  $\triangle ABC$ ,

*denn:* Nach Proposition 9.1 gilt für einen beliebigen Punkt  $P \in (A \vee B) \setminus \{F_c\}$  die Abschätzung  $\|P - I\| > r$ , so dass  $P$  außerhalb von  $K$  liegt. Analog zeigt man, dass alle Punkte in  $(A \vee C) \setminus \{F_b\}$  und in  $(B \vee C) \setminus \{F_a\}$  außerhalb von  $K$  liegen. Die Behauptung folgt leicht. #

Es bleibt die Eindeutigkeit von  $K$  mit diesen Eigenschaften zu zeigen. Seien also  $K_1 = K_{r_1}(I_1)$  und  $K_2 = K_{r_2}(I_2)$  zwei Kreise, an denen jeweils alle drei Geraden  $A \vee B, A \vee C$  und  $B \vee C$  Tangenten sind. Nach dem (b)-Teil der letzten Übung liegen dann  $I_1$  und  $I_2$  beide auf allen drei Winkelhalbierenden und sind nach unseren vorangegangenen Überlegungen deshalb identisch. Im Fall  $r_1 = r_2$  müssen wir nun nichts mehr zeigen, so dass wir ohne Einschränkung  $r_1 < r_2$  annehmen können. Dann liegen alle Punkte von  $K_1$  im Inneren von  $K_2$ , was ein Widerspruch dazu ist, dass kein Punkt einer der Tangenten im Inneren von  $K_2$  liegt.  $\square$

**Definition 10.5** Seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Dann heißt das Lot von  $\frac{1}{2}(A + B)$  auf  $A \vee B$  die **Mittelsenkrechte**  $m_{AB}$  auf  $\overline{AB}$ .

Indem wir die Hesse'sche Normalform benutzen, lässt sich die Mittelsenkrechte  $m_{AB}$  explizit beschreiben als

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + B) \mid B - A \rangle\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \langle P \mid B - A \rangle = \frac{1}{2} \cdot (\|B\|^2 - \|A\|^2)\}. \end{aligned} \tag{III.6}$$

**Satz 10.6 (Umkreissatz)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann schneiden sich die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten in einem gemeinsamen Punkt  $U$ . Weiter gibt es genau einen Kreis  $K \subseteq \mathbb{R}^2$ , der  $A, B$  und  $C$  enthält.  $K$  liegt (mit Ausnahme der Eckpunkte  $A, B, C$ ) außerhalb von  $\triangle ABC$  und heißt der **Umkreis** von  $\triangle ABC$ . Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt  $U$  der Mittelsenkrechten und heißt der **Umkreismittelpunkt**.

*Beweis.* Die drei Mittelsenkrechten sind paarweise nicht parallel, da sonst zwei der entsprechenden Dreiecksseiten, auf denen sie orthogonal sind, parallel wären, was nicht sein kann. Je zwei

Mittelsenkrechten schneiden sich also in einem eindeutigen Punkt. Sei  $U$  der Schnittpunkt von  $m_{AB}$  und  $m_{AC}$ . Wie in der Vorüberlegung gilt

$$\langle U | B - A \rangle = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2) \quad \text{und} \quad \langle U | C - A \rangle = \frac{1}{2}(\|C\|^2 - \|A\|^2).$$

Es folgt

$$\langle U | B - C \rangle = \langle U | (B - A) - (C - A) \rangle = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|C\|^2),$$

so dass  $U$  auch auf  $m_{BC}$  liegt. Die drei Mittelsenkrechten haben also einen eindeutigen gemeinsamen Schnittpunkt  $U$ .

Wir bezeichnen den Abstand  $\|U - A\|$  nun mit  $r$ . Dann liegen  $A, B, C$  auf dem Kreis  $K_r(U)$ ,

denn: Für  $A$  ist nichts zu zeigen. Sei  $\sigma \in \text{Bew}(\mathbb{E})$  die Spiegelung an der Geraden  $m_{AB}$ . Dann ist definitionsgemäß  $\sigma(U) = U$ ,  $\sigma(A) = B$  und  $\sigma(B) = A$ . Es folgt

$$\|U - B\| = \|\sigma(U) - \sigma(B)\| = \|U - A\| = r,$$

so dass auch  $B$  auf  $K_r(U)$  liegt. Betrachtet man die Spiegelung an  $m_{AC}$ , erhält man analog  $C \in K_r(U)$ . #

Wir wollen zuletzt nun die Eindeutigkeit des Umkreises zeigen. Sei dafür  $K_{r'}(U')$  ein beliebiger Kreis durch  $A, B, C$ . Dann gilt  $U' = U$  und  $r' = r$ ,

denn: Da  $A$  und  $B$  auf  $K_{r'}(U')$  liegen, gilt  $\|U' - A\|^2 = \|U' - B\|^2 = (r')^2$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \|U' - A\|^2 - \|U' - B\|^2 \\ &= \|A\|^2 - 2\langle A | U' \rangle + \|U'\|^2 - \|B\|^2 + 2\langle B | U' \rangle - \|U'\|^2 \\ &= \|A\|^2 - \|B\|^2 + 2\langle B - A | U' \rangle. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\langle U' | B - A \rangle = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2),$$

also zu  $U' \in m_{AB}$ . Analog zeigt man, dass  $U'$  auch auf den anderen beiden Mittelsenkrechten liegt. Mit der Eindeutigkeit deren Schnittpunkts folgt  $U' = U$ . Der Rest der Behauptung folgt mit

$$r' = \|U' - A\| = \|U - A\| = r.$$

#

□

**Satz 10.7 (Peripheriewinkelsatz)** Seien  $A \neq B \in \mathbb{R}^2$  Punkte auf dem Kreis  $K_r(U)$  um einen Punkt  $U \in \mathbb{R}^2$  mit einem Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Seien weiter die Seiten der Gerade  $A \vee B$  mit  $S_1$  und  $S_2$  bezeichnet. Dann gilt für einen von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punkt  $C \in K_r(U) \cap S_1$

$$\angle ACB = \begin{cases} \frac{1}{2}\angle AUB & \text{für } U \in S_1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } U \in A \vee B, \\ \pi - \frac{1}{2}\angle AUB & \text{für } U \in S_2. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Winkelgröße  $\angle ACB$  nicht von der Wahl des Punkts  $C \in K_r(U) \cap S_1$  abhängig.  $\angle ACB$  heißt auch der **Peripheriewinkel**<sup>6</sup> des Kreisbogens  $K_r(U) \cap S_2$ .

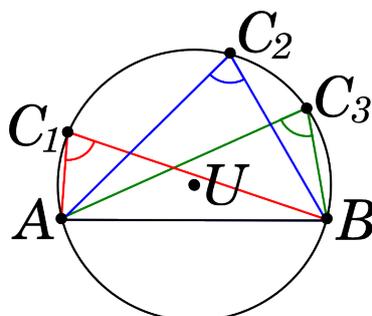


Abbildung III.7:  $U$  und die drei Punkte  $C_1, C_2, C_3$  liegen auf derselben Seite von  $A \vee B$ . Die markierten drei Winkel sind also kongruent.

*Beweis.* Sei  $C \in K_r(U) \cap S_1$  ein beliebiger aber fest gewählter Punkt. Dann unterteilt das Dreieck  $\triangle ABC$  das Innere des Kreises in vier durch die Lage auf den verschiedenen Seiten von  $A \vee B$ ,  $A \vee C$  und  $B \vee C$  definierte Teile und die drei Dreiecksseiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  selbst. So ergeben sich für den Beweis des Satzes sieben Fälle, von denen wir hier allerdings nur einen behandeln wollen.

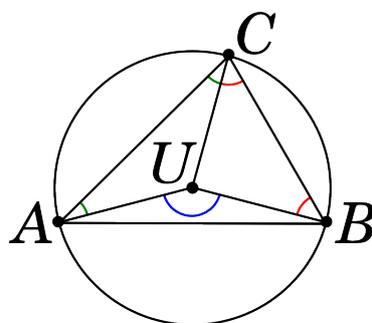


Abbildung III.8: Gleichfarbige Winkel sind gleich groß. Wenn  $U$  im Inneren des von  $\triangle ABC$  liegt, gilt  $\angle AUB = 2(\angle UCB + \angle UCA)$ .

Liege dafür  $U$  im Inneren des Dreiecks  $\triangle ABC$ . Nach dem Satz von der Winkelsumme für das Dreieck  $\triangle AUB$  gilt

$$\angle AUB = \pi - \angle UAB - \angle UBA.$$

Da  $U$  insbesondere im Inneren der Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle CBA$  liegt, gelten nach Proposition 7.1

$$\angle UAB = \angle CAB - \angle CAU \quad \text{und} \quad \angle UBA = \angle CBA - \angle CBU.$$

<sup>6</sup>Strenggenommen müssten wir natürlich von der Peripheriewinkelgröße sprechen.

Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned}\angle AUB &= \pi - (\angle CAB - \angle CAU) - (\angle CBA - \angle CBU) \\ &= (\pi - \angle CAB - \angle CBA) + (\angle CAU + \angle CBU).\end{aligned}$$

Mit dem Satz von der Winkelsumme für das Dreieck  $\triangle ABC$  folgt

$$\angle AUB = \angle ACB + (\angle CAU + \angle CBU).$$

Nun ist  $U$  auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$ , so dass  $\|U - A\| = \|U - B\| = \|U - C\|$  gilt und also die Dreiecke  $\triangle AUC$  und  $\triangle BUC$  gleichschenkelig sind. Insbesondere gilt nach Proposition 5.17

$$\angle CAU \simeq \angle ACU \quad \text{und} \quad \angle CBU \simeq \angle UCB.$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir

$$\angle AUB = \angle ACB + (\angle ACU + \angle UCB) = 2\angle ACB,$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen verwendet haben, dass  $U$  auch im Inneren des Winkels  $\angle ACB$  liegt. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen.  $\square$

**Übung** Zeigen Sie die übrigen Fälle im Beweis des Peripheriewinkelsatzes.

**Korollar 10.8 (Satz des Thales)** Seien  $A, U, B \in \mathbb{R}^2$  drei Punkte mit  $A \star U \star B$  und  $\|U - A\| = \|U - B\|$ . Ist dann  $C \in \mathbf{P}$  ein dritter Punkt auf dem Kreis  $K(U, A)$ , so ist der Winkel  $\angle ACB$  ein rechter.

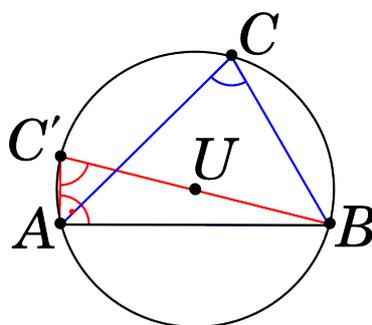
*Beweis.* Das ist gerade der Peripheriewinkelsatz für  $U \in A \vee B$ .  $\square$

**Satz 10.9 (Verschärfung des Sinussatzes)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Winkelgrößen  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , Seitenlängen  $(a, b, c)$  und Umkreis  $K_r(U)$ . Dann gilt

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung liege  $U$  auf derselben Seite von  $A \vee B$  wie  $C$ .<sup>7</sup> Nach dem bereits gezeigten Sinussatz genügt es für den Beweis des Satzes  $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$  zu zeigen. Da  $U$  und  $C$  auf derselben Seite von  $A \vee B$  liegen, liegt der zweite Schnittpunkt  $C'$  der Geraden  $B \vee U$  mit dem Kreis  $K_r(U)$  auch auf derselben Seite wie  $C$ .

<sup>7</sup>Ist dies nicht der Fall, so liegt  $U$  zwangsläufig auf derselben Seite von  $B \vee C$  wie  $A$ , und wir können nach einer Permutation der Punkte  $A, B, C$  denselben Beweis führen. Das schließt ausdrücklich auch den Fall mit ein, dass  $U$  auf der Strecke  $\overline{AB}$  liegt.



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt also weiterhin  $\angle AC'B = \gamma$ . Andererseits ist aber  $a' := \|C' - B\| = 2r$  leicht zu berechnen, und nach dem Satz des Thales ist  $\angle C'AB$  ein rechter Winkel. Da nach dem Korollar des bereits gezeigten Sinussatzes der Sinus eines Winkels in rechtwinkligen Dreiecken als Quotient von Gegenkathete und Hypotenuse ausgedrückt werden kann, gilt die zu zeigende Beziehung

$$\sin \gamma = \frac{c}{a'} = \frac{c}{2r}.$$

□

**Satz 10.10 (Eulergleichung)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Dann gilt  $3S = H + 2U$ .

*Beweis.* Nach Definition gilt für den Schwerpunkt  $3S = A + B + C$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \langle 3S \mid B - A \rangle &= \langle A + B + C \mid B - A \rangle \\ &= \langle A + B \mid B - A \rangle + \langle C \mid B - A \rangle \\ &= \langle 2U \mid B - A \rangle + \langle H \mid B - A \rangle, \end{aligned}$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen benutzt haben, dass der Umkreismittelpunkt  $U$  auf der Mittelsenkrechten  $m_{AB}$  und der Höhenschnittpunkt auf der Höhe  $h_C$  liegt (vgl. (III.6) bzw. (III.4)). Insgesamt folgt

$$\langle 3S - 2U - H \mid B - A \rangle = 0.$$

Analog kann man  $\langle 3S - 2U - H \mid C - A \rangle = 0$  zeigen. Nun sind aber die Punkte  $A, B, C$  in allgemeiner Lage, so dass insbesondere  $B - A$  und  $C - A$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  bilden. Es folgt  $3S - 2U - H = 0$  und somit der Satz. □

**Übung** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Zwei der drei Punkte  $S, H, U$  stimmen überein.
- (ii)  $S = H = U$ .
- (iii)  $\triangle ABC$  ist **gleichseitig**, es gilt also  $\|A - B\| = \|B - C\| = \|C - A\|$ .

**Korollar 10.11** Sei  $\triangle ABC$  ein (nicht gleichseitiges) Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$  und Umkreismittelpunkt  $U$ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- (a)  $H \star S \star U$ , insbesondere sind  $H, S, U$  kollinear.  
 (b)  $\frac{\|H-S\|}{\|U-S\|} = 2$ .

Die Gerade  $H \vee U$  heißt die **Eulergerade** von  $\triangle ABC$ .

*Beweis.* Aus  $3S = H + 2U$  folgt  $S = \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}U$ . Da nach der Übungsaufgabe in einem nicht gleichseitigen Dreieck Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt verschieden sind, folgt daraus  $H \star S \star U$  sowie

$$\|H - S\| = \left\| \frac{2}{3}H - \frac{2}{3}U \right\| = 2 \left\| \frac{1}{3}H - \frac{1}{3}U \right\| = 2\|S - U\| = 2\|U - S\|.$$

□

Die folgende Proposition ergibt sich aus einer kurzen Rechnung.

**Proposition 10.12** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Seitenmitten  $(A', B', C')$ . Dann sind  $A', B', C'$  in allgemeiner Lage. Das Dreieck  $\triangle A'B'C'$  heißt das **Mittendreieck** von  $\triangle ABC$ . Der Umkreis des Mittendreiecks  $\triangle A'B'C'$  heißt der **Feuerbachkreis** von  $\triangle ABC$ .

**Satz 10.13 (Feuerbachgleichung)** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Umkreismittelpunkt  $U$  und Feuerbachkreismittelpunkt  $F$ . Dann gilt  $3S = U + 2F$ .

*Beweis.* Sei  $S'$  der Schwerpunkt des Mittendreiecks  $\triangle A'B'C'$  von  $\triangle ABC$ . Es ist

$$S' = \frac{1}{3}(A' + B' + C') = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A + B)\right) = \frac{1}{3}(A + B + C) = S.$$

Aufgrund von

$$A' - B' = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B - A)$$

ist  $A' \vee B' \parallel A \vee B$ . Wegen  $m_{AB} \perp (A \vee B)$  folgt deshalb aus dem Wechselwinkelsatz, dass  $m_{AB} \perp (A' \vee B')$  ist. Zusammen mit  $C' \in m_{AB}$  impliziert dies  $h_{C'} = m_{AB}$ . Analog zeigt man  $h_{B'} = m_{AC}$  und  $h_{A'} = m_{BC}$ , d.h. die Mittelsenkrechten von  $\triangle ABC$  sind die Höhen von  $\triangle A'B'C'$ . Für den Höhenschnittpunkt  $H'$  des Mittendreiecks  $\triangle A'B'C'$  erhalten wir deshalb  $H' = U$ . Die Eulergleichung für das Mittendreieck  $\triangle A'B'C'$  liefert  $3S' = H' + 2F$  und deshalb  $3S = U + 2F$ , womit die Behauptung gezeigt ist. □

Die im gerade geführten Beweis erhaltene Identifikation der Mittelsenkrechten von  $\triangle ABC$  mit den Höhen des Mittendreiecks  $\triangle A'B'C'$  liefert im übrigen einen alternativen Beweis dafür, dass sich die Mittelsenkrechten von  $\triangle ABC$  in genau einem Punkt schneiden.

**Korollar 10.14** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Schwerpunkt  $S$ , Höhenschnittpunkt  $H$ , Umkreismittelpunkt  $U$  und Feuerbachkreismittelpunkt  $F$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Das Dreieck  $\triangle ABC$  ist genau dann gleichseitig, wenn  $S = H = U = F$  ist.

(b) Ist  $\triangle ABC$  nicht gleichseitig, dann liegt  $F$  auf der Eulergerade. Genauer gilt:

$$F = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}U = \frac{1}{4}H + \frac{3}{4}S, \quad S = \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}U,$$

insbesondere  $H \star F \star S$  sowie  $F \star S \star U$ .

*Beweis.* Aussage (a) ergibt sich direkt aus der Übungsaufgabe nach 10.10: Ist  $S = H = U$ , so ist  $\triangle ABC$  gleichseitig; ist umgekehrt  $\triangle ABC$  gleichseitig, so ist  $S = H = U$  und deshalb  $2F = 3S - U = 2S$ , was  $F = S$  zur Folge hat. Im Folgenden sei  $\triangle ABC$  nicht gleichseitig. Aus Euler- und Feuerbachgleichung erhalten wir  $U + 2F = 3S = H + 2U$  und damit  $F = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}U$  sowie  $S = \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}U$ . Des weiteren ist  $2U + 4F = 6S$ , was  $(2U + 4F) - (H + 2U) = 3S$  impliziert. Das liefert  $4F - H = 3S$  und deshalb  $F = \frac{1}{4}H + \frac{3}{4}S$ .  $\square$

**Proposition 10.15** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Umkreisradius  $r$ , der Radius des Feuerbachkreises sei durch  $r'$  gegeben. Dann gilt:  $r' = \frac{1}{2}r$ .

*Beweis.* Aus der Feuerbachgleichung erhalten wir  $0 = 3S - U - 2F = A + B + C - U - 2F = A - U + 2(\frac{1}{2}(B + C) - F)$  und somit  $U - A = 2(A' - F)$ , wobei wir wie üblich  $A' := \frac{1}{2}(B + C)$  gesetzt haben. Insbesondere ist  $\|A - U\| = 2\|A' - F\|$  und deshalb  $r = 2r'$ .  $\square$

**Satz 10.16** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann liegen die folgenden Punkte auf dem Feuerbachkreis von  $\triangle ABC$ :

- die Seitenmitten  $A', B', C'$ ,
- die Fußpunkte der Höhen  $h_A, h_B, h_C$ ,
- die Mitten der Höhenabschnitte zwischen dem Höhenschnittpunkt  $H$  und dem jeweiligen Eckpunkt, d.h.  $\frac{1}{2}(H + A), \frac{1}{2}(H + B), \frac{1}{2}(H + C)$ .

