Universität Heidelberg

Masterarbeit

Für den Studiengang
Mathematik, M.Sc.

Kategorienäquivalenz L-analytischer Darstellungen und (φ, Γ)-Moduln über dem Robba-Ring

Max Witzelsperger

Betreut durch
Prof. Dr. Otmar Venjakob

17. Dezember 2019

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen als Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum

Unterschrift

Zusammenfassung

Sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Körpererweiterung und bezeichne $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ die absolute Galoisgruppe von L. Beim Studium p-adischer Darstellungen von G_L hat sich die Theorie der ursprünglich von Fontaine eingeführten (φ, Γ)-*Moduln* als bedeutendes Werkzeug erwiesen. Die Koeffizienten solcher Moduln leben in einem gewissen diskret bewerteten Körper $\mathbf{B}_L$, und $\Gamma := \Gamma_L$ bezeichnet die Galoisgruppe einer *Lubin-Tate-Erweiterung* L_∞/L, die in der klassischen Situation durch die zyklotomische Erweiterung $\mathbb{Q}_p(\mu_\infty)/\mathbb{Q}_p$ gegeben ist.

Ein Theorem von Cherbonnier und Colmez erlaubt im zyklotomischen Fall $L = \mathbb{Q}_p$ einen Koeffizientenwechsel von $\mathbf{B}_L$ zum *Robba-Ring* $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ aus der Theorie p-adischer Differentialgleichungen, durch den sich unter anderem eine Verbindung zwischen (φ, Γ_L)-Moduln und der p-adischen Hodge-Theorie herstellen lässt. Damit ein solcher Koeffizientenwechsel auch im Fall $L \neq \mathbb{Q}_p$ funktioniert, ist es notwendig, sich auf *überkonvergente* Darstellungen zu beschränken. Berger beweist als eines der Hauptergebnisse von [Ber16], dass jede L-*analytische* Darstellung überkonvergent ist, indem er eine Theorie lokal-analytischer Vektoren für die Operation von Γ_L auf Moduln über großen Periodenringen à la Fontaine entwickelt. Weiter definiert er die Kategorie der L-analytischen étalen (φ, Γ_L)-Moduln über $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ und zeigt, dass diese äquivalent zur Kategorie der L-analytischen Darstellungen von G_L ist.

In der vorliegenden Arbeit wird der Beweis beider Resultate im Detail ausgearbeitet. Insbesondere geben wir eine in sich geschlossene Darstellung der Theorie lokal-analytischer Vektoren, die der technische Kern von Bergers Argumentation ist.

Abstract

Let $L/\mathbb{Q}_p$ be a finite extension of fields and let $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ denote the absolute Galois group of L. The theory of (φ, Γ)-*modules*, originally introduced by Fontaine, has proven itself a significant tool in the study of p-adic representations of G_L. The coefficients of such modules live in a certain discretely valued field $\mathbf{B}_L$, and $\Gamma := \Gamma_L$ denotes the Galois group of a *Lubin-Tate extension* L_∞/L, which in the classical situation is given by the cyclotomic extension $\mathbb{Q}_p(\mu_\infty)/\mathbb{Q}_p$.

In the cyclotomic case $L = \mathbb{Q}_p$, a theorem of Cherbonnier and Colmez allows for a change of coefficients from $\mathbf{B}_L$ to the *Robba ring* $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ of p-adic differential equations, making it possible, among other things, to relate (φ, Γ_L)-modules to p-adic Hodge theory. For such a change of coefficients to work in the case $L \neq \mathbb{Q}_p$ as well, it is necessary to restrict oneself to *overconvergent* representations. As one of the main results in [Ber16], Berger proves that any L-*analytic* representation is overconvergent by developping a theory of locally analytic vectors for the action of Γ_L on modules over big rings of periods à la Fontaine. He goes on to define the category of L-analytic étale (φ, Γ_L)-modules over $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ and shows that it is equivalent to the category of L-analytic representations of G_L.