Aus diesem Grund wird der Feuerbachkreis auch der **Neunpunktekreis** genannt.

*Beweis.* Die Seitenmitten  $A', B', C'$  liegen nach Definition des Feuerbachkreises auf demselbigen. Auch die Mitten der Höhenabschnitte liegen auf dem Feuerbachkreis,

denn: Wegen 10.14 ist  $H = 4F - 3S$  und deshalb

$$\begin{aligned} \|F - \frac{1}{2}(H + A)\| &= \|F - \frac{1}{2}(4F - 3S + A)\| = \|F - \frac{1}{2}(4F - (B + C))\| = \|F - \frac{1}{2}(B + C)\| \\ &= \|F - A'\|. \end{aligned}$$

Da  $A'$  auf dem Feuerbachkreis von  $\triangle ABC$  liegt, liegt auch  $\frac{1}{2}(H + A)$  auf dem Feuerbachkreis von  $\triangle ABC$ . Die Argumentation für  $\frac{1}{2}(H + B)$  bzw.  $\frac{1}{2}(H + C)$  ist analog.  $\#$

Es bleibt zu zeigen, dass die Höhenfußpunkte auf dem Feuerbachkreis liegen. Für den Fall, dass das Dreieck  $\triangle ABC$  gleichseitig ist, ist dies unmittelbar klar, denn dann stimmen der

Höhenschnittpunkt  $H$  und der Umkreismittelpunkt  $U$  überein, und somit sind die Fußpunkte der Höhen genau die Seitenmitten  $A', B', C'$ . Im Folgenden sei das Dreieck  $\triangle ABC$  nicht gleichseitig. Sei  $e$  die Eulergerade des Dreiecks  $\triangle ABC$ , und sei  $P$  der Höhenfußpunkt von  $h_C$ . Ist  $e \perp (A \vee B)$ , so ist  $e = m_{AB}$ . Aufgrund von  $H \in e$  ist dann  $P = C'$ , weshalb  $P$  auf dem Feuerbachkreis liegt. Im Folgenden sei  $e \not\perp (A \vee B)$ . Sei  $Q$  der Fußpunkt des Lotes von  $F$  auf  $A \vee B$ . Es ist  $Q = \frac{1}{2}(P + C')$ ,

denn: Im Fall  $A \vee B \parallel e$  folgt die Behauptung mit Hilfe des Diagonalensatzes sehr leicht aus der Gleichung  $F = \frac{1}{2}(H + U)$ . Im Fall  $A \vee B \not\parallel e$  argumentieren wir wie folgt. Sei  $g$  die Parallele zu  $A \vee B$  durch  $H$ ,  $Q' := (Q \vee F) \cap g$  und  $C'' := (U \vee C') \cap g$  (die Schnittpunkte existieren wegen  $Q \vee (F \perp g)$  und  $U \vee (C' \perp g)$ ). Es ist  $Q' \neq H$ , andernfalls wäre  $H \in Q \vee F$  und damit  $Q \vee F = e$ , was  $e \perp (A \vee B)$  zur Folge hätte, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{\|H - C''\|}{\|H - Q'\|} = \frac{\|H - U\|}{\|H - F\|} = 2.$$

Aus  $U \star F \star H$  ergibt sich leicht  $C'' \star Q' \star H$ . Wir erhalten  $Q' = \frac{1}{2}(H + C'')$  und deshalb  $Q = \frac{1}{2}(P + C')$ . #

Bei Spiegelung an der durch den Mittelpunkt  $F$  des Feuerbachkreises verlaufenden Geraden  $F \vee Q$  wird der Feuerbachkreis in sich überführt. Da  $C'$  auf dem Feuerbachkreis liegt, folgt aufgrund von  $Q = \frac{1}{2}(P + C')$  und  $(F \vee Q) \perp (A \vee B) = P \vee C'$ , dass der Punkt  $P$  ebenfalls auf dem Feuerbachkreis liegt. Analog zeigt man, dass auch die anderen Höhenfußpunkte auf dem Feuerbachkreis liegen.  $\square$

---

## Nichteuklidische ebene Geometrie

---

In diesem Kapitel wollen wir das Poincarémodell der hyperbolischen Ebene studieren, ein Modell einer Hilbertebene mit Stetigkeitsaxiom, die das Parallelenaxiom ( $P$ ) nicht erfüllt. Hiermit ist dann auch klar, dass das ungeliebte Parallelenaxiom für die Definition der Euklidischen Ebene tatsächlich gebraucht wird.

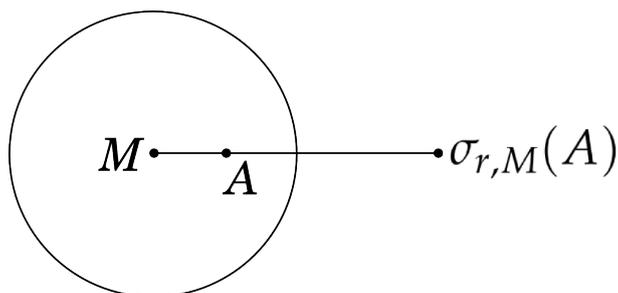
Das Poincarémodell wird über einen Kreis in der Euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$  eingeführt. Bevor wir dies tun, wollen wir daher noch einige nützliche Konzepte im Kontext zu Kreisen in  $\mathbb{E}$  einführen.

### §11 Inversion am Kreis

**Definition 11.1** Für einen Kreis  $K_r(M)$  in  $\mathbb{E}$  definieren wir eine Abbildung  $\sigma_{r,M} : \mathbb{R}^2 \setminus \{M\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ , indem wir jedem  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  den eindeutig bestimmten Punkt  $\sigma_{r,M}(A)$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{MA}$  mit

$$\|M - A\| \cdot \|M - \sigma_{r,M}(A)\| = r^2$$

zuordnen. Die Abbildung  $\sigma_{r,M}$  heißt die **Inversion** oder auch **Spiegelung** am Kreis  $K_r(M)$ , und  $\sigma_{r,M}(A)$  heißt das bezüglich  $K_r(M)$  zu  $A$  **Inverse**.

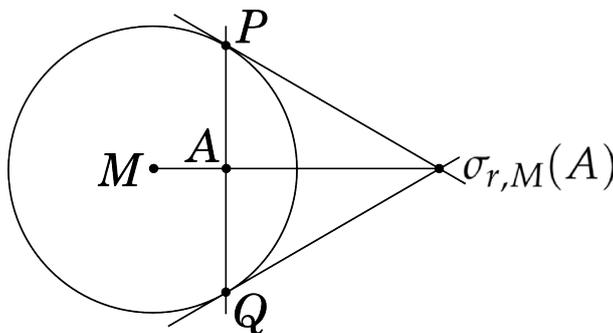


**Proposition 11.2** Sei  $K_r(M)$  ein Kreis in  $\mathbb{E}$ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

- (a)  $\sigma_{r,M} \circ \sigma_{r,M} = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$ . Insbesondere ist  $\sigma_{r,M}$  bijektiv und zu sich selbst invers.
- (b)  $\sigma_{r,M}$  bildet Punkte im Inneren von  $K_r(M)$  auf Punkte außerhalb von  $K_r(M)$  ab und umgekehrt. Punkte auf  $K_r(M)$  werden auf sich selbst abgebildet.

*Beweis.* Folgt unmittelbar aus der Definition der Inversion  $\sigma_{r,M}$ . □

**Proposition 11.3** Sei  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  ein Punkt innerhalb eines Kreises  $K_r(M)$  in  $\mathbb{E}$ . Sei  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  das Lot von  $A$  auf der Verbindungsgeraden  $A \vee M$ , und seien  $P$  und  $Q$  die Schnittpunkte von  $g$  mit  $K_r(M)$ . Schreiben wir schließlich  $t_P$  für die Tangente an  $K_r(M)$  in  $P$  und  $t_Q$  für die Tangente an  $K_r(M)$  in  $Q$ . Dann schneiden sich die drei Geraden  $t_P$ ,  $t_Q$  und  $A \vee M$  im Punkt  $\sigma_{r,M}(A)$ .



*Beweis.* Aus Symmetriegründen ist klar, dass die drei Geraden  $t_P$ ,  $t_Q$  und  $A \vee M$  einen gemeinsamen Schnittpunkt  $S$  haben. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle MAP$  und  $\triangle MPS$  haben dieselbe Winkelgröße bei  $M$ . Mit dem Korollar des Sinussatzes folgt

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - P\|} = \frac{\|M - P\|}{\|M - S\|},$$

also

$$\|M - A\| \cdot \|M - S\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Da  $\sigma_{r,M}(A)$  der einzige Punkt auf dem Strahl  $\overrightarrow{MA}$  mit dieser Eigenschaft ist, gilt  $S = \sigma_{r,M}(A)$  und somit die Behauptung. □

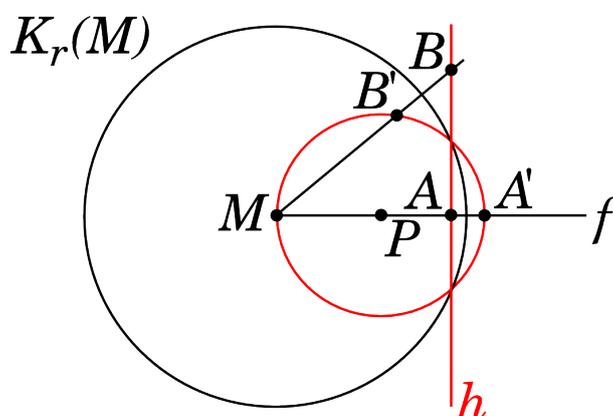
**Bemerkung 11.4** Proposition 11.3 liefert eine Konstruktion von Inversen am Kreis<sup>8</sup> mit Zirkel und Lineal.

**Proposition 11.5** Sei  $K_r(M)$  ein Kreis in  $\mathbb{E}$ ,  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ ,  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Gerade durch  $M$ ,  $h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Gerade mit  $M \notin h$  und  $K$  ein Kreis durch  $M$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

<sup>8</sup>übrigens auch für Punkte außerhalb von  $K_r(M)$

- (a)  $\sigma_{r,M}(\overrightarrow{MA} \setminus \{M\}) = \overrightarrow{MA} \setminus \{M\}$ ,  
 (b)  $\sigma_{r,M}(g \setminus \{M\}) = g \setminus \{M\}$ ,  
 (c)  $\sigma_{r,M}(h)$  ist ein Kreis durch  $M$ , bei dem der Punkt  $M$  entfernt ist,  
 (d)  $\sigma_{r,M}(K \setminus \{M\})$  ist eine Gerade, die nicht durch  $M$  geht.

*Beweis.* Aus der Definition von  $\sigma_{r,M}$  folgt unmittelbar  $\sigma_{r,M}(\overrightarrow{MA} \setminus \{M\}) \subseteq \overrightarrow{MA} \setminus \{M\}$ . Wegen  $\sigma_{r,M} \circ \sigma_{r,M} = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$  ergibt sich  $\overrightarrow{MA} \setminus \{M\} \subseteq \sigma_{r,M}(\overrightarrow{MA} \setminus \{M\})$  und damit Behauptung (a). Aussage (b) ist eine direkte Konsequenz aus (a). Wir wollen nun Behauptung (c) zeigen. Sei dazu  $f$  das Lot von  $M$  auf  $h$  und  $A = f \cap h$  der Schnittpunkt. Sei  $A' := \sigma_{r,M}(A)$ ,  $P := \frac{1}{2}(M + A')$  und  $s := \|A' - P\|$ .



Zu zeigen ist  $\sigma_{r,M}(h) = K_s(P) \setminus \{M\}$ . Wir zeigen zuerst die Inklusion „ $\subseteq$ “. Sei dafür  $B$  irgendein Punkt auf  $h$ . Dann hat die Gerade  $M \vee B$  noch einen zweiten Schnittpunkt  $B'$  mit dem Kreis  $K_s(P)$ ,

*denn:* Sonst wäre  $M \vee B$  die Tangente an  $K_s(P)$  in  $M$  und stünde somit senkrecht auf  $f = M \vee P$ . Dann wären  $h$  und  $M \vee B$  parallele Geraden durch  $B$ , also identisch. Das kann nicht sein, da dann  $M$  auf  $h$  läge. #

Nach dem Satz von Thales ist  $\angle MB'A'$  ein rechter Winkel. Andererseits ist nach Konstruktion  $\angle MAB$  ein rechter Winkel, so dass mit dem Korollar des Sinussatzes

$$\frac{\|M - B'\|}{\|M - A'\|} = \frac{\|M - A\|}{\|M - B\|}$$

folgt. Mit  $A' = \sigma_{r,M}(A)$  erhalten wir

$$\|M - B\| \cdot \|M - B'\| = \|M - A\| \cdot \|M - A'\| = r^2$$

und somit  $B' = \sigma_{r,M}(B)$ . Wir haben also gezeigt, dass für einen beliebigen Punkt  $B \in h$  das Inverse auf dem Kreis  $K_s(P)$  liegt. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ geht analog.

Behauptung (d) zeigt man analog zu Behauptung (b). □

**Definition 11.6** Seien  $K$  und  $K'$  zwei Kreise in  $\mathbb{E}$  mit  $|K \cap K'| = 2$  und  $g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$  eine Sekante an  $K$ . Wir sagen dann

- $K$  und  $g$  seien **orthogonal** zueinander, falls die Tangente an  $K$  in einem der beiden Schnittpunkte von  $K$  mit  $g$  orthogonal zu  $g$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn  $g$  durch den Mittelpunkt von  $K$  geht.<sup>9</sup>
- $K$  und  $K'$  seien **orthogonal** zueinander, falls die Tangenten an  $K$  und  $K'$  in einem ihrer Schnittpunkte orthogonal zueinander sind.

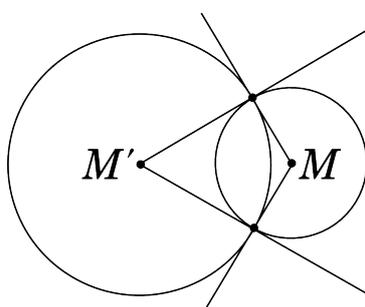
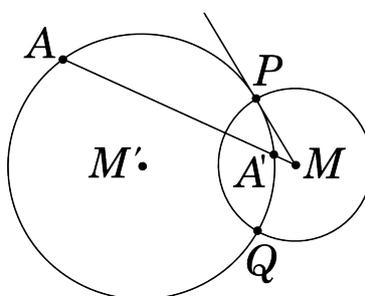


Abbildung IV.1: Sind die Tangenten in einem der beiden Schnittpunkte orthogonal zueinander, so aus Symmetriegründen auch im anderen.

**Proposition 11.7** Seien  $K = K_r(M)$  und  $K' = K_{r'}(M')$  Kreise in  $\mathbb{E}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Ist  $K'$  orthogonal zu  $K$ , so gilt  $\sigma_{r,M}(K') = K'$  und  $M \notin K'$ .
- (b) Enthält  $K'$  zwei bezüglich  $K$  zueinander inverse Punkte  $A$  und  $A'$ , so ist  $K'$  orthogonal zu  $K$ .

*Beweis.* Seien  $K$  und  $K'$  orthogonal zueinander mit Schnittpunkten  $P$  und  $Q$ . Dann ist die Tangente an  $K'$  in  $P$  durch die Gerade  $M \vee P$  gegeben (vgl. Abbildung IV.1). Sei  $A$  ein Punkt auf  $K' \setminus \{P, Q\}$  und  $A'$  der zweite Schnittpunkt von  $M \vee A$  mit  $K'$ .



<sup>9</sup>Denn wenn  $M$  der Mittelpunkt von  $K$  und  $S$  einer der Schnittpunkte von  $K$  mit  $g$  ist, so ist die Tangente an  $K$  in  $S$  orthogonal zu  $S \vee M$ , so dass sich die Orthogonalität von  $K$  und  $g$  in die Parallelität von  $g$  und  $S \vee M$  übersetzt. Die Behauptung folgt, da beide Geraden den Punkt  $S$  gemeinsam haben.

Dann gilt nach dem Sehnen-Tangenten-Satz

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = \|M - P\|^2 = r^2.$$

Nach Definition sind also  $A$  und  $A'$  invers zueinander bezüglich  $K$ ; es gilt also  $A' = \sigma_{r,M}(A)$ . Außerdem gilt  $\sigma_{r,M}(P) = P$  und  $\sigma_{r,M}(Q) = Q$ , so dass  $\sigma_{r,M}(K') \subseteq K'$  folgt. Aufgrund von  $\sigma_{r,M} \circ \sigma_{r,M} = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}}$  folgt  $K' \subseteq \sigma_{r,M}(K')$  und damit die Behauptung. Wäre schließlich  $M \in K'$ , so lägen nach der gerade erfolgten Diskussion für ein beliebiges  $A \in K'$  die drei kollinearen Punkte  $M, A, \sigma_{r,M}(A)$  allesamt auf dem Kreis  $K'$ , was nicht sein kann. Insgesamt haben wir Behauptung (a) gezeigt.

Da  $K'$  mit  $A$  und  $A'$  je einen Punkt innerhalb und außerhalb des Kreises  $K$  enthält, schneiden sich  $K$  und  $K'$  nach Satz 6.6 in genau zwei Punkten  $P$  und  $Q$ . Es gilt nach Definition der Inversion am Kreis

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = r^2 = \|M - P\|^2.$$

Mit der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Satzes folgt,<sup>10</sup> dass  $M \vee P$  eine Tangente an  $K'$  ist. Somit stehen die Tangenten von  $K$  und  $K'$  in  $P$  senkrecht aufeinander, und  $K$  und  $K'$  sind orthogonal zueinander.  $\square$

**Proposition 11.8** Seien  $K = K_r(M)$  und  $K' = K_{r'}(M')$  Kreise in  $\mathbb{E}$  mit  $M \notin K'$ . Dann ist  $\sigma_{r,M}(K')$  ein Kreis.

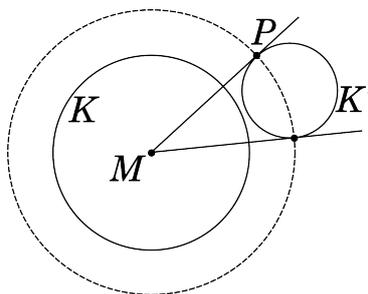
*Beweis.* Nehmen wir zunächst an,  $M$  liege außerhalb von  $K'$ . Sei dann  $P$  der Berührungspunkt einer Tangente  $t_P$  aus  $M$  an  $K'$ . Nach Proposition 11.7 gilt dann

$$\sigma_{\|M-P\|,M}(K') = K'.$$

Wir können also

$$\sigma_{r,M}(K') = (\sigma_{r,M} \circ \sigma_{\|M-P\|,M})(K')$$

schreiben und hoffen, dass sich die so entstandene Abbildung  $\vartheta := \sigma_{r,M} \circ \sigma_{\|M-P\|,M}$  leichter studieren lässt.