In the present thesis, the proof of both results is worked out in detail. In particular, we give a self-contained presentation of the theory of locally analytic vectors, which is the technical heart of Berger's reasoning.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein bedeutender Anteil der Forschung in moderner algebraischer Zahlentheorie ist auf das Studium sogenannter *Galois-Darstellungen* konzentriert, die in vielen Bereichen – beispielsweise der arithmetischen Geometrie – in natürlicher Weise auftreten.
Ist etwa E eine elliptische Kurve über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und p eine Primzahl, so besitzt der *Tate-Modul* T_pE eine Struktur als *p-adische Darstellung* der absoluten Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, welche zahlreiche arithmetische Informationen über E enthält. Allgemein verstehen wir unter einer p-adischen Darstellung einer topologischen Gruppe G einen freien $\mathbb{Z}_p$-Modul endlichen Ranges (oder einen $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum endlicher Dimension), der mit einer stetigen und linearen G-Operation ausgestattet ist.
Für eine Primzahl ℓ lässt sich $G_{\mathbb{Q}_\ell} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$ in Form einer gewissen Zerlegungsgruppe (bis auf Konjugation) mit einer Untergruppe $D_\ell \leq G_{\mathbb{Q}}$ identifizieren,[1] sodass jede p-adische Darstellung von $G_{\mathbb{Q}}$ durch Einschränkung zu einer Darstellung von $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ wird, welche in der Regel einfacher zu untersuchen ist und aus der sich wiederum Rückschlüsse über die ursprüngliche $G_{\mathbb{Q}}$-Wirkung ziehen lassen. Oft kann man eine p-adische Darstellung von $G_{\mathbb{Q}}$ sogar zurückgewinnen, sofern ihre induzierten $G_{\mathbb{Q}_\ell}$-Operationen für hinreichend viele ℓ verstanden sind, siehe [Ber13, Prop. 1.1].
Von besonderer Bedeutung ist dabei der Fall $\ell = p$, d.h. die Untersuchung p-adischer Darstellungen der absoluten Galoisgruppe von $\mathbb{Q}_p$, oder allgemeiner von endlichen Erweiterungen $K/\mathbb{Q}_p$. Es sind solche Darstellungen, die in dieser Arbeit betrachtet werden.

In der *p-adischen Hodge-Theorie*[2] werden p-adische Darstellungen V von G_K klassifiziert, indem man ihnen durch einen allgemeinen Formalismus gewisse Vektorräume $\mathbf{D}_B(V)$ über den G_K-Invarianten von sogenannten *Periodenringen* zuordnet. Dabei handelt es sich um erstmals von Jean-Marc Fontaine eingeführte $\mathbb{Q}_p$-Algebren B, die mit einer linearen G_K-Wirkung und verschiedenen Zusatzstrukturen – beispielsweise einem Frobenius-Endomorphismus oder einer Filtrierung – versehen sind und einige Axiome erfüllen, die unter anderem implizieren, dass B^{G_K} ein Körper ist. Man nennt V dann *B-zulässig*, wenn $\dim_{B^{G_K}} \mathbf{D}_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ gilt.
Beispiele für Periodenringe sind $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ bzw. $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, und eine Darstellung heißt *de Rham* bzw. *kristallin*, wenn sie $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$- bzw. $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$-zulässig ist. Die Eigenschaft „de Rham“ schließt alle sol-

[1] die Wahl eines Vertreters der Konjugationsklasse von D_ℓ ist gleichbedeutend mit der Wahl einer Einbettung $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

[2] einen Überblick über das Gebiet vermittelt z.B. [BC09].

chen Darstellungen ein, die im Kontext der arithmetischen Geometrie auftreten, während die kleinere Klasse der kristallinen Darstellungen das Reduktionsverhalten auf der geometrischen Seite beschreibt. So wurde von Fontaine gezeigt, dass (mit den Notationen von oben) Darstellungen der Form $V_E := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_pE$ von $G_{\mathbb{Q}_p}$ stets de Rham sind; weiter haben Coleman-Iovita – als p-adisches Analogon zu dem für $\ell \neq p$ bekannten Kriterium von Néron-Ogg-Shafarevich – bewiesen, dass E genau dann gute Reduktion bei p besitzt, wenn V_E kristallin ist.

Eine weitere äußerst nützliche Beschreibung p-adischer Darstellungen liefern Fontaines (φ, Γ)-*Moduln*. Dies sind freie Moduln von endlichem Rang über dem Ganzheitsring $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$ eines „2-dimensionalen lokalen Körpers“ $\mathbf{B}_{\mathbb{Q}_p}$, die einen Frobenius-Endomorphismus φ und eine kompatible Operation einer gewissen p-adischen Lie-Gruppe Γ besitzen, siehe 1.2.7 und 3.1.1 für präzise Definitionen. Im klassischen Fall ist dabei $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ die Galoisgruppe der zyklotomischen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, und man hat das folgende Ergebnis [Fon90, Thm. 3.4.3]:

Theorem. *Es gibt eine Kategorienäquivalenz* $V \longmapsto \mathbf{D}(V)$ *zwischen der Kategorie der* $\mathbb{Q}_p$*-linearen (bzw.* $\mathbb{Z}_p$*-linearen) Darstellungen von* $G_{\mathbb{Q}_p}$ *und der Kategorie der étalen* (φ, Γ)*-Moduln über* $\mathbf{B}_{\mathbb{Q}_p}$ *(bzw.* $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$*).*