Seien für einen beliebigen Punkt  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  die Bilder  $A' := \sigma_{\|M-P\|,M}(A)$  und  $A'' := \sigma_{r,M}(A') = \vartheta(A)$  definiert. Nach Definition der Inversion gilt dann

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = \|M - P\|^2 \quad \text{und} \quad \|M - A'\| \cdot \|M - A''\| = r^2.$$

<sup>10</sup>Dass die Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Satzes stimmt, sieht man, wenn man sich den Beweis des Zwei-Sehnen-Satzes 9.6 und des Sehnen-Tangenten-Satzes 9.7 anschaut.

Teilen wir diese beiden Gleichungen durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{\|M - A''\|}{\|M - A\|} = \frac{r^2}{\|M - P\|^2}$$

also

$$\|M - \vartheta(A)\| = \|M - A''\| = \lambda \cdot \|M - A\| \quad \text{mit } \lambda = \frac{r^2}{\|M - P\|^2}.$$

Da nach Proposition 11.5 sowohl  $\sigma_{\|M-P\|,M}$  als auch  $\sigma_{r,M}$  Strahlen mit Ausgangspunkt  $M$  festlassen, folgt, dass  $\vartheta$  eine **zentrische Streckung** mit dem Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$  ist. Mit dem Strahlensatz lässt sich leicht überprüfen, dass  $\vartheta(K') = \sigma_{r,M}(K')$  tatsächlich ein Kreis ist.

Den zweiten Fall, dass  $M$  innerhalb von  $K'$  liegt, zeigen wir in einer Übungsaufgabe.

**Übung** Sei  $M$  innerhalb von  $K'$ , und seien  $A, B \in K'$  beliebige Punkte mit  $\sigma_{r,M}(A) =: A'$ ,  $\sigma_{r,M}(B) =: B'$  und  $A'', B''$  dem jeweils zweiten Schnittpunkt von  $M \vee A$  bzw.  $M \vee B$  mit  $K'$ . Nach dem Zwei-Sehnen-Satz ist dann

$$\|M - A\| \cdot \|M - A''\| = \|M - B\| \cdot \|M - B''\| = |\kappa_{K'}(M)|$$

unabhängig von  $A$  und  $B$ . Verwenden wir nun mit Vorzeichen ausgestattete Abstände von  $M$ , die so normiert sind, dass  $\kappa_{K'}(M)$  negativ ist, so ergibt sich  $\|M - A'\| = \lambda \cdot \|M - A''\|$  mit einem  $\lambda < 0$ . Es ist also  $\sigma_{r,M}(K')$  das Bild von  $K'$  unter einer zentrischen Streckung mit negativem Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ , also wieder ein Kreis. □

Ganz ähnlich kann man auch noch zeigen, dass die Inversion  $\sigma_{r,M}$  an einem beliebigen Kreis  $K_r(M)$  in  $\mathbb{E}$  eine **konforme**, also winkeltreue, Abbildung ist. Das führen wir hier aber nicht mehr vor.

**Definition 11.9** Seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  vier paarweise verschiedene Punkte. Dann heißt

$$\text{DV}(A, B, C, D) := \frac{\|A - C\|}{\|A - D\|} \cdot \frac{\|B - D\|}{\|B - C\|}$$

das **Doppelverhältnis** der Punkte  $A, B, C, D$ .

**Proposition 11.10** Sei  $K = K_r(M)$  ein Kreis in  $\mathbb{E}$ , und seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$  paarweise verschieden. Dann gilt

$$\text{DV}(\sigma_{r,M}(A), \sigma_{r,M}(B), \sigma_{r,M}(C), \sigma_{r,M}(D)) = \text{DV}(A, B, C, D),$$

die Inversion am Kreis  $K$  erhält also das Doppelverhältnis.

*Beweis.* Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir  $X' := \sigma_{r,M}(X)$  für  $X \in \{A, B, C, D\}$ .

Nach Definition der Inversion gilt

$$\|M - A\| \cdot \|M - A'\| = r^2 = \|M - C\| \cdot \|M - C'\|$$

und also

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - C\|} = \frac{\|M - C'\|}{\|M - A'\|}. \quad (\text{IV.1})$$

Dies werden wir in der kommenden Rechnung gelegentlich als Rechenhilfe benötigen.

Der erste Beweisschritt ist nun zu zeigen, dass

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} = \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|}$$

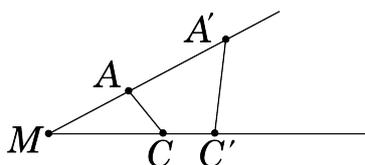
gilt. Das stimmt,

denn: Wir machen eine Fallunterscheidung.

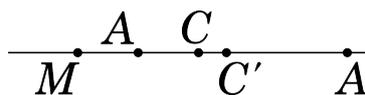
**Fall 1:  $M, A, C$  sind in allgemeiner Lage.** Da  $M, A, A'$  bzw.  $M, C, C'$  kollinear sind, haben die Dreiecke  $\triangle MAC$  und  $\triangle MC'A'$  dieselbe Winkelgröße bei  $M$ , es gilt also  $\angle AMC = \angle A'MC'$ . Wegen (IV.1) sind dann die Dreiecke  $\triangle MAC$  und  $\triangle MC'A'$  ähnlich, es gilt also

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} = \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|}$$

wie behauptet.



**Fall 2:  $M, A, C$  sind kollinear.** Dieser Fall zerfällt in drei Unterfälle, je nachdem wie die drei Punkte  $M, A, C$  angeordnet sind. Diese lassen sich alle sehr ähnlich beweisen; wir führen nur den Fall  $M \star A \star C$  vor. In diesem Fall folgt nach der Definition der Inversion am Kreis  $M \star C' \star A'$ .



Insgesamt gilt dann also

$$\|A - C\| = \|M - C\| - \|M - A\| \quad \text{und} \quad \|A' - C'\| = \|M - A'\| - \|M - C'\|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} &= \frac{\|M - C\| - \|M - A\|}{\|M - A'\| - \|M - C'\|} \\
 &\stackrel{(IV.1)}{=} \frac{\|M - A\| \cdot \|M - A'\| \cdot \|M - C'\|^{-1} - \|M - A\|}{\|M - C\| \cdot \|M - C'\| \cdot \|M - A\|^{-1} - \|M - C'\|} \\
 &= \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \cdot \frac{\|M - A'\| \cdot \|M - C'\|^{-1} - 1}{\|M - C\| \cdot \|M - A\|^{-1} - 1} \\
 &\stackrel{(IV.1)}{=} \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|},
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. #

Analog zeigt man

$$\frac{\|M - A\|}{\|M - D'\|} = \frac{\|A - D\|}{\|A' - D'\|},$$

hierzu muss man nur im gesamten bisherigen Beweis  $C$  und  $C'$  durch  $D$  und  $D'$  ersetzen. Kombinieren wir diese beiden Ergebnisse, so erhalten wir

$$\frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} \cdot \frac{\|A' - D'\|}{\|A - D\|} = \frac{\|M - A\|}{\|M - C'\|} \cdot \frac{\|M - D'\|}{\|M - A\|} = \frac{\|M - D'\|}{\|M - C'\|}.$$

Analog zeigt man

$$\frac{\|B - C\|}{\|B' - C'\|} \cdot \frac{\|B' - D'\|}{\|B - D\|} = \frac{\|M - D'\|}{\|M - C'\|}.$$

hierzu muss man nur im bisherigen Beweis  $A$  und  $A'$  durch  $B$  und  $B'$  ersetzen. Fügen wir dies zusammen, so erhalten wir

$$\frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} \cdot \frac{\|A' - D'\|}{\|A - D\|} = \frac{\|B - C\|}{\|B' - C'\|} \cdot \frac{\|B' - D'\|}{\|B - D\|},$$

was sich leicht in die Behauptung  $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D)$  umformen lässt. □

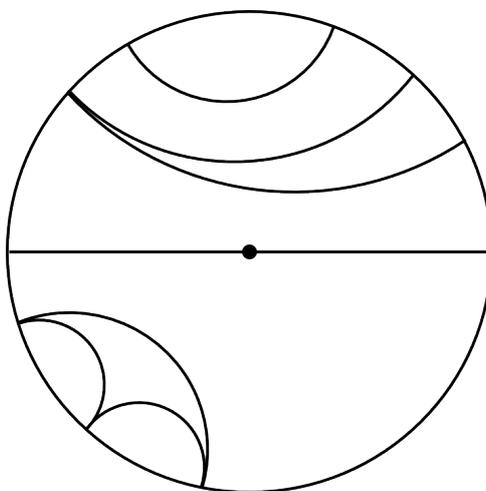
## §12 Das Poincarémodell

Sei in diesem Abschnitt stets  $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$  die Euklidische Standardebene,  $K = K_r(M)$  ein festgewählter Kreis und  $\sigma = \sigma_{r,M}$  die Inversion an  $K$ . Wir wollen nun das Poincarémodell der hyperbolischen Ebene als ein Beispiel einer Hilbertebene mit Stetigkeitsaxiom studieren, die das starke Parallelenaxiom nicht erfüllt.

Wir setzen dafür

$$\mathbf{P}_p := \{A \in \mathbb{R}^2 \mid A \text{ liegt im Inneren von } K\},$$

$$\mathbf{G}_p := \{g \cap \mathbf{P}_p \mid g \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}} \text{ orthogonal zu } K\} \cup \{K' \cap \mathbf{P}_p \mid K' \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ zu } K \text{ orthogonaler Kreis}\}.$$

Abbildung IV.2: Hyperbolische Geraden im Kreis  $K$ .

Die Elemente von  $\mathbf{P}_p$  nennen wir  $p$ -*Punkte* und die Elemente von  $\mathbf{G}_p$   $p$ -*Geraden*. Zur besseren Unterscheidbarkeit von den Konstruktionen in  $\mathbb{E}$  werden wir die entsprechenden Konstruktionen in  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p)$  künftig immer mit einem Index „ $p$ “ kennzeichnen. So soll etwa die Verbindungsgerade zweier Punkte  $A, B \in \mathbf{P}_p$  mit  $A \vee_p B$  bezeichnet werden.

**Bemerkung 12.1** Ein alternatives Modell der hyperbolischen Ebene zum Poincarémodell aus der Vorlesung wird durch die sogenannte **Poincaréhalbebene** geliefert. Hierbei ist die Punktmenge durch die komplexe obere Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

gegeben. Geraden in der Poincaréhalbebene sind gegeben durch senkrechte Euklidische Halbgeraden, die von der reellen Achse ausgehen und durch Euklidische Halbkreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse (hierbei und im Rest der Bemerkung identifizieren wir wie üblich  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ ).

(a) **Die Cayley-Abbildung**

$$\phi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

bildet die reelle Achse auf den Einheitskreis (bei dem genau ein Punkt fehlt) ab, und die Einschränkung

$$\psi := \phi|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

(b) Die Inversion am Kreis  $K_{\sqrt{2}}(-i)$  ist durch die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto (-i) \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i}$$

gegeben. Auf diese Weise erhält man eine geometrische Beschreibung der Cayley-Abbildung.

- (c) Die Abbildung  $\psi$  überführt Geraden in der Poincaréhalbebene in Geraden im Poincarémodell (bezüglich des Euklidischen Einheitskreises).

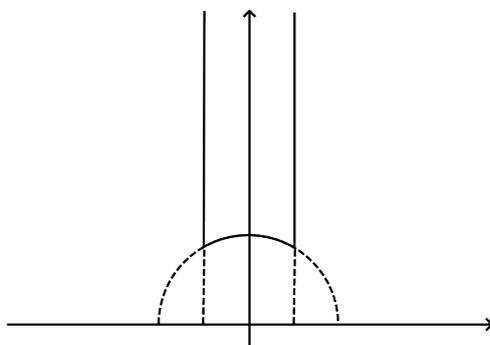


Abbildung IV.3: Der Standardfundamentbereich der Aktion von  $SL_2(\mathbb{Z})$  auf der oberen komplexen Halbebene als wird von drei hyperbolischen Geraden berandet.

**Proposition 12.2**  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p)$  ist eine Inzidenzebene.

*Beweis.* Wir wollen das Inzidenzaxiom  $(I_1)$  zeigen, dass also durch je zwei Punkte  $A, B \in \mathbf{P}_p$  genau eine Gerade in  $\mathbf{G}_p$  geht. Seien also  $A \neq B \in \mathbf{P}_p$ .

**Fall 1:**  $A, B, M$  sind kollinear in  $\mathbb{E}$ . Dann ist offensichtlich  $(A \vee B) \cap \mathbf{P}_p$  eine p-Gerade durch  $A$  und  $B$ . Weil in  $\mathbb{E}$  bereits  $(I_1)$  gilt, muss jede weitere p-Gerade durch  $A$  und  $B$  vom „zweiten Typ“ sein, also ein Durchschnitt eines zu  $K$  orthogonalen Kreises  $K'$  durch  $A, B$  mit  $\mathbf{P}_p$ . Eine solche Gerade gibt es aber nicht,

denn: Der zugehörige Kreis  $K'$  enthielte mit  $A, B$  auch  $\sigma(A), \sigma(B)$ . Wegen

$$A \vee \sigma(A) = A \vee M = A \vee B = M \vee B = \sigma(B) \vee B$$

enthielte also  $K'$  vier kollineare Punkte, was nicht sein kann. #

**Fall 2:**  $A, B, M$  sind in  $\mathbb{E}$  in allgemeiner Lage. Offensichtlich kann dann keine p-Gerade vom „ersten Typ“ durch  $A, B$  gehen. Andererseits enthält nach Teil (a) von Proposition 11.7 jeder zu  $K$  orthogonale Kreis  $K' \subseteq \mathbb{E}$  durch  $A, B$  auch den Punkt  $\sigma(A)$ . Die Punkte  $A, \sigma(A), B$  sind in allgemeiner Lage,<sup>11</sup> da sonst mit der Kollinearität von  $M, A, \sigma(A)$  auch  $M, A, B$  kollinear wären. Nach dem Umkreissatz 10.6 gibt es also tatsächlich einen Kreis  $K' \subseteq \mathbb{E}$  durch  $A, \sigma(A), B$ , und dieser ist mit diesen Eigenschaften eindeutig.  $K' \cap \mathbf{P}_p$  ist also der einzige Kandidat für eine p-Gerade durch  $A, B$ . Nach dem (b)-Teil von Proposition 11.7 sind wegen  $A, \sigma(A) \in K'$  die Kreise  $K$  und  $K'$  orthogonal zueinander, so dass  $K' \cap \mathbf{P}_p$  tatsächlich die eindeutige p-Gerade durch  $A, B$  ist.

Für  $(I_2)$  müssen wir zeigen, dass auf jeder p-Geraden mindestens zwei Punkte liegen. Für eine p-Gerade vom „ersten Typ“ ist dies einfach, denn diese ist der Durchschnitt einer Geraden

<sup>11</sup>Insbesondere gilt  $\sigma(A) \neq B$ .

$g \in \mathbf{G}_R$  durch  $M$  mit dem Inneren des Kreises  $K$ . Für einen beliebigen Schnittpunkt  $P$  von  $g$  mit  $K$  ist dann beispielsweise  $\frac{1}{2}(M + P)$  neben  $M$  ein zweiter Punkt. Eine  $p$ -Gerade vom „zweiten Typ“ ist der Durchschnitt eines zu  $K$  orthogonalen Kreises  $K'$  mit dem Inneren von  $K$ . Nach Definition ist  $|K \cap K'| = 2$ , nennen wir die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$ . Dann liegen zwischen den Strahlen  $\overrightarrow{MP}$  und  $\overrightarrow{MQ}$  unendlich viele Strahlen in  $\mathbb{E}$ , die alle paarweise verschiedene Schnittpunkte mit  $K'$  aufweisen.

Zeigen wir schließlich  $(I_3)$ , dass es also in  $\mathbf{P}_p$  drei Punkte in allgemeiner Lage gibt. Seien dafür  $A, B \in \mathbf{P}_p$  zwei Punkte, so dass  $A, B, M$  in  $\mathbb{E}$  in allgemeiner Lage sind. Dann ist  $A \vee_p B$  der Durchschnitt eines zu  $K$  orthogonalen Kreises  $K'$  durch  $A, B$  mit  $\mathbf{P}_p$ . Nach Teil (a) von Proposition 11.7 liegt dann  $M$  nicht auf  $A \vee_p B$ , so dass  $A, B, M$  auch in  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p)$  in allgemeiner Lage sind.  $\square$

**Proposition 12.3** *In  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p)$  gilt das starke Parallelenaxiom  $(P)$  nicht.*

*Beweis.* Sei  $A \neq M$  ein Punkt im Inneren von  $K$ . Dann ist etwa durch den Kreis  $K'$  um  $M' := \frac{1}{2} \cdot (A + \sigma(A))$  mit dem Radius  $r' := \frac{1}{2} \cdot \|A - \sigma(A)\|$  ein zu  $K$  orthogonaler Kreis gefunden. Seien  $P \neq Q$  die beiden Schnittpunkte von  $K$  mit  $K'$ . Dann sind nach der Definition von Orthogonalität die beiden Geraden  $g := M \vee P$  und  $h := M \vee Q$  Tangenten an  $K'$  in  $P$  bzw.  $Q$ . Insbesondere gilt für die Durchschnitte von  $p$ -Geraden

$$(g \cap \mathbf{P}_p) \cap (K' \cap \mathbf{P}_p) = (h \cap \mathbf{P}_p) \cap (K' \cap \mathbf{P}_p) = \emptyset.$$

Wegen  $P \neq Q$  haben wir so also zwei verschiedene  $p$ -Parallelen zu  $K' \cap \mathbf{P}_p$  durch  $M$  gefunden.  $\square$

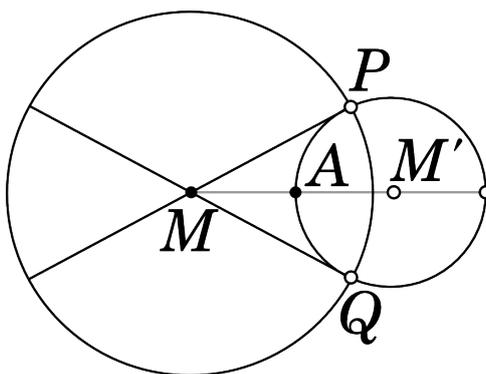


Abbildung IV.4:  $P$  und  $Q$  sind keine  $p$ -Punkte.

**Bemerkung 12.4** *In Wirklichkeit gilt nicht nur das starke Parallelenaxiom nicht, sondern es gilt vielmehr das **hyperbolische Axiom***

(H) *Ist  $A$  ein  $p$ -Punkt und  $g$  eine  $p$ -Gerade, die nicht durch  $A$  geht, dann gibt es unendlich viele zu  $g$  parallele  $p$ -Geraden durch  $A$ .*

Im Beispiel der Proposition findet man diese unendlich vielen  $p$ -Geraden durch  $M$  realisiert als  $(M \vee X) \cap \mathbf{P}_p$  mit  $X$  einem beliebigen der unendlich vielen Punkte auf dem Kreisbogen zwischen  $P$  und  $Q$  außerhalb von  $K'$ .

Um  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p)$  zu einer Hilbertebene zu machen, müssen wir als nächstes eine *Anordnung*  $\star_p$  einführen. Hierzu definieren wir für drei kollineare Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}_p$ .

- Falls  $A, B, C$  auf einer  $p$ -Geraden des „ersten Typs“ liegen, so setzen wir

$$A \star_p B \star_p C : \iff A \star B \star C.$$

- Jede  $p$ -Gerade des „zweiten Typs“ ist von der Gestalt  $K' \cap \mathbf{P}_p$  mit einem zu  $K$  orthogonalen Kreis  $K' = K_{r'}(M')$ . Die Schnittpunkte von  $K$  und  $K'$  bezeichnen wir mit  $P, Q$ . Der zugehörige Mittelpunkt  $M'$  liegt außerhalb von  $K$ ,

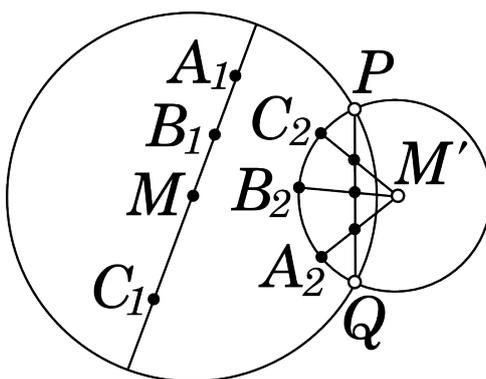
denn: Das Dreieck  $\triangle MM'P$  hat nach Definition der Orthogonalität einen rechten Winkel  $\angle MPM'$ . Mit dem Korollar des Sinussatzes und  $|\sin(x)| < 1$  für alle zulässigen Bogenmaße  $x \in (0, \pi)$  gilt  $\overline{MP} < \overline{MM'}$ . #

Liegen also  $A, B, C$  auf einer  $p$ -Geraden vom „zweiten Typ“. Dann betrachten wir die drei Schnittpunkte

$$A' := (P \vee Q) \wedge (A \vee M'), \quad B' := (P \vee Q) \wedge (B \vee M') \quad \text{und} \quad C' := (P \vee Q) \wedge (C \vee M').$$

Wir setzen nun

$$A \star_p B \star_p C : \iff A' \star B' \star C'.$$



**Proposition 12.5**  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p, \star_p)$  erfüllt die Anordnungsaxiome  $(A_1) - (A_4)$ .

*Beweis.* Die Axiome  $(A_1)$  und  $(A_3)$  folgen unmittelbar aus jeweiligen Axiomen für die Euklidische Standarebene  $\mathbb{E}$ .

Wir wollen nun  $(A_2)$  zeigen. Seien also  $A \neq B \in \mathbf{P}_p$  zwei Punkte. Nehmen wir zunächst an, ihre Verbindungsgerade  $A \vee_p B$  sei vom „ersten Typ“. Seien  $S, T$  die beiden Schnittpunkte von

$A \vee B$  mit  $K$ . Ohne Einschränkung dürfen wir  $S \star A \star B$  und  $A \star B \star T$  annehmen. Man kann leicht zeigen, dass die Punkte

$$P := \frac{1}{2} \cdot (S + A), \quad Q := \frac{1}{2} \cdot (A + B) \quad \text{und} \quad R := \frac{1}{2} \cdot (B + T)$$

die Bedingungen  $P \star A \star Q$  und  $Q \star B \star R$  erfüllen. Sei also nun  $A \vee_p B$  eine Gerade vom „zweiten Typ“, und seien wieder  $S, T$  die Schnittpunkte des zugehörigen euklidischen Kreises mit  $K$ . Wie gerade eben zeigt man, dass es in  $\overline{ST} \setminus \{S, T\}$  Punkte  $P', Q', R'$  gibt mit  $P' \star A' \star Q'$  und  $Q' \star B' \star R'$ . Man zeigt leicht, dass die Schnittpunkte

$$P := (A \vee_p B) \wedge (M' \vee P'), \quad Q := (A \vee_p B) \wedge (M' \vee Q') \quad \text{und} \quad R := (A \vee_p B) \wedge (M' \vee R')$$

die gewünschten Bedingungen erfüllen.

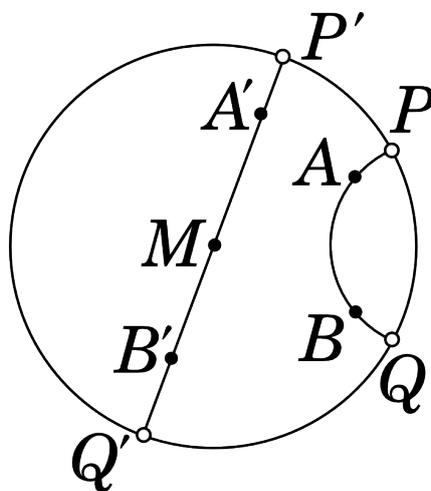
Um  $(A_4)$  zu zeigen, überlegt man sich

- Für eine  $p$ -Gerade  $g \cap \mathbf{P}_p$  vom „ersten Typ“ liegen  $A, B \in \mathbf{P}_p$  genau dann auf derselben  $p$ -Seite von  $g \cap \mathbf{P}_p$ , wenn  $A, B$  auf derselben Seite von  $g$  liegen.
- Für eine  $p$ -Gerade  $K' \cap \mathbf{P}_p$  vom „zweiten Typ“ liegen  $A, B \in \mathbf{P}_p$  genau dann auf derselben  $p$ -Seite von  $K' \cap \mathbf{P}_p$ , wenn  $A, B$  beide im Inneren oder beide außerhalb von  $K'$  liegen.

Axiom  $(A_4)$  folgt dann. □

Als nächstes wollen wir nun auf  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p, \star_p)$  einen *Kongruenzbegriff*  $\cong_p$  für  $p$ -Strecken einführen. Seien dafür  $A \neq B$  und  $A' \neq B'$  zwei Paare verschiedener Punkte in  $\mathbf{P}_p$ . Dann liegen die  $p$ -Strecken  $\overline{AB}^p$  und  $\overline{A'B'}^p$  auf  $p$ -Geraden, deren zugrundeliegenden Euklidischen Geraden bzw. Kreise jeweils zwei Schnittpunkte mit  $K$  haben. Der näher an  $A$  liegende Schnittpunkt zur Strecke  $\overline{AB}^p$  heiße  $P$ , der andere  $Q$ . Analog seien  $P'$  und  $Q'$  die Schnittpunkte zu  $\overline{A'B'}^p$ . Wir definieren dann

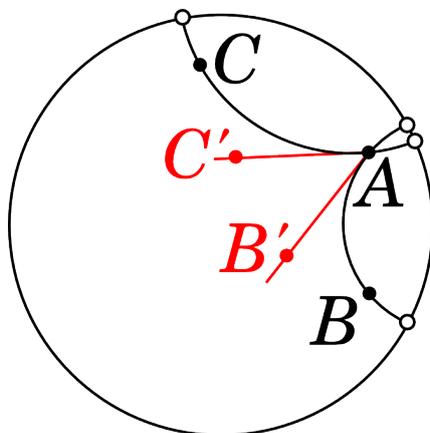
$$\overline{AB}^p \cong_p \overline{A'B'}^p : \iff DV(A, B, P, Q) = DV(A', B', P', Q').$$



Einen *Kongruenzbegriff*  $\simeq_p$  für *p*-Winkel führen wir über Euklidische „Tangentialstrahlen“ ein: Seien  $A, B, C$  drei *p*-Punkte in allgemeiner Lage. Diese definieren den *p*-Winkel  $\angle_p BAC$  als Vereinigung der *p*-Strahlen  $\overrightarrow{AB}^p$  und  $\overrightarrow{AC}^p$ . Letztere *p*-Strahlen liegen auf eindeutigen *p*-Geraden, denen jeweils eine Euklidische Gerade oder ein Euklidischer Kreis zugrundeliegt. Wir können nun in  $A$  an beide Euklidischen Figuren je eine Tangente legen.<sup>12</sup> Wir wählen dann auf jeder dieser Tangenten einen *p*-Punkt im *p*-Inneren von  $\angle_p BAC$  aus und nennen diese Punkte  $B'$  und  $C'$ . Für weitere drei *p*-Punkte  $D, E, F$  in allgemeiner Lage definieren wir so

$$\angle_p BAC \simeq_p \angle_p EDF : \iff \angle B'AC' = \angle E'DF'.$$

Wir schreiben auch  $\angle_p BAC$  für  $\angle B'AC'$  und nennen diesen Wert das *hyperbolische Bogenmaß* des *p*-Winkels  $\angle_p BAC$ .



**Übung**  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p, \star_p, \cong_p, \simeq_p)$  erfüllt die Kongruenzaxiome  $(K_1) - (K_6)$ .

Hierbei ist wieder klar, dass  $\cong_p$  und  $\simeq_p$  Äquivalenzrelationen sind. Für  $(K_1)$  und  $(K_4)$  ist also nichts zu zeigen. Schließlich gilt noch

**Proposition 12.6** In  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p, \star_p, \cong_p, \simeq_p)$  gilt das Stetigkeitsaxiom  $(S)$ .

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus dem Stetigkeitsaxiom für die Euklidische Standardebene  $\mathbb{E}$ , da die hyperbolische Anordnung über Euklidische Strecken definiert ist. Vergleiche hierzu auch den Beweis der Übungsaufgabe vor der Definition 6.7 der Euklidischen Ebene.  $\square$

Zusammengefasst erhalten wir

**Satz 12.7**  $(\mathbf{P}_p, \mathbf{G}_p, \star_p, \cong_p, \simeq_p)$  ist ein Beispiel einer Hilbertebene, in der das Stetigkeitsaxiom  $(S)$  und das hyperbolische Axiom  $(H)$  gelten.

Insbesondere ist hiermit die Frage nach der Unabhängigkeit des Parallelenpostulats beantwortet: Es gibt eine Hilbertebene, in der das Stetigkeitsaxiom  $(S)$  gilt, das starke Parallelenaxiom  $(P)$  aber nicht.

<sup>12</sup>Diese ist im Falle einer Gerade mit dieser identisch.

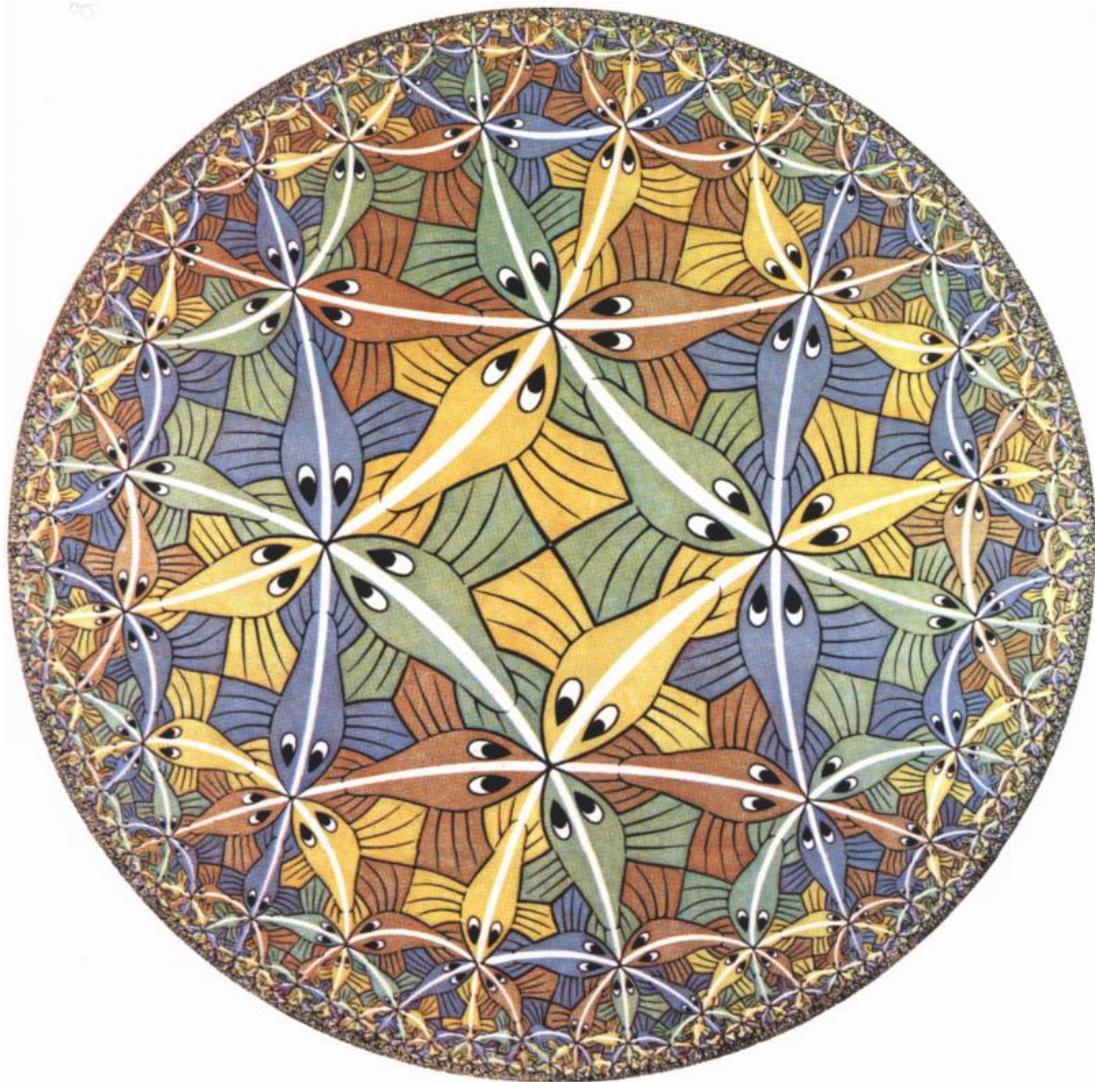


Abbildung IV.5: In „Kreislimit III“ nutzt M. C. Escher hyperbolische Geraden zur Parkettierung eines Kreises. Man sieht schön, wie die hyperbolische Metrik dafür sorgt, dass die Punkte auf dem Rand des Kreises unendlich weit entfernt liegen.

---

## Ebene projektive Geometrie

---

Wir wollen nun zunächst die Anordnungs- und Kongruenzaxiome vergessen und auf das Niveau der Inzidenzebenen zurückkehren. Analog der Theorie der affinen Ebenen aus Abschnitt §1 können wir so genannte projektive Ebenen studieren. Solche erhalten wir anschaulich aus affinen Ebenen, indem wir dort für jedes Büschel von Parallelen zwangsweise einen „unendlich fernen“ Schnittpunkt hinzunehmen.

### §13 Projektive Ebenen

**Definition 13.1** Sei  $\mathbf{P}$  eine Menge und  $\mathbf{G}$  eine Menge von Teilmengen von  $\mathbf{P}$ , so dass die Sprechweisen von Abschnitt §1 gelten. Das Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  heißt eine **projektive Ebene**, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind.

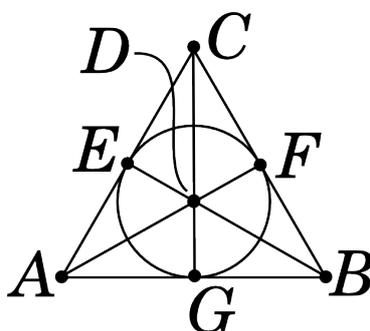
- (P<sub>1</sub>) Durch zwei verschiedene Punkte  $A \neq B \in \mathbf{P}$  existiert genau eine Gerade in  $\mathbf{G}$ . Diese heißt die **Verbindungsgerade**  $A \vee B$  von  $A$  und  $B$ .
- (P<sub>2</sub>) Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.
- (P<sub>3</sub>) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.
- (P<sub>4</sub>) Je zwei Geraden schneiden sich.

Offensichtlich ist jede projektive Ebene eine Inzidenzebene, aber keine affine Ebene.

**Beispiel 13.2** Es gibt eine projektive Ebene mit 7 Punkten und 7 Geraden, nämlich die **Fanoebene**. Diese ist gegeben als Paar  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  mit

$$\mathbf{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\},$$

$$\mathbf{G} = \{\{A, B, G\}, \{A, C, E\}, \{B, C, F\}, \{A, D, F\}, \{B, D, E\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}.$$



Es ist schnell überprüft, dass die Fanoebene tatsächlich die Axiome  $(P_1) - (P_4)$  erfüllt.

**Proposition 13.3** In einer projektiven Ebene  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  haben zwei verschiedene Geraden  $g \neq h \in \mathbf{G}$  einen eindeutigen Schnittpunkt  $g \wedge h$ .

*Beweis.* Nach  $(P_4)$  sind  $g$  und  $h$  nicht parallel, so dass die Behauptung mit Proposition 1.7 folgt.  $\square$

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Ebenen, den wir in den nächsten beiden Sätzen herausarbeiten wollen.

**Satz 13.4** Sei  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine affine Ebene. Dann schreiben wir

$$[\mathbf{G}] := \{[g] \mid g \in \mathbf{G}\}$$

für die Menge aller Parallelenbüschel in  $\mathbf{G}$  und setzen

$$\bar{\mathbf{P}} := \mathbf{P} \cup [\mathbf{G}] \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{G}} := \{g \cup \{[g]\} \mid g \in \mathbf{G}\} \cup \{[\mathbf{G}]\}.$$

Dann ist  $\bar{\mathbb{A}} := (\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{G}})$  eine projektive Ebene, der so genannte **projektive Abschluss** von  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ . In  $\bar{\mathbb{A}}$  heißt  $[g]$  der **unendlich ferne Punkt** von  $g \cup \{[g]\}$ , und  $[\mathbf{G}]$  die **unendlich ferne Gerade**.

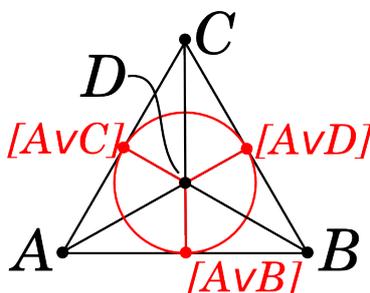


Abbildung V.1: Der projektive Abschluss der affinen Ebene mit vier Punkten (vgl. Abbildung II.3) ist die Fanoebene.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $(P_1)$  und betrachten dafür zwei Punkte  $A \neq B \in \bar{\mathbf{P}}$ .

**Fall 1:**  $A, B \in \mathbf{P}$ . Dann gibt es nach  $(I_1)$  genau eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  mit  $A, B \in g$ . Offensichtlich ist also  $g \cup \{[g]\} \in \bar{\mathbf{G}}$  die eindeutig bestimmte Gerade durch  $A$  und  $B$ .

**Fall 2:**  $A \in \mathbf{P}, B = [g] \in [\mathbf{G}]$ . Nach dem starken Parallelenaxiom  $(P)$  gibt es genau eine Parallele  $h$  zu  $g$  durch  $A$ . Es gilt dann  $[h] = [g]$ , so dass  $h \cup [h] \in \bar{\mathbf{G}}$  die eindeutig bestimmte Gerade durch  $A$  und  $[g]$  ist.

**Fall 3:**  $A = [g], B = [h] \in [\mathbf{G}]$ . Offenbar ist  $[\mathbf{G}]$  die eindeutig bestimmte Gerade durch  $[g]$  und  $[h]$ .