Eine der Anwendungen dieser Kategorienäquivalenz liegt in der Berechnung der Galois-Kohomologie einer Darstellung V, die sich nach Laurent Herr aus $\mathbf{D}(V)$ gewinnen lässt.
Außerdem wurden (φ, Γ)-Moduln von Pierre Colmez für den Beweis der p-adischen lokalen Langlands-Korrespondenz zwischen 2-dimensionalen Darstellungen von $G_{\mathbb{Q}_p}$ und gewissen Banach-Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ herangezogen, bei dem sie eine wesentliche Rolle spielen, siehe [Bre10].
Eine solche Korrespondenz auch bzgl. $\mathrm{GL}_2(L)$ für endliche Erweiterungskörper $L/\mathbb{Q}_p$ zu konstruieren, erweist sich als weit schwieriger und scheint eine Verallgemeinerung der obigen Kategorienäquivalenz auf L-lineare Darstellungen von Galoisgruppen G_L zu erfordern. Die für eine solche Ausdehnung benötigten (φ, Γ_L)-Moduln wurden durch Mark Kisin und Wei Ren eingeführt, indem anstelle der zyklotomischen Erweiterung $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ ein Körper L_∞ für die Definition von Γ_L verwendet wurde, welcher aus L durch Adjunktion der π^n-Torsionspunkte eines formalen Lubin-Tate-Gruppengesetzes hervorgeht. Siehe Abschnitt 1.1 für eine detaillierte Konstruktion.
Die resultierenden *Lubin-Tate-*(φ, Γ_L)*-Moduln* über $\mathbf{B}_L$ beinhalten die zyklotomischen als Spezialfall und liefern eine Verallgemeinerung von Fontaines Kategorienäquivalenz, siehe Theorem 3.1.5.

Mit der p-adischen Hodge-Theorie und den Lubin-Tate-(φ, Γ)-Moduln haben wir zwei Ausgangspunkte zur Erforschung p-adischer Darstellungen skizziert.
Die Frage, ob sich ein fruchtbarer Zusammenhang zwischen beiden Perspektiven herstellen lässt, wird durch die Betrachtung von (φ, Γ_L)-Moduln über dem *Robba-Ring* $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ aus der Theorie p-adischer Differentialgleichungen positiv beantwortet. Um einer Darstellung V einen solchen Modul über $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ zuordnen zu können, ist ein Abstieg von $\mathbf{D}(V)$ zu einem

Vektorraum $\mathbf{D}^\dagger(V)$ über dem Teilkörper $\mathbf{B}_L^\dagger \subseteq \mathbf{B}_L$ sogenannter *überkonvergenter* Elemente notwendig, welcher in $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^\dagger$ enthalten ist. Man setzt dann

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V) := \mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_L^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V). \tag{1}$$

Eine Darstellung, die einen solchen Abstieg erlaubt, wird als *überkonvergent* bezeichnet. Nach einem Theorem von Cherbonnier-Colmez (3.2.4) ist im zyklotomischen Fall $L = \mathbb{Q}_p$ jede Darstellung überkonvergent, und man erhält eine Kategorienäquivalenz $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger$ zwischen den $\mathbb{Q}_p$-linearen Darstellungen von $G_{\mathbb{Q}_p}$ und den étalen $(\varphi, \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$-Moduln über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}^\dagger$. In dieser Situation werden Methoden aus der Theorie p-adischer Differentialgleichungen auf Probleme über Galois-Darstellungen anwendbar; außerdem lassen sich viele der Invarianten, die V in der p-adischen Hodge-Theorie zugeordnet werden, aus $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$ rekonstruieren, so gilt beispielsweise (im einfachsten Fall) $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$.
Im Fall $L \neq \mathbb{Q}_p$ gibt es Darstellungen, die nicht überkonvergent sind (siehe 3.2.6), und die Beschreibung der überkonvergenten Objekte unter allen L-linearen Darstellungen ist ein nicht-triviales Problem. Eine einfache hinreichende Bedingung für die Überkonvergenz einer Darstellung V von G_L ist, dass V über Γ_L faktorisiert.
Als subtileres Kriterium hat sich die *L-Analytizität* von Darstellungen herausgestellt, wobei wir V als L-analytisch bezeichnen, wenn für jede $\mathbb{Q}_p$-Einbettung $\sigma\colon L \longrightarrow \overline{L}$ der $\mathbb{C}_p$-Vektorraum $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ die triviale $\mathbb{C}_p$-semilineare Darstellung von G_L ist (s. die Definitionen 3.3.8 und A.2.1). Der für einige Zeit vermutete Zusammenhang zwischen L-Analytizität und Überkonvergenz wurde von Laurent Berger in Theorem 10.1 von [Ber16] mit der dort entwickelten Theorie sogenannter *lokal-analytischer Vektoren* nachgewiesen:

Theorem A (Berger). *Jede L-analytische Darstellung ist überkonvergent.*

Darauf aufbauend