Wir wollen nun  $(P_2)$  zeigen, dass also jede Gerade durch mindestens drei Punkte geht. Für jedes  $g \in \mathbf{G}$  gilt nach  $(I_2)$  sofort  $|g \cup \{[g]\}| \geq 3$ , so dass  $|[\mathbf{G}]| \geq 3$  zu zeigen bleibt, dass es also in einer affinen Ebene mindestens drei Parallelenklassen gibt. Dies gilt,

*denn:* Nach  $(I_3)$  gibt es in einer affinen Ebene stets drei Punkte  $A, B, C$  in allgemeiner Lage. Diese werden nach  $(I_1)$  durch die eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden  $A \vee B, A \vee C$  und  $B \vee C$  verbunden. Nach  $(P)$  gibt es außerdem genau eine zu  $B \vee C$  parallele Gerade  $g$  durch  $A$ , so dass mit  $A \vee B, A \vee C$  und  $g$  drei paarweise verschiedene Geraden durch  $A$  gehen. Diese sind damit auch paarweise nicht parallel, was die Behauptung zeigt. #

Um  $(P_3)$  zu zeigen betrachten wir drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$ , die nicht auf einer gemeinsamen Geraden aus  $\mathbf{G}$  liegen. Diese gibt es, weil  $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$  das Inzidenzaxiom  $(I_3)$  erfüllt. Offensichtlich geht dann aber auch keine der Geraden  $g \cup \{[g]\}$  aus  $\bar{\mathbf{G}}$  durch alle drei Punkte  $A, B, C$ . Die Behauptung folgt, da  $[\mathbf{G}]$  leeren Schnitt mit  $\mathbf{P}$  hat.

Um abschließend  $(P_4)$  zu beweisen, müssen wir zeigen, dass zwei beliebige Geraden aus  $\bar{\mathbf{G}}$  sich schneiden.

**Fall 1.** Seien  $g \cup \{[g]\}$  und  $h \cup \{[h]\}$  zwei verschiedene Geraden in  $\bar{\mathbf{G}}$ . Falls bereits  $g$  und  $h$  als Geraden in  $\mathbf{G}$  nicht parallel sind, so schneiden sich die beiden Geraden in  $\mathbf{P}$ . Sind  $g$  und  $h$  andernfalls parallel, so ist  $[g] = [h]$  ein Schnittpunkt.

**Fall 2.**  $[\mathbf{G}]$  und eine beliebige andere Gerade  $g \cup \{[g]\}$  schneiden sich in  $[g]$ . □

**Satz 13.5** Sei  $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine projektive Ebene und  $g \in \mathbf{G}$  eine Gerade. Dann ist  $\mathbb{P}_g := (\mathbf{P}_g, \mathbf{G}_g)$  mit

$$\mathbf{P}_g := \mathbf{P} \setminus g \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_g := \{f \cap \mathbf{P}_g \mid f \in \mathbf{G} \setminus \{g\}\} = \{f \setminus \{f \wedge g\} \mid f \in \mathbf{G} \setminus \{g\}\}$$

eine affine Ebene.

*Beweis.* Seien  $A \neq B \in \mathbf{P}_g$  zwei verschiedene Punkte. Damit in  $\mathbb{P}_g$  das erste Inzidenzaxiom  $(I_1)$  gilt, müssen wir zeigen, dass es genau eine Gerade  $f \in \mathbf{G}_g$  durch  $A$  und  $B$  gibt. Aber  $A$  und  $B$  liegen ja insbesondere auch in  $\mathbf{P}$ , so dass es nach  $(P_1)$  für  $\mathbb{P}$  genau eine Gerade  $f \in \mathbf{G}$  durch  $A$  und  $B$  gibt. Wegen  $A, B \in \mathbf{P}_g$  ist  $f \neq g$ . Mit  $f \cap \mathbf{P}_g$  gibt es daher eine Gerade in  $\mathbf{G}_g$  durch  $A$  und  $B$ . Ist andererseits  $h \cap \mathbf{P}_g$  eine Gerade in  $\mathbf{G}_g$ , auf der die Punkte  $A$  und  $B$  liegen, dann ist  $h$  eine Gerade aus  $\mathbf{G}$  durch  $A$  und  $B$  und deshalb bereits mit  $f$  identisch. Es folgt die Eindeutigkeit von  $f \cap \mathbf{P}_g$ .

Nun wollen wir  $(I_2)$  zeigen. Sei dafür  $f \cap \mathbf{P}_g$  eine beliebige Gerade. Auf der zugehörigen Geraden  $f \in \mathbf{G}$  liegen nach  $(P_2)$  mindestens 3 Punkte. Die Behauptung folgt mit  $f \cap \mathbf{P}_g = f \setminus \{f \wedge g\}$ .

Um  $(I_3)$  zu zeigen nehmen wir an, die Menge der Punkte  $\mathbf{P}_g$  sei eine Gerade in  $\mathbf{G}_g$ , und wollen dies zum Widerspruch führen. Es gäbe dann nämlich eine Gerade  $f \in \mathbf{G} \setminus \{g\}$  mit

$$\mathbf{P}_g = f \cap \mathbf{P}_g = f \setminus \{f \wedge g\},$$

so dass sich diese Gerade als  $f = \mathbf{P}_g \cup \{f \wedge g\}$  schreiben ließe. Nach  $(P_2)$  gäbe es auf  $f$  einen von  $f \wedge g$  verschiedenen Punkt  $A$  und auf  $g$  einen von  $f \wedge g$  verschiedenen Punkt  $B$ , und nach  $(P_1)$  ginge eine eindeutige Gerade  $h := A \vee B$  durch diese beiden Punkte. Nach Konstruktion wäre  $h$  sowohl von  $f$  als auch von  $g$  verschieden, es gälte also  $f \wedge h = A$  und  $g \wedge h = B$ . Es folgte dann

$$h = \mathbf{P} \cap h = (\mathbf{P}_g \cup g) \cap h \subseteq (f \cup g) \cap h = (g \cap h) \cup (f \cap h) = \{A, B\},$$

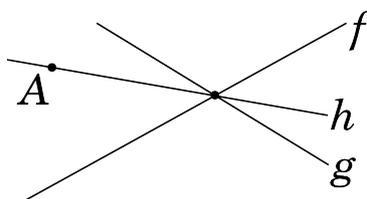
was offensichtlich im Widerspruch zu  $(P_2)$  steht. Die Menge  $\mathbf{P}_g$  ist also keine Gerade in  $\mathbf{G}_g$ , was zu zeigen war.

Es bleibt das starke Parallelenaxiom  $(P)$  zu zeigen. Sei dafür  $A \in \mathbf{P}_g$  ein Punkt und  $f_g := f \cap \mathbf{P}_g \in \mathbf{G}_g$  eine Gerade. Falls  $A$  schon auf  $f_g$  liegt, ist letztere bereits eine mögliche parallele Gerade durch  $A$ . Gäbe es in  $\mathbf{G}_g$  außerdem noch eine weitere Gerade  $h_g \parallel f_g$  durch  $A$ , so wäre diese wegen  $A \in f_g \cap h_g$  und der Parallelität der beiden Geraden mit  $f_g$  identisch. Wir haben also für  $A \in f_g$  die Behauptung gezeigt und können von nun an annehmen, dass  $A$  nicht auf  $f_g$  liegt.

Wir zeigen zunächst die Existenz. Wegen  $A \in \mathbf{P}_g$  liegt  $A$  nicht auf  $g$ . Wir setzen nun  $h := A \vee (f \wedge g) \in \mathbf{G}$ . Nun liegt  $A$  weder auf  $f$  noch auf  $g$ , so dass  $f, g, h$  paarweise verschieden sind und nach Konstruktion  $h \wedge g = f \wedge g = h \wedge f$  gilt. Wenn wir nun  $h_g := h \cap \mathbf{P}_g = h \setminus \{h \wedge g\}$  setzen, dann gilt  $A \in h_g$  und

$$h_g \cap f_g = h \cap f \cap \mathbf{P}_g = (h \cap g) \cap \mathbf{P}_g = \emptyset.$$

Es folgen  $h_g \parallel f_g$  und  $A \in h_g$ .



Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir eine weitere Gerade  $h'_g \in \mathbf{G}_g$  mit  $h'_g \parallel f_g$  und  $A \in h'_g$ . Dann existiert eine Gerade  $h' \in \mathbf{G} \setminus \{g\}$  mit  $h'_g = h' \cap \mathbf{P}_g = h' \setminus \{h' \wedge g\}$ . Wir können dann

$$h' = h'_g \cup \{h' \wedge g\} \quad \text{und} \quad f = f_g \cup \{f \wedge g\}$$

schreiben. Da  $A$  nicht auf  $f_g$  liegt, sind  $f_g$  und  $h'_g$  verschieden; wegen ihrer Parallelität haben sie also leeren Schnitt. Mit  $(P_4)$  haben  $h'$  und  $f$  somit den eindeutigen Schnittpunkt

$$h' \wedge f = h' \wedge g = f \wedge g.$$

Da  $A$  in  $h'_g \subseteq h'$  liegt, folgt

$$h' = A \vee (h' \wedge f) = A \vee (f \wedge g) = h$$

und somit auch  $h'_g = h_g$ . □

**Bemerkung 13.6** Für eine affine Ebene  $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  ist nach Konstruktion  $\bar{\mathbb{A}}_{[\mathbf{G}]} = \mathbb{A}$ .

**Definition 13.7** Seien  $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  und  $\mathbb{P}' = (\mathbf{P}', \mathbf{G}')$  projektive Ebenen. Eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  heißt **projektiver Isomorphismus**, wenn sie bijektiv ist und alle Geraden  $g \in \mathbf{G}$  auf Geraden  $\varphi(g) \in \mathbf{G}'$  abbildet. Ist hierbei  $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ , so heißt  $\varphi$  ein **projektiver Automorphismus** von  $\mathbb{P}$ . Die Menge der projektiven Automorphismen von  $\mathbb{P}$  wird mit  $\text{Aut}(\mathbb{P})$  bezeichnet.

Natürlich ist für beliebige projektive Ebenen  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{P}'$  mit  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  auch  $\varphi^{-1} : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}$  ein projektiver Isomorphismus. Insbesondere ist für eine beliebige projektive Ebene  $\mathbb{P}$  die Menge  $\text{Aut}(\mathbb{P})$  zusammen mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

**Satz 13.8** Sei  $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine projektive Ebene. Wir setzen für  $A \in \mathbf{P}$

$$A^* := \{g \in \mathbf{G} \mid A \in g\} \subseteq \mathbf{G} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^* := \{A^* \mid A \in \mathbf{P}\}.$$

Dann ist  $\mathbb{P}^* := (\mathbf{G}, \mathbf{P}^*)$  eine projektive Ebene und wird die zu  $\mathbb{P}$  **duale projektive Ebene** genannt.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir  $(P_1)$ . Seien dafür  $g \neq h \in \mathbf{G}$ . Dann gibt es genau ein  $A^* \in \mathbf{P}^*$  mit  $g, h \in A^*$ ,

denn: Für  $A^* \in \mathbf{P}^*$  gilt

$$g, h \in A^* \iff A \in g \text{ und } A \in h \iff A = g \wedge h.$$

#

Die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade von  $g$  und  $h$  in  $\mathbf{P}^*$  ist also durch  $g \vee h = (g \wedge h)^*$  gegeben.

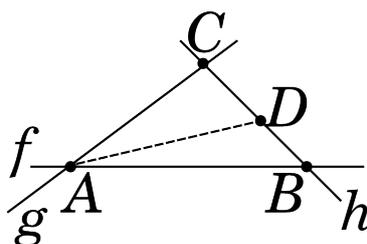
Nun zeigen wir auch  $(P_2)$ , dass es also für jedes  $A \in \mathbf{P}$  die Menge  $A^*$  mindestens drei Elemente hat, was gleichbedeutend dazu ist, dass durch jeden Punkt  $A \in \mathbf{P}$  in  $\mathbb{P}$  mindestens drei Geraden gehen. Das stimmt,

denn: Da die projektive Ebene  $\mathbb{P}$  das Axiom  $(P_3)$  erfüllt, gibt es in  $\mathbf{P}$  drei Punkte in allgemeiner Lage. Insbesondere gibt es einen von  $A$  verschiedenen Punkt  $B \in \mathbf{P}$ , und die Gerade  $A \vee B$  ist nicht schon ganz  $\mathbf{P}$ . Wählen wir also einen Punkt  $C \in \mathbf{P} \setminus (A \vee B)$ . Dann sind  $A, B, C$  in

allgemeiner Lage, und wir sehen schnell ein, dass die Geraden  $f = A \vee B$ ,  $g = A \vee C$  und  $h = B \vee C$  paarweise verschieden sind. Da  $\mathbb{P}$  auch das Axiom  $(P_2)$  erfüllt, gibt es auf  $h$  einen von  $B$  und  $C$  verschiedenen Punkt  $D$ . Da in  $\mathbb{P}$  auch  $(P_1)$  gilt, haben wir

$$f \wedge g = A, \quad f \wedge h = B \quad \text{und} \quad g \wedge h = C.$$

Insbesondere liegt  $D \in h \setminus \{B, C\}$  weder auf  $f$  noch auf  $g$ , so dass  $f, g$  und  $A \vee D$  drei paarweise verschiedene Geraden durch  $A$  sind. #



Um auch  $(P_3)$  zu zeigen, nutzen wir aus, dass es nach  $(P_3)$  für  $\mathbb{P}$  drei Punkte  $A, B, C \in \mathbf{P}$  in allgemeiner Lage gibt. Dann sind die Elemente  $A \vee B, A \vee C$  und  $B \vee C$  von  $\mathbf{P}^*$  in allgemeiner Lage,

denn: Wäre dem nicht so, dann gäbe es ein  $P^* \in \mathbf{P}^*$  mit  $A \vee B, A \vee C, B \vee C \in P^*$ . Zurückübersetzt nach  $\mathbb{P}$  bedeutet dies, dass  $P$  ein gemeinsamer Schnittpunkt der drei Geraden  $A \vee B, A \vee C$  und  $B \vee C$  sein müsste, was mit

$$A \vee B = A \vee P = A \vee C$$

einen Widerspruch dazu ergäbe, dass  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind. #

Abschließend zeigen wir noch  $(P_4)$ , dass also zwei beliebige Elemente von  $\mathbf{P}^*$  nichtleeren Durchschnitt haben. Seien dafür  $A^* \neq B^* \in \mathbf{P}^*$ . Dann gilt für eine beliebige Gerade  $g \in \mathbf{G}$

$$g \in A^* \cap B^* \iff A \in g \text{ und } B \in g \iff g = A \vee B.$$

Offensichtlich ist also  $A \vee B$  der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von  $A^*$  und  $B^*$ , in Formeln:  $A^* \wedge B^* = A \vee B$ . □

**Proposition 13.9** Sei  $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  eine projektive Ebene und  $\mathbb{P}^{**} = (\mathbf{P}^*)^* = (\mathbf{G}, \mathbf{P}^*)^* = (\mathbf{P}^*, \mathbf{G}^*)$  das zugehörige *Bidual*. Dann ist durch die Abbildung  $\varphi : A \mapsto A^*$  ein projektiver Isomorphismus von  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{P}^{**}$  gegeben.

*Beweis.*  $\varphi$  ist nach Definition surjektiv. Es ist aber auch injektiv,

denn: Für  $A \neq B \in \mathbf{P}$  gibt es mit  $(P_3)$  ein  $C \in \mathbf{P}$ , so dass  $A, B, C$  in allgemeiner Lage sind. Insbesondere liegt dann  $B$  nicht auf  $A \vee C$ , so dass  $A \vee C$  auf  $A^*$  liegt, aber nicht auf  $B^*$ . Es folgt  $\varphi(A) \neq \varphi(B)$  und damit die Injektivität. #

Wir müssen nun noch zeigen, dass  $\varphi$  Geraden auf Geraden abbildet. Sei dafür  $g \in \mathbf{G}$ . Dann ist

$$\varphi(g) = \{A^* \in \mathbf{P}^* \mid A \in g\} = \{A^* \in \mathbf{P}^* \mid g \in A^*\} = g^* \in \mathbf{G}^*$$

tatsächlich eine Gerade. □

## §14 Projektive Koordinatenebenen

Für einen beliebigen Körper  $K$  sei

$$\mathbf{P}_K := \{K\hat{P} \mid \hat{P} \in K^3 \setminus \{0\}\}$$

die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von  $K^3$ . Zum Vereinfachen der Handhabung der Elemente von  $\mathbf{P}_K$  werden wir ab sofort für ein beliebiges  $P \in \mathbf{P}_K$  stets kanonisch einen Vertreter  $\hat{P} \in K^3 \setminus \{0\}$  wählen. Für eine beliebige Teilmenge  $g \subseteq \mathbf{P}_K$  schreiben wir  $\bar{g} = \bigcup_{K\hat{P} \in g} K\hat{P}$  und setzen

$$\mathbf{G}_K := \{g \subseteq \mathbf{P}_K \mid \bar{g} \text{ ist zweidimensionaler Untervektorraum von } K^3\}.$$

**Proposition 14.1** Die Abbildung  $\varphi : g \mapsto \bar{g}$  von  $\mathbf{G}_K$  in die Menge der zweidimensionalen Untervektorräume von  $K^3$  ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$\psi : U \mapsto \{K\hat{P} \mid \hat{P} \in K^3 \setminus \{0\}, K\hat{P} \subseteq U\}.$$

Insbesondere gilt  $\psi(\bar{g}) = g$  für jedes  $g \in \mathbf{G}_K$ , so dass sich  $g$  mit der Menge der eindimensionalen Untervektorräume von  $\bar{g}$  identifizieren lässt.

*Beweis.* Ist  $U \subseteq K^3$  ein zweidimensionaler Untervektorraum, so ist  $\overline{\psi(U)}$  die Vereinigung der eindimensionalen Untervektorräume  $K\hat{P}$  von  $U$ . Es gilt also  $\overline{\psi(U)} = U$ , so dass  $\psi(U)$  in  $\mathbf{G}_K$  liegt. Damit ist die Abbildung  $\psi$  wohldefiniert.<sup>13</sup>

Dass  $\varphi \circ \psi$  auf der Menge der zweidimensionalen Untervektorräume von  $K^3$  die Identität ist, haben wir mit der vorherigen Überlegung gleich mitgeteilt. Die Proposition folgt daher mit

$$(\psi \circ \varphi)(g) = \psi(\bar{g}) = \{K\hat{P} \mid \hat{P} \in K^3 \setminus \{0\}, K\hat{P} \subseteq \bar{g}\} = g.$$

□

**Satz 14.2** Das Paar  $\mathbb{P}_2(K) := (\mathbf{P}_K, \mathbf{G}_K)$  trägt die Struktur einer projektiven Ebene und wird die **projektive Koordinatenebene** über dem Körper  $K$  genannt.

*Beweis.* Wir wollen zunächst das Axiom  $(P_1)$  zeigen, dass also durch je zwei verschiedene Punkte  $A = K\hat{A}$  und  $B = K\hat{B}$  in  $\mathbf{P}_K$  eine eindeutige Gerade geht. Wie wir aus der Linearen Algebra wissen, gibt es genau einen zweidimensionalen Untervektorraum von  $K^3$ , der die eindimensionalen Vektorräume  $K\hat{A}$  und  $K\hat{B}$  enthält, nämlich  $K\hat{A} + K\hat{B}$ . Es gibt daher in der Tat genau eine Gerade aus  $\mathbf{G}_K$  durch  $A, B \in \mathbf{P}_K$ , nämlich die Verbindungsgerade  $A \vee B := \psi(K\hat{A} + K\hat{B})$ .

Für  $(P_2)$  müssen wir nun zeigen, dass auf jeder Geraden  $g \in \mathbf{G}_K$  mindestens drei Punkte aus  $\mathbf{P}_K$  liegen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

<sup>13</sup>Für  $\varphi$  gilt dies ja nach Definition.

**Fall 1:  $K$  hat unendlich viele Elemente.** Dann enthält jeder zweidimensionale Untervektorraum  $U$  von  $K^3$  unendlich viele eindimensionale Untervektorräume, da mit einer beliebigen Basis  $(\hat{B}_1, \hat{B}_2)$  von  $U$  durch  $(\hat{B}_1 + \lambda \hat{B}_2)_{\lambda \in K}$  eine unendliche Familie von paarweise linear unabhängigen Vektoren gegeben ist.

**Fall 2:  $K$  ist ein endlicher Körper.** Sei  $U$  ein beliebiger zweidimensionaler Untervektorraum von  $K^3$ . Wenn  $q$  die Elementanzahl von  $K$  ist, so ist die Elementanzahl von  $U$  durch  $q^2$  gegeben, und die Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume in  $U$  ist

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1.$$

Jede Gerade besitzt also  $q + 1$  Elemente.  $(P_2)$  folgt, da jeder Körper mindestens zwei Elemente besitzt.

Um  $(P_3)$  zu zeigen, müssen wir noch drei Punkte in allgemeiner Lage finden. Dies erfüllen für eine beliebige Basis  $\{\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3\}$  von  $K^3$ , beispielsweise die Standardbasis, die Punkte

$$B_1 = K\hat{B}_1, \quad B_2 = K\hat{B}_2 \quad \text{und} \quad B_3 = K\hat{B}_3,$$

denn: Sonst gäbe es ja eine Gerade  $g \in \mathbf{G}_K$  mit  $B_1, B_2, B_3 \in g$ , so dass die drei linear unabhängigen Vektoren  $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$  im zweidimensionalen Vektorraum  $\bar{g}$  liegen müssten, was offensichtlich nicht sein kann. #

Zu guter Letzt wollen wir  $(P_4)$  zeigen, dass sich also je zwei Geraden aus  $\mathbf{G}_K$  in einem Punkt aus  $\mathbf{P}_K$  schneiden. Seien also  $g \neq h \in \mathbf{G}_K$  zwei verschiedene Geraden. Nach der Dimensionsformel für Durchschnitte von Vektorräumen aus der Linearen Algebra gilt

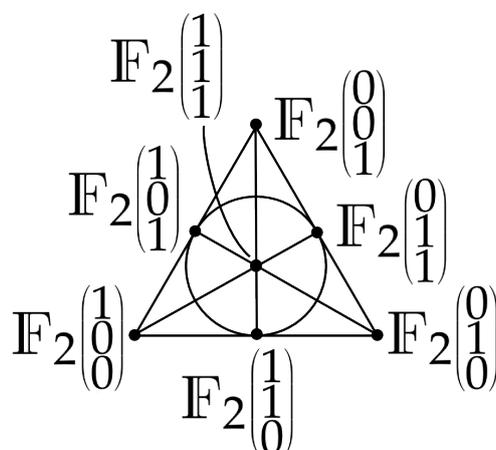
$$\dim(\bar{g} \cap \bar{h}) = \dim(\bar{g}) + \dim(\bar{h}) - \dim(\bar{g} + \bar{h}) = 2 + 2 - \dim(\bar{g} + \bar{h}).$$

Da mit  $g \neq h$  auch  $\bar{g} \neq \bar{h}$  gilt, haben wir  $\dim(\bar{g} + \bar{h}) = 3$ , so dass

$$\dim(\bar{g} \cap \bar{h}) = 2 + 2 - 3 = 1$$

folgt. Es gibt also wie zu zeigen war genau einen Punkt  $K\hat{P} \in \mathbf{P}_K$  im Durchschnitt von  $g$  und  $h$ .  
□

**Beispiel 14.3**  $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2)$  ist eine projektive Ebene mit 7 Punkten und 7 Geraden und als solche projektiv isomorph zur Fanoebene.



Nachdem wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, wie man aus affinen Ebenen projektive Ebenen machen kann und umgekehrt, stellt sich an dieser Stelle natürlich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen projektiven Koordinatenebene  $\mathbb{P}_2(K)$  und dem projektiven Abschluss  $\overline{\mathbb{A}_2(K)}$  der affinen Koordinatenebene.

**Satz 14.4** Sei  $K$  ein Körper,  $\mathbb{A}_2(K) = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$  die affine Koordinatenebene über  $K$  mit ihrem projektiven Abschluss  $\overline{\mathbb{A}_2(K)} = (\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{G}})$  und  $\mathbb{P}_2(K) = (\mathbf{P}_K, \mathbf{G}_K)$  die projektive Koordinatenebene über  $K$ . Dann ist die durch

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= K \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} && \text{für alle } P \in \mathbf{P}, \\ \varphi([g_{A,v}]) &= K \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} && \text{für alle } [g_{A,v}] \in [\mathbf{G}] \end{aligned}$$

gegebene Abbildung  $\varphi : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}_K$  ein projektiver Isomorphismus. Die beiden projektiven Ebenen  $\overline{\mathbb{A}_2(K)}$  und  $\mathbb{P}_2(K)$  sind also projektiv isomorph.

*Beweis.* Zunächst einmal ist  $\varphi$  wohldefiniert, da für je zwei Vertreter  $g_{A,v}$  und  $g_{B,w}$  desselben Parallelenbüschels die Richtungen  $Kv$  und  $Kw$  übereinstimmen.

$\varphi$  ist surjektiv,

denn: Sei  $K\hat{P}$  mit  $\hat{P} = {}^t(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$  ein beliebiger Punkt aus  $\mathbf{P}_K$ . Ist dabei  $\hat{P}_3 \neq 0$ , so ist

$$K \cdot \hat{P} = K \cdot \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{pmatrix}\right)$$

im Bild von  $\varphi$ . Ist andererseits  $\hat{P}_3 = 0$ , so gilt

$$K \cdot \hat{P} = K \cdot \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi([g_{0,(\hat{P}_1, \hat{P}_2)}]).$$

Da dies wieder im Bild von  $\varphi$  liegt, haben wir die Surjektivität gezeigt. #

$\varphi$  ist injektiv,

denn: Nach Definition können ein  $P \in \mathbf{P}$  und ein  $[g_{A,v}] \in [\mathbf{G}]$  nicht dasselbe Bild unter  $\varphi$  haben. Für  $P, Q \in \mathbf{P}$  ist offensichtlich  $\varphi(P) = \varphi(Q) \iff P = Q$ . Seien also  $[g_{A,v}], [g_{B,w}] \in \mathbf{G}$  mit  $\varphi([g_{A,v}]) = \varphi([g_{B,w}])$ , also mit  $K \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dann folgt sofort  $Kv = Kw$  und somit  $[g_{A,v}] = [g_{B,w}]$ . #

$\varphi$  ist also eine Bijektion zwischen  $\bar{\mathbf{P}}$  und  $\mathbf{P}_K$ . Wir müssen nun noch zeigen, dass  $\varphi$  Geraden in  $\bar{\mathbf{G}}$  auf Geraden in  $\mathbf{G}_K$  abbildet. Sei dafür zunächst  $g = g_{A,v} \cup \{[g_{A,v}]\}$  mit  $A, v \in K^2$  und  $v \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \varphi(g_{A,v}) \cup \{\varphi([g_{A,v}])\} \\ &= \left\{ K \cdot \begin{pmatrix} A + \lambda v \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\} \cup \left\{ K \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ K \cdot \begin{pmatrix} \alpha A + \beta v \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \text{ nicht beide Null} \right\} \\ &= \left\{ K \cdot \left( \alpha \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mid \alpha, \beta \in K \text{ nicht beide Null} \right\}. \end{aligned}$$

$\varphi(g)$  ist also die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume im zweidimensionalen  $K$ -Vektorraum  $U := \langle \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_K$  und somit in  $\mathbf{G}_K$ . Es verbleibt noch der Fall der Gerade  $g = [\mathbf{G}]$  zu überprüfen. Hier gilt

$$\varphi(g) = \{\varphi([g_{A,v}]) \mid A, v \in K^2 \text{ und } v \neq 0\} = \left\{ K \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \mid v \in K^2 \setminus \{0\} \right\},$$

so dass  $\varphi(g)$  die Menge der eindimensionalen Untervektorräume im zweidimensionalen  $K$ -Vektorraum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_K$$

ist. Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\varphi$  Geraden auf Geraden abbildet und somit ein projektiver Isomorphismus ist.  $\square$

Unser nächstes Ziel ist nun die Untersuchung der dualen projektiven Ebene  $\mathbb{P}_2(K)^* = (\mathbf{G}_K, \mathbf{P}_K^*)$  von  $\mathbb{P}_2(K)$ . Wir wollen zeigen, dass diese zu  $\mathbb{P}_2(K)$  projektiv isomorph ist. Einen Kandidaten für den dafür benötigten projektiven Isomorphismus führen wir in der folgenden Proposition ein.

**Proposition 14.5** Sei  $K$  ein Körper. Dann sind die beiden Abbildungen

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{P}_K & \rightarrow \{ \text{zweidimensionale Untervektorräume von } K^3 \}, \\ P = K \cdot \hat{P} & \mapsto U_P := \text{Kern}({}^t\hat{P}) = \{ \hat{Q} \in K^3 \mid {}^t\hat{P} \cdot \hat{Q} = 0 \} \end{cases}$$

und

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbf{P}_K & \rightarrow \mathbf{G}_K, \\ P = K \cdot \hat{P} & \mapsto g_P := \{ \text{eindimensionale Untervektorräume von } U_P \} \end{cases}$$

bijektiv.

*Beweis.* Wegen  $\Gamma = \psi \circ \gamma$  und Proposition 14.1 müssen wir nur die Aussage über  $\gamma$  zeigen. Wir beginnen mit der Wohldefiniertheit von  $\gamma$ . Sei dafür  $P \in \mathbf{P}_K$  mit  $P = K \cdot \hat{P} = K \cdot \hat{P}'$  für zwei Vektoren  $\hat{P}, \hat{P}' \in K^3 \setminus \{0\}$ . Dann sind  $\hat{P}$  und  $\hat{P}'$  linear abhängig, so dass  $\text{Kern}({}^t\hat{P}) = \text{Kern}({}^t\hat{P}')$  gilt. Die Wohldefiniertheit von  $\gamma$  folgt, da die Dimension von  $U_P$  wegen

$$\dim U_P = \dim \text{Kern}({}^t\hat{P}) = 3 - \text{rk}({}^t\hat{P}) = 2$$

tatsächlich 2 ist.

Weiter ist  $\gamma$  surjektiv,

denn: Sei  $U$  irgendein zweidimensionaler  $K$ -Untervektorraum von  $K^3$ . Dann ist  $U$  gerade der Kern der kanonischen Projektion

$$\pi : K^3 \rightarrow K^3/U.$$

Sei nun  $\mathcal{B}$  die kanonische Basis des  $K^3$  und  $\mathcal{C}$  eine Basis von  $K^3/U$ , und sei  $D_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\pi)$  die Darstellungsmatrix von  $\pi$  bezüglich dieser Basen. Aus Dimensionsgründen gilt dann

$$D_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\pi) = {}^t\hat{P} \quad \text{für ein } \hat{P} \in K^3 \setminus \{0\},$$

und nach Konstruktion ist

$$U = \text{Kern}(\pi) = \text{Kern}(D_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\pi)) = \text{Kern}({}^t\hat{P}).$$

#

Schließlich ist  $\gamma$  auch injektiv, denn für  $P, Q \in \mathbf{P}_K$  gilt

$$\begin{aligned} U_P = U_Q &\implies \dim \text{Kern} \begin{pmatrix} {}^t\hat{P} \\ {}^t\hat{Q} \end{pmatrix} = 2 \\ &\implies \text{rk} \begin{pmatrix} {}^t\hat{P} \\ {}^t\hat{Q} \end{pmatrix} = 1 \\ &\implies {}^t\hat{P} \text{ und } {}^t\hat{Q} \text{ sind linear abhängig} \\ &\implies P = Q. \end{aligned}$$

□

Es stellt sich heraus, dass die so eingeführte Abbildung  $\Gamma$  recht schöne Eigenschaften hat.

**Satz 14.6** Sei  $K$  ein Körper. Dann gelten für die in Proposition 14.5 eingeführte Abbildung  $\Gamma$  die folgenden zwei Aussagen.

- (a)  $\Gamma$  ist ein projektiver Isomorphismus, so dass  $\mathbb{P}_2(K)$  und  $\mathbb{P}_2(K)^*$  projektiv isomorph sind.
- (b) Für alle Paare von verschiedenen Punkten  $P, Q \in \mathbf{P}_K$  gilt  $\Gamma(g_P \wedge g_Q) = P \vee Q$ .

*Beweis.* Nach Proposition 14.5 verbleibt für Teil (a) zu zeigen, dass  $\Gamma$  Geraden in  $\mathbf{G}_K$  auf Geraden in  $\mathbf{P}_K^*$  abbildet. Sei also  $g \in \mathbf{G}_K$  eine beliebige Gerade. Wieder nach Proposition 14.5 gibt es ein  $P \in \mathbf{P}_K$  mit  $g = g_P$ . Dann ist also

$$\begin{aligned}\Gamma(g) &= \Gamma(g_P) = \Gamma(\{Q \in \mathbf{P}_K \mid Q \subseteq U_P\}) \\ &= \Gamma(\{Q \in \mathbf{P}_K \mid {}^t\hat{P}\hat{Q} = 0\}) \\ &= \Gamma(\{Q \in \mathbf{P}_K \mid {}^t\hat{Q}\hat{P} = 0\}) \\ &= \Gamma(\{Q \in \mathbf{P}_K \mid P \subseteq U_Q\}) \\ &= \{g_Q \mid P \in g_Q\} \\ &= \{h \in \mathbf{G}_K \mid P \in h\} \\ &= P^* \in \mathbf{P}_K^*,\end{aligned}$$

ganz wie wir zeigen wollten.

Um nun Aussage (b) zu zeigen betrachten wir für  $P \neq Q \in \mathbf{P}_K$  den Geradenschnittpunkt  $S := g_P \wedge g_Q$ . Für diesen gilt  $S \subseteq U_P \cap U_Q$ , so dass wir

$${}^t\hat{P}\hat{S} = {}^t\hat{Q}\hat{S} = 0$$

haben. Wie im Beweis des (a)-Teils können wir das umformen zu

$${}^t\hat{S}\hat{P} = {}^t\hat{S}\hat{Q} = 0.$$

Nun sind  $\hat{P}$  und  $\hat{Q}$  wegen  $P \neq Q$  linear unabhängig, und  $U_S = \text{Kern}({}^t\hat{S})$  ist nach Konstruktion zweidimensional. Es folgt demnach

$$U_S = \langle \hat{P}, \hat{Q} \rangle_K = P + Q.$$

Nun ist ja  $\Gamma = \psi \circ \gamma$ , so dass

$$\Gamma(S) = \psi(\gamma(S)) = \psi(U_S) = \psi(P + Q) = P \vee Q$$

gilt, wobei wir uns für die letzte Gleichheit an den Beweis von  $(P_1)$  in  $\mathbb{P}_2(K)$  erinnern.  $\square$

**Proposition 14.7 (Drei-Punkte- /Drei-Geraden-Kriterium)** Sei  $K$  ein Körper und seien  $A = K\hat{A}, B = K\hat{B}, C = K\hat{C} \in \mathbf{P}_K$  paarweise verschiedene Punkte. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i)  $A, B, C$  sind kollinear.
- (ii)  $\Gamma(A) = g_A, \Gamma(B) = g_B, \Gamma(C) = g_C$  schneiden sich in genau einem gemeinsamen Punkt.
- (iii) Es gibt  $\tilde{A}, \tilde{B} \in K^3 \setminus \{0\}$  mit  $\hat{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$ ,  $A = K\tilde{A}$  und  $B = K\tilde{B}$ .

*Beweis.* „(i)  $\iff$  (ii)“. Genau dann, wenn  $A, B, C$  kollinear sind, liegt  $C$  auf der Geraden  $A \vee B$ . Das ist äquivalent dazu, dass die Geraden  $A \vee B$  und  $A \vee C$  übereinstimmen. Mit Teil (b) von Satz 14.6 lässt sich das in

$$\Gamma(g_A \wedge g_B) = \Gamma(g_A \wedge g_C)$$

übersetzen. Mit Proposition 14.5 ist das gleichbedeutend zu

$$g_A \wedge g_B = g_A \wedge g_C,$$

was zu zeigen war.

„(i)  $\iff$  (iii)“. Unter Annahme von (iii) sind  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  linear abhängig, was offensichtlich gleichbedeutend dazu ist, dass  $A, B, C$  kollinear sind. Wir müssen daher nur noch zeigen, dass (iii) aus (i) folgt. Da wir  $A, B, C$  als paarweise verschieden angenommen haben, sind  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  paarweise linear unabhängig. Da wir  $A, B, C$  als kollinear vorausgesetzt haben, sind aber auch  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  linear abhängig, so dass es Skalare  $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\hat{C} = \alpha \hat{A} + \beta \hat{B}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir  $\tilde{A} := \alpha \hat{A}$  und  $\tilde{B} := -\beta \hat{B}$  setzen.  $\square$

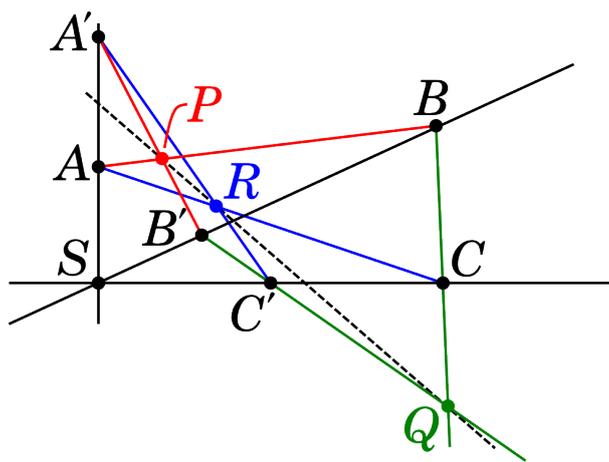
Beim Dualisieren gehen also folgende Begriffe ineinander über:

Punkte	$\iff$	Geraden
Verbindungsgerade	$\iff$	Schnittpunkt
kollineare Punkte	$\iff$	Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden.

**Satz 14.8 (Projektiver Satz von Desargues)** Sei  $K$  ein Körper, und seien  $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}_K$  paarweise verschiedene Punkte mit paarweise verschiedenen Verbindungsgeraden  $A \vee A', B \vee B', C \vee C'$ , die sich in einem gemeinsamen Punkt  $S$  schneiden. Dann sind die Schnittpunkte

$$P := (A \vee B) \wedge (A' \vee B'), \quad Q := (B \vee C) \wedge (B' \vee C') \quad \text{und} \quad R := (C \vee A) \wedge (C' \vee A')$$

entweder paarweise verschieden und kollinear oder alle gleich.



*Beweis.* Da die Geraden  $A \vee A', B \vee B'$  verschieden sind, gilt auch  $A \vee B \neq A' \vee B'$ . Nach  $(P_4)$  gibt es also den Schnittpunkt  $P$ , und er ist eindeutig. Analog folgt die Existenz und Eindeutigkeit von  $Q$  und  $R$ . Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.

**Fall 1:**  $S \notin \{A, B, C, A', B', C'\}$ . Dann sind  $S, A, A'$  paarweise verschieden und kollinear, analog  $S, B, B'$  und  $S, C, C'$ . Insbesondere können wir also Vertreter  $\hat{S}, \hat{A}, \hat{A}', \dots$  von  $S, A, A', \dots$  finden, die

$$\hat{S} = \hat{A} - \hat{A}' = \hat{B} - \hat{B}' = \hat{C} - \hat{C}'$$

erfüllen. Hieraus folgt leicht

$$\hat{A} - \hat{B} = \hat{A}' - \hat{B}', \quad \hat{B} - \hat{C} = \hat{B}' - \hat{C}' \quad \text{und} \quad \hat{C} - \hat{A} = \hat{C}' - \hat{A}'.$$

Wegen  $K(\hat{A} - \hat{B}) \in A \vee B$  und  $K(\hat{A}' - \hat{B}') \in A' \vee B'$  ist  $\hat{P} := \hat{A} - \hat{B}$  ein möglicher Vertreter von  $P$ ; es gilt also  $P = K\hat{P}$ . Ebenso ist  $\hat{Q} := \hat{B} - \hat{C}$  bzw.  $\hat{R} := \hat{C} - \hat{A}$  ein Vertreter von  $Q$  bzw.  $R$ , so dass  $Q = K\hat{Q}$  und  $R = K\hat{R}$  gelten. Es folgt

$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = (\hat{A} - \hat{B}) + (\hat{B} - \hat{C}) + (\hat{C} - \hat{A}) = 0$$

und somit die lineare Abhängigkeit von  $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ . Falls  $P = Q$  ist, so folgt wegen  $\hat{R} = -\hat{P} - \hat{Q}$  unmittelbar  $P = Q = R$ , dasselbe gilt, falls  $Q = R$  oder  $P = R$  ist. Insbesondere sind  $P, Q, R$  entweder paarweise verschieden oder alle gleich. Im Fall, dass  $P, Q, R$  entweder paarweise verschieden sind ist die lineare Abhängigkeit von  $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$  aber gleichbedeutend mit der Kollinearität von  $P, Q, R$ .

**Fall 2:**  $S \in \{A, B, C, A', B', C'\}$ . Dann können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte  $S = A$ . Wie im ersten Fall finden wir Vertreter  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{B}', \dots$  von  $A, B, B', \dots$  mit

$$\hat{A} = \hat{B} - \hat{B}' = \hat{C} - \hat{C}'.$$

Insbesondere ist dann  $\hat{A} - \hat{B} = -\hat{B}'$ . Wegen  $K(\hat{A} - \hat{B}) \in A \vee B$  und  $K(-\hat{B}') \in A' \vee B'$  ist  $\hat{P} := -\hat{B}'$  ein möglicher Vertreter von  $P$ ; es gilt also  $P = K\hat{P}$ . Ebenso ist  $\hat{R} := \hat{C}'$  ein Vertreter von  $R$  mit  $R = K\hat{R}$ . Wie im ersten Fall zeigt man außerdem, dass  $\hat{Q} := \hat{B}' - \hat{C}'$  ein Vertreter von  $Q$  ist, also  $Q = K\hat{Q}$  erfüllt. Es folgt

$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = -\hat{B}' + (\hat{B}' - \hat{C}') + \hat{C}' = 0,$$

und somit ergibt sich wie im ersten Fall, dass  $P, Q, R$  entweder paarweise verschieden oder alle gleich sind. Falls  $P, Q, R$  paarweise verschieden sind, impliziert die lineare Abhängigkeit von  $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$  die Kollinearität von  $P, Q, R$ .  $\square$

**Bemerkung 14.9** Der Projektive Satz von Desargues liefert neue Beweise für den Kleinen Satz von Desargues 8.5 und den Satz von Desargue aus der Übungsaufgabe danach. Diese sind in der affinen Koordinatenebene  $\mathbb{A}_2(K)$  über einem beliebigen Körper  $K$  gültig.

Seien dafür  $A, B, C, A', B', C' \in K^2$  sechs paarweise verschiedene Punkte, die entweder

$$A \vee A', B \vee B', C \vee C' \quad \text{parallel und paarweise verschieden} \quad (\text{V.1})$$

oder

$$A \vee A', B \vee B', C \vee C' \quad \text{paarweise verschieden mit eindeutigem gemeinsamen Schnittpunkt} \quad (\text{V.2})$$

erfüllen. Die erste Bedingung ist hierbei diejenige des Kleinen Satzes von Desargues, die zweite die des Satzes von Desargues. Die zugehörigen projektiven Geraden im projektiven Abschluss  $\overline{\mathbb{A}_2(K)} \cong \mathbb{P}_2(K)$  schneiden sich dann in genau einem gemeinsamen Punkt; im Falle von (V.1) ist dies der gemeinsame unendlich ferne Punkt. Die Voraussetzungen des Projektiven Satzes von Desargues 14.8 sind also erfüllt. In beiden Sätzen ist weiter

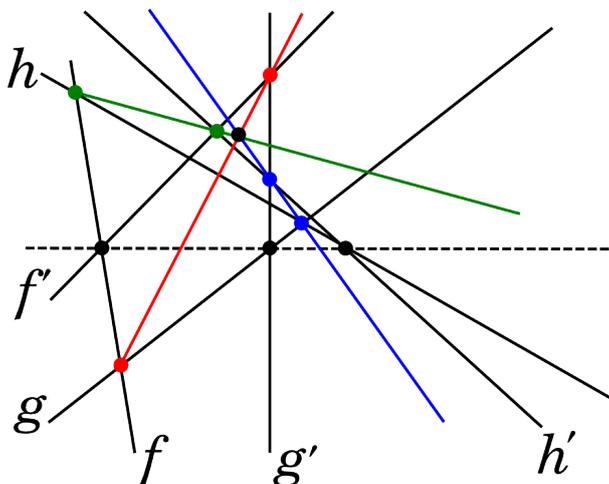
$$A \vee B \parallel A' \vee B' \quad \text{und} \quad B \vee C \parallel B' \vee C'$$

vorausgesetzt; die zugehörigen projektiven Geraden schneiden sich also in den jeweiligen unendlich fernen Punkten. Mit dem Projektiven Satz von Desargues folgern wir, dass sich die Geraden  $A \vee C$  und  $A' \vee C'$  projektiv ebenfalls auf der unendlich fernen Gerade schneiden, affin sind sie also parallel, was in beiden Sätzen zu zeigen war.

**Satz 14.10 (Dualer Projektiver Satz von Desargues)** Sei  $K$  ein Körper, und seien  $f, g, h, f', g', h'$  paarweise verschiedene projektive Geraden in  $\mathbf{G}_K$ , so dass  $f \wedge f', g \wedge g'$  und  $h \wedge h'$  paarweise verschieden und kollinear sind. Dann sind

$$(f \wedge g) \vee (f' \wedge g'), \quad (g \wedge h) \vee (g' \wedge h') \quad \text{und} \quad (h \wedge f) \vee (h' \wedge f')$$

entweder paarweise verschieden und haben einen eindeutigen gemeinsamen Schnittpunkt, oder sie sind alle gleich.



*Beweis.* Dies ergibt sich durch Anwendung der aus Proposition 14.5 und Satz 14.6 bekannten Dualisierungsabbildung  $\Gamma : \mathbf{P}_K \rightarrow \mathbf{G}_K$  auf den Projektiven Satz von Desargues 14.8. Dies führt man wie folgt aus.

Da  $\Gamma$  eine Bijektion ist, gibt es paarweise verschiedene Punkte  $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}_K$  mit

$$f = g_A, \quad g = g_B, \quad h = g_C, \quad f' = g_{A'}, \quad g' = g_{B'}, \quad h' = g_{C'}.$$

Nach Voraussetzung sind

$$\tilde{A} := f \wedge f' = g_A \wedge g_{A'}, \quad \tilde{B} := g \wedge g' = g_B \wedge g_{B'} \quad \text{und} \quad \tilde{C} := h \wedge h' = g_C \wedge g_{C'}$$

paarweise verschieden und kollinear. Nach Proposition 14.7 ist das äquivalent dazu, dass  $\Gamma(\tilde{A}), \Gamma(\tilde{B}), \Gamma(\tilde{C})$  paarweise verschieden sind und sich in einem eindeutigen gemeinsamen Punkt schneiden. Andererseits gilt nach dem (b)-Teil von Satz 14.6

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{A}) &= \Gamma(g_A \wedge g_{A'}) = A \vee A', \\ \Gamma(\tilde{B}) &= \Gamma(g_B \wedge g_{B'}) = B \vee B', \\ \Gamma(\tilde{C}) &= \Gamma(g_C \wedge g_{C'}) = C \vee C'.\end{aligned}$$

Die Punkte  $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}_K$  erfüllen also die Voraussetzungen des Projektiven Satzes von Desargues, mit dem wir schließen können, dass

$$P := (A \vee B) \wedge (A' \vee B'), \quad Q := (B \vee C) \wedge (B' \vee C') \quad \text{und} \quad R := (C \vee A) \wedge (C' \vee A')$$

entweder paarweise verschieden und kollinear oder alle gleich sind. Sind  $P, Q, R$  alle gleich, so sind auch  $\Gamma(P), \Gamma(Q), \Gamma(R)$  alle gleich. Sind  $P, Q, R$  paarweise verschieden und kollinear, so sind nach Proposition 14.7 auch  $\Gamma(P), \Gamma(Q), \Gamma(R)$  paarweise verschieden und schneiden sich in einem eindeutigen gemeinsamen Punkt. Es ist nun aber  $\Gamma(P) = (f \wedge g) \vee (f' \wedge g')$ ,

denn: Da es zu jeder Gerade in  $\mathbf{G}_K$  ein Urbild unter  $\Gamma$  gibt, erhalten wir unter mehrfacher Anwendung des (b)-Teils von Satz 14.6

$$\begin{aligned}\Gamma(P) &= \Gamma((A \vee B) \wedge (A' \vee B')) \\ &= \Gamma^{-1}(A \vee B) \vee \Gamma^{-1}(A' \vee B') \\ &= (g_A \wedge g_B) \vee (g_{A'} \wedge g_{B'}) \\ &= (f \wedge g) \vee (f' \wedge g').\end{aligned}$$

#

Analog können wir

$$\Gamma(Q) = (g \wedge h) \vee (g' \wedge h') \quad \text{und} \quad \Gamma(R) = (h \wedge f) \vee (h' \wedge f')$$

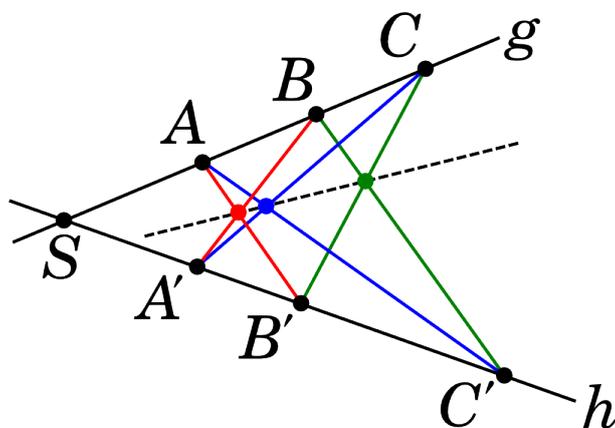
zeigen und erhalten so die zu beweisende Aussage.  $\square$

Genauso wie zwei Spezialfälle des Satzes von Desargues in der projektiven Ebene zusammenfallen, haben auch der Satz von Pappus 8.6 und der Satz von Pascal aus der Übungsaufgabe danach in der projektiven Ebene eine gemeinsame Verallgemeinerung, aus der sich wie in Bemerkung 14.9 die affinen Sätze zurückgewinnen lassen.

**Satz 14.11 (Projektiver Satz von Pappus/Pascal)** Sei  $K$  ein Körper,  $g \neq h$  zwei verschiedene projektive Geraden in  $\mathbf{G}_K$  mit Schnittpunkt  $S = g \wedge h$ . Seien weiter  $A, B, C \in g \setminus h$  und  $A', B', C' \in h \setminus g$  paarweise verschiedene Punkte. Dann sind die Schnittpunkte

$$\begin{aligned}S_1 &:= (A \vee B') \wedge (B \vee A'), \\ S_2 &:= (B \vee C') \wedge (C \vee B'), \\ S_3 &:= (C \vee A') \wedge (A \vee C')\end{aligned}$$

paarweise verschieden und kollinear.



*Beweis.* Nach Voraussetzung sind  $S, A, B$  und  $S, A, C$  jeweils kollinear und paarweise verschieden. Ist  $A = K\hat{A}, B = K\hat{B}, C = K\hat{C}$  und  $S = K\hat{S}$ , sind daher die Mengen  $\{\hat{S}, \hat{A}, \hat{B}\}$  und  $\{\hat{S}, \hat{A}, \hat{C}\}$  jeweils linear abhängig, bestehen aber aus paarweise linear unabhängigen Vektoren. Es folgt, dass es Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in K \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\hat{S} = \lambda_1 \hat{A} - \lambda_2 \hat{B} = \lambda_3 \hat{A} - \lambda_4 \hat{C}.$$

Hierbei ist  $\lambda_1 \neq \lambda_3$ , da sonst  $B$  mit  $C$  übereinstimmte, was nicht sein kann. Durch geeignete Wahl der Vertreter  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  von  $A, B, C$  können wir

$$\hat{S} = \hat{A} - \hat{B} = \lambda \hat{A} - \hat{C} \quad \text{mit einem } \lambda \in K \setminus \{0, 1\} \quad (\text{V.3})$$

erreichen. Analog erhalten wir

$$\hat{S} = \hat{A}' - \hat{B}' = \mu \hat{A}' - \hat{C}' \quad \text{mit einem } \mu \in K \setminus \{0, 1\}. \quad (\text{V.4})$$

Aus  $\hat{S} = \hat{A} - \hat{B} = \hat{A}' - \hat{B}'$  folgt  $\hat{A} + \hat{B}' = \hat{A}' + \hat{B}$ . Wegen  $K(\hat{A} + \hat{B}') \in A \vee B'$  und  $K(\hat{A}' + \hat{B}) \in A' \vee B$  ist

$$\hat{S}_1 := \hat{A} + \hat{B}'$$

ein möglicher Vertreter von  $S_1$ , so dass  $S_1 = K(\hat{S}_1)$  gilt.

Aus (V.3) bzw. (V.4) folgt

$$\hat{S} = \frac{1}{\lambda - 1} \hat{C} - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \hat{B} \quad \text{bzw.} \quad \hat{S} = \frac{1}{\mu - 1} \hat{C}' - \frac{\mu}{\mu - 1} \hat{B}'$$

und somit

$$\frac{1}{\lambda - 1} \hat{C} + \frac{\mu}{\mu - 1} \hat{B}' = \frac{1}{\mu - 1} \hat{C}' + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \hat{B}.$$

Wie oben ist

$$\hat{S}_2 := \frac{1}{\mu - 1} \hat{C}' + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \hat{B}$$

ein möglicher Vertreter von  $S_2$ , so dass  $S_2 = K(\hat{S}_2)$  gilt.

Aus  $\hat{S} = \lambda\hat{A} - \hat{C} = \mu\hat{A}' - \hat{C}'$  folgt schließlich  $\lambda\hat{A} + \hat{C}' = \mu\hat{A}' + \hat{C}$ . Wieder wie oben ist

$$\hat{S}_3 := \lambda\hat{A} + \hat{C}'$$

ein möglicher Vertreter von  $S_3$ , so dass  $S_3 = K(\hat{S}_3)$  gilt.

Da die Punkte  $S, A, A'$  nicht kollinear sind, bilden die Vektoren  $\hat{S}, \hat{A}, \hat{A}'$  eine Basis von  $K^3$ . Die gerade gefundenen Vektoren  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  lassen sich in dieser Basis wie folgt ausdrücken.

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= \hat{A} + \hat{B}' = -\hat{S} + \hat{A} + \hat{A}', \\ \hat{S}_2 &= \frac{1}{\mu-1}\hat{C}' + \frac{\lambda}{\lambda-1}\hat{B} = \frac{1}{\mu-1}(\mu\hat{A}' - \hat{S}) + \frac{\lambda}{\lambda-1}(\hat{A} - \hat{S}) \\ &= -\left(\frac{1}{\mu-1} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\right)\hat{S} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\hat{A} + \frac{\mu}{\mu-1}\hat{A}', \\ \hat{S}_3 &= \lambda\hat{A} + \hat{C}' = -\hat{S} + \lambda\hat{A} + \mu\hat{A}'.\end{aligned}$$

Man kann nun leicht nachrechnen, dass  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  paarweise linear unabhängig sind. Andererseits gilt

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -\left(\frac{1}{\mu-1} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\right) & -1 \\ 1 & \frac{\lambda}{\lambda-1} & \lambda \\ 1 & \frac{\mu}{\mu-1} & \mu \end{pmatrix} = 0,$$

wie man zum Beispiel via Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte leicht einsieht. Somit sind  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  linear abhängig. Es folgt, dass  $S_1, S_2, S_3$  paarweise verschieden und kollinear sind, was zu zeigen war.  $\square$

---

## Polytope

---

### §15 Die Eulersche Polyederformel

Wir haben nun recht ausführlich verschiedene ebene Geometrien studiert. Zum Abschluss wollen wir uns nun noch ein wenig mit einem Thema der räumlichen Geometrie befassen; den Polytopen. Ein besonderes Augenmerk soll hier natürlich auf den Platonischen Körpern liegen.

**Definition 15.1** Sei  $E$  ein zweidimensionaler affiner Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ . Dann zerfällt

$$\mathbb{R}^3 \setminus E = S_1 \cup S_2$$

in zwei Zusammenhangskomponenten  $S_1, S_2$ . Die Mengen  $S_1$  und  $S_2$  heißen dann **offene Halbräume**, die Mengen  $S_1 \cup E$  und  $S_2 \cup E$  **abgeschlossene Halbräume**.

Eine Teilmenge  $P$  von  $\mathbb{R}^3$  heißt **konvexes Polyeder**, falls  $P$  der Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume ist. Der Durchschnitt der zugehörigen offenen Halbräume wird dann als das **Innere** des Polyeders  $P$  bezeichnet.

Ein konvexes Polyeder  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **Polytop**, falls es beschränkt ist und ein nichtleeres Inneres hat.

**Beispiel 15.2** Betrachten wir für  $i = 1, 2, 3$  jeweils den zweidimensionalen affinen Unterraum

$$E^i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \right\}$$

von  $\mathbb{R}^3$ . Hier sind die jeweils zugehörigen offenen Halbräume  $S_1^i$  und  $S_2^i$  durch das Vorzeichen der  $i$ -ten Koordinate definiert. Ein beliebiger Durchschnitt der so erhaltenen zugehörigen sechs abgeschlossenen Halbräume liefert jeweils ein Beispiel für ein konvexes Polyeder, das kein Polytop ist.

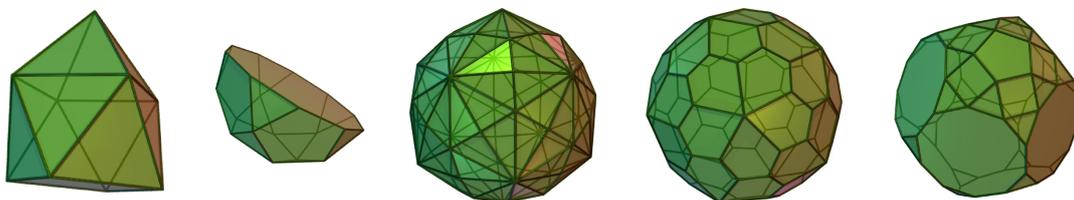


Abbildung VI.1: Eine Reihe von Beispielen für Polytope. Weitere findet man beispielsweise an der Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Polyhedron>

**Bemerkung 15.3** (a) Da abgeschlossene Halbräume konvex sind, sind konvexe Polyeder in der Tat konvex.

(b) Ist  $P = \bigcap_{i=1}^n H_i$  mit abgeschlossenen Halbräumen  $H_i$  ein Polytop, dann ist der Rand  $\partial P$  von  $P$  gegeben durch

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^n (P \cap \partial H_i).$$

$\partial H_i$  ist hierbei gerade der zweidimensionale affine Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ , bezüglich dem  $H_i$  ein abgeschlossener Halbraum ist. Der Rand  $\partial P$  von  $P$  besteht aus **Flächen, Kanten und Ecken**.

**Definition 15.4** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Polytop. Dann schreiben wir

$e(P)$  für die Anzahl der Ecken von  $\partial P$ ,  
 $k(P)$  für die Anzahl der Kanten von  $\partial P$ ,  
 $f(P)$  für die Anzahl der Flächen von  $\partial P$

und sprechen dabei auch von den Ecken bzw. Kanten bzw. Flächen von  $P$ .

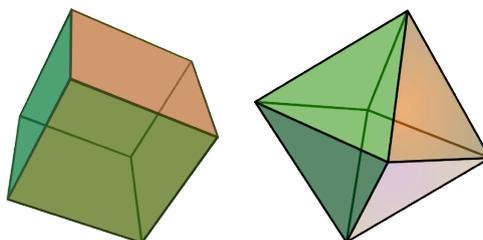


Abbildung VI.2: Für einen Quader ist  $e(P) = 8$ ,  $k(P) = 12$  und  $f(P) = 6$ . Für einen Oktaeder ist  $e(P) = 6$ ,  $k(P) = 12$ ,  $f(P) = 8$ . In beiden Fällen ist  $e(P) - k(P) + f(P) = 2$ . Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Polyhedron>

**Satz 15.5 (Euler'sche Polyederformel)** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Polytop. Dann gilt

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

*Beweisskizze.* Da Polytope ein nichtleeres Inneres haben, können wir nach Anwenden einer geeigneten Translation annehmen, dass der Ursprung des  $\mathbb{R}^3$  im Inneren des Polytops  $P$  liegt. Da Polytope beschränkt sind, können wir nach Anwenden einer geeigneten zentrischen Streckung  $v \mapsto \lambda v$  mit einem  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  annehmen, dass  $P$  im Inneren der Einheitskugel

$$S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$$

liegt. Beide Abbildungen sind Ähnlichkeitstransformationen und lassen offensichtlich die untersuchten Anzahlen  $e(P), k(P), f(P)$  fest.

**Schritt 1.** Wir „blasen“ das Polytop auf, bis alle Eckpunkte zu Punkten auf  $S^2$  werden. Formal projizieren wir  $\partial P$  auf  $S^2$ , indem wir für jeden Punkt  $A \in \partial P$  den **Strahl**

$$\vec{0A} := \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

betrachten. Dieser hat einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt mit  $S^2$ ,

denn: Die Gleichung  $\|\lambda A\| = 1$  ist wegen  $\lambda > 0$  äquivalent zu  $\lambda \|A\| = 1$  und hat somit die eindeutig bestimmte Lösung  $\lambda = \frac{1}{\|A\|}$ . #

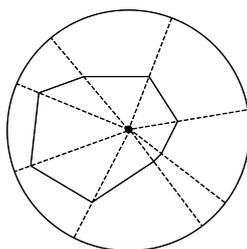


Abbildung VI.3: Eine zweidimensionale Veranschaulichung des „Aufblasens“

Da Polytope konvex sind, erhalten wir eine Eins-zu-eins-Zuordnung von Punkten, deren Bild ein „sphärisches Polytop“ mit derselben Anzahl von Ecken, Kanten und Flächen wie  $\partial P$  ist, und dessen Kanten sich nicht schneiden.

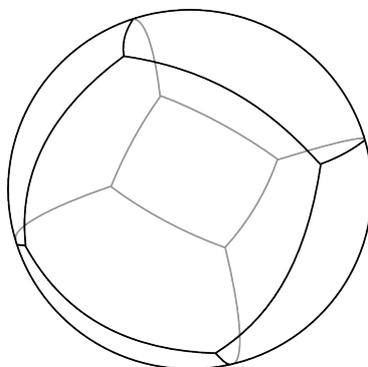


Abbildung VI.4: Ein sphärischer Würfel

**Schritt 2.** Wir fixieren einen Punkt  $x$  im Inneren einer der Flächen des sphärischen Polytops und  $-x$  der  $x$  gegenüberliegende Punkt. Wir definieren eine *stereographische Projektion*, indem wir jedem Punkt  $v \in S^2 \setminus \{x\}$  den eindeutigen Punkt auf der Tangentialebene an  $S^2$  in  $-x$  zuordnen, der mit  $x$  und  $v$  auf einer gemeinsamen Geraden liegt. Das Bild des sphärischen Polytops unter dieser stereographischen Projektion ist ein so genanntes *Netz* des Polytops  $P$ , wir wollen es im Folgenden mit  $N$  bezeichnen. Dieses Netz hat

- genauso viele Ecken wie  $P$ :  $e(N) = e(P)$ ,
- genauso viele Kanten wie  $P$ :  $k(N) = k(P)$ ,
- eine Fläche weniger als  $P$ :  $f(N) = f(P) - 1$ .

Die „fehlende“ Fläche entspricht der Umgebung außerhalb des Netzes. Insbesondere gilt

$$e(N) - k(N) + f(N) = e(P) - k(P) + f(P) - 1.$$

Um den Euler'schen Polyedersatz zu beweisen, genügt es also

$$e(N) - k(N) + f(N) = 1$$

zu zeigen.

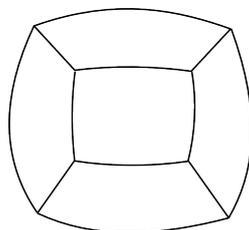


Abbildung VI.5: Ein Netz eines Würfels

**Schritt 3.** Wir wählen eine Fläche des Netzes  $N =: N_0$  aus und ziehen diese zu einem einzigen Punkt zusammen. So erhalten wir ein neues Netz  $N_1$ . Hatte diese Fläche  $n$  Eckpunkte, so gilt in  $N_1$

- $e(N_1) = e(N_0) - (n - 1)$ ,
- $k(N_1) = k(N_0) - n$ ,
- $f(N_1) = f(N_0) - 1$

und somit

$$\begin{aligned} e(N_1) - k(N_1) + f(N_1) &= (e(N_0) - (n - 1)) - (k(N_0) - n) + (f(N_0) - 1) \\ &= e(N_0) - k(N_0) + f(N_0). \end{aligned}$$

Wir iterieren unser Vorgehen und ziehen eine Fläche unseres Netzes nach der anderen zusammen und erhalten jeweils aus dem Netz  $N_{k-1}$  ein Netz  $N_k$ , für das

$$e(N_k) - k(N_k) + f(N_k) = e(N_{k-1}) - k(N_{k-1}) + f(N_{k-1}) = e(N_0) - k(N_0) + f(N_0)$$

gilt. Da  $f(P)$  endlich ist, erreichen wir so nach endlich vielen Schritten ein Netz  $N_{f(P)-1}$  ohne Flächen, ohne Kanten, aber mit einem Punkt. Für dieses Netz gilt offensichtlich die behauptete Gleichheit

$$e(N_{f(P)-1}) - k(N_{f(P)-1}) + f(N_{f(P)-1}) = 1 - 0 + 0 = 1,$$

so dass insgesamt die Euler'sche Polyederformel folgt.

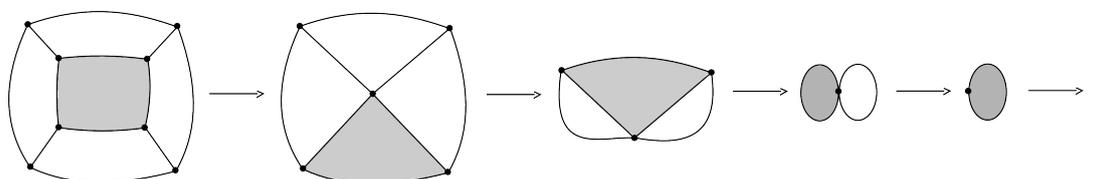


Abbildung VI.6: Die Folge  $N_0, N_1, \dots, N_{6-1}$  für den Würfel

□

Es liegt nahe, dieses wichtige Ergebnis zur Klassifikation von Polytopen zu verwenden. Ganz im Allgemeinen ist uns das allerdings zu schwer, weshalb wir jetzt eine besonders einfache Unterklasse der Polytope einführen wollen, die regulären Polytope.

## §16 Platonische Körper

**Definition 16.1** Für  $n > 2$  heißt ein  $n$ -Eck  $\Pi A_1 \dots A_n$  (vgl. Abschnitt §8) **regelmäßig**, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:

- $\overline{A_i A_j} \cong \overline{A_1 A_2}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i \equiv j - 1 \pmod{n}$ ,
- $\angle A_i A_j A_k \simeq \angle A_1 A_2 A_3$  für alle  $1 \leq i, j, k \leq n$  mit  $i \equiv j - 1 \equiv k - 2 \pmod{n}$ .

Das *Innere* eines solchen  $n$ -Ecks lässt sich definieren als die Menge aller Punkte, die im Inneren aller Winkel  $\angle A_i A_j A_k$  aus dem zweiten Punkt liegen. Wir sagen, eine Polytopfläche sei **durch ein regelmäßiges  $n$ -Eck gegeben**, falls ihr Inneres unter einer Identifizierung<sup>14</sup> der Ebene, in der die Fläche liegt, mit der Euklidischen Standardebene  $\mathbb{E}$  mit dem Inneren dieses  $n$ -Ecks übereinstimmt.

<sup>14</sup>Wir wählen eine Orthonormalbasis dieser Ebene und bilden sie auf die Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$  ab. Solche Identifizierungen sind affine Isomorphismen im Sinne von Definition 1.18. Insbesondere ist das Vergleichen verschiedener Seitenflächen eines Polytops wohldefiniert möglich.

**Definition 16.2** Ein Polytop  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **regulär** (oder auch ein **Platonischer Körper**), wenn alle seine Randflächen durch kongruente regelmäßige  $n$ -Ecke gegeben sind und in jeder Ecke die gleiche Anzahl  $g(P)$  von Kanten anliegt. Die Anzahl  $n(P) := n$  heißt dabei der **Grad** des regulären Polytops.

Für ein reguläres Polytop gilt  $n(P) \geq 3$  nach Definition und  $g(P) \geq 3$ , da sonst einer jeden Ecke nur je eine Fläche anliegen dürfte und  $P$  so kein nichtleeres Inneres hätte. Unser Ziel ist nun die Klassifizierung der Platonischen Körper durch die Invarianten  $n(P)$  und  $g(P)$ . Die zu zeigende Behauptung ist, dass es nur fünf Typen von Platonischen Körpern gibt, nämlich

- die **Tetraeder** mit  $n(P) = 3$  und  $g(P) = 3$ ,
- die **Hexaeder** mit  $n(P) = 4$  und  $g(P) = 3$ ,
- die **Oktaeder** mit  $n(P) = 3$  und  $g(P) = 4$ ,
- die **Dodekaeder** mit  $n(P) = 5$  und  $g(P) = 3$ ,
- die **Ikosaeder** mit  $n(P) = 3$  und  $g(P) = 5$ .

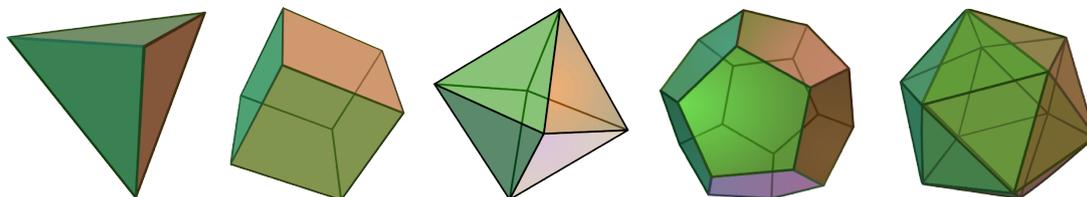


Abbildung VI.7: Die Platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Polyhedron>

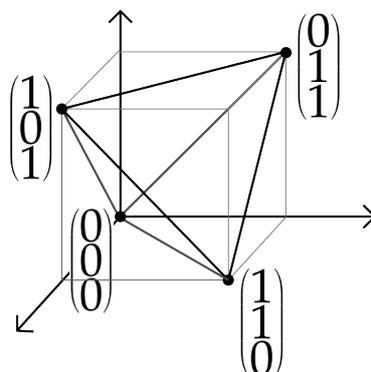
Hierfür zeigen wir zunächst den folgenden

**Satz 16.3** Es gibt ein Tetraeder, und je zwei Tetraeder sind ähnlich.

*Beweisskizze.* Zur Existenz lässt sich leicht zeigen, dass die konvexe Hülle der Punkte

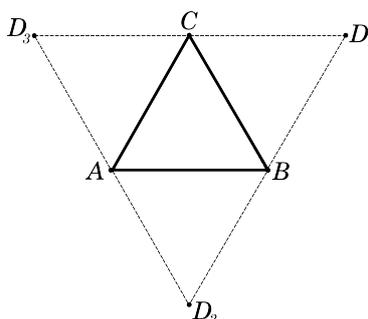
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Tetraeder ist.

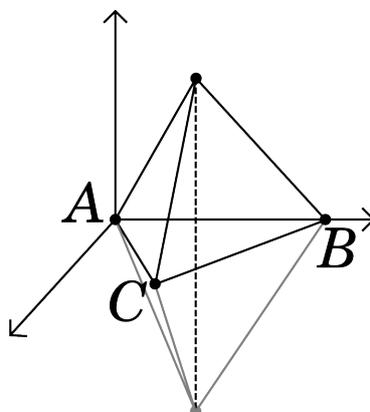


Sei andererseits  $T$  ein beliebiges Tetraeder. Durch Anwenden einer geeigneten Translation können wir erreichen, dass einer der Eckpunkte, nennen wir ihn  $A$ , im Ursprung liegt. Durch Anwenden geeigneter Drehungen dürfen wir weiter annehmen, dass eine Kante durch  $A$ , nennen wir sie  $\overline{AB}$ , auf der  $x$ -Achse liegt und eine an  $\overline{AB}$  anschließende Seitenfläche, nennen wir den dritten Punkt des begrenzenden Dreiecks  $C$ , in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt. Indem wir gegebenenfalls noch eine Spiegelung anwenden, können wir erreichen, dass  $\overline{AB}$  auf der nichtnegativen  $x$ -Achse liegt. Durch Anwenden einer zentrischen Streckung im Ursprung mit den Streckfaktor  $\|B - A\|^{-1}$  erreichen wir, dass alle Kanten die Länge 1 haben.

An jede Kante der durch  $\triangle ABC$  gegebenen Seitenfläche schließt eine weitere Seitenfläche an; die jeweils eindeutigen dritten Ecken dieser Seitenflächen nennen wir  $D_1, D_2, D_3$ . Da von einer Ecke nur drei Kanten ausgehen, fallen die Kanten  $\overline{BD_1}$  und  $\overline{BD_2}$  zusammen und müssen verklebt werden.



Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: Faltung nach oben und Faltung nach unten. Die dritte Seite muss mit der analogen Argumentation in dieselbe Richtung gefaltet werden. Wir erhalten zwei mögliche Tetraeder, die durch Spiegelung ineinander übergehen.



□

**Übung** Dieselbe Aussage gilt auch für Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

**Proposition 16.4** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein reguläres Polytop vom Grad  $n(P)$ , bei dem in jeder Ecke  $g(P)$  Kanten anliegen. Dann gilt

$$f(P) = \frac{4g(P)}{2n(P) - g(P)n(P) + 2g(P)},$$

$$k(P) = \frac{1}{2}n(P)f(P) = \frac{1}{2}g(P)e(P).$$

Insbesondere sind die Größen  $e(P), k(P), f(P)$  durch  $n(P), g(P)$  bereits eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Von jeder der  $e(P)$  Ecken gehen  $g(P)$  Kanten aus. Da an jede Kante 2 Ecken angrenzen, folgt

$$2k(P) = g(P)e(P).$$

Analog wird jede Seitenfläche von  $n(P)$  Kanten begrenzt. Da jede Kante an 2 Flächen angrenzt, folgt

$$2k(P) = n(P)f(P).$$

Mit dem Euler'schen Polyedersatz erhalten wir

$$2 = e(P) - k(P) + f(P) = \frac{2k(P)}{g(P)} - k(P) + f(P).$$

Nach Multiplikation mit  $2g(P)$  erhalten wir

$$4g(P) = 4k(P) - 2g(P)k(P) + 2f(P)g(P) = 2n(P)f(P) - n(P)f(P)g(P) + 2f(P)g(P).$$

Lösen wir dies nach  $f(P)$  auf, erhalten wir die letzte zu zeigende Aussage. □

Für die oben eingeführten regulären Polytope ergeben sich die folgenden Werte.

$P$	$n(P)$	$g(P)$	$f(P)$	$k(P)$	$e(P)$
Tetraeder	3	3	4	6	4
Hexaeder	4	3	6	12	8
Oktaeder	3	4	8	12	6
Dodekaeder	5	3	12	30	20
Ikosaeder	3	5	20	30	12

**Satz 16.5** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  ein reguläres Polytop. Dann ist  $P$  ein Tetraeder, ein Hexaeder, ein Oktaeder, ein Dodekaeder oder ein Ikosaeder.

*Beweis.* Nach Proposition 16.4 gelten

$$\frac{1}{g(P)} = \frac{e(P)}{2k(P)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n(P)} = \frac{f(P)}{2k(P)}.$$

Zusammenaddiert und mit der Euler'schen Polyederformel ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{1}{g(P)} + \frac{1}{n(P)} = \frac{e(P) + f(P)}{2k(P)} = \frac{2 + k(P)}{2k(P)} = \frac{1}{k(P)} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

Wegen  $g(P), n(P) \geq 3$  sind die einzigen ganzzahligen Lösungen dieser Ungleichung durch

$$(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$$

gegeben. Diese Werte entsprechen gerade den in der Tabelle aufgeführten Körpern.  $\square$

Damit ist das klassische Resultat gezeigt, wonach es genau 5 Typen von Platonischen Körpern gibt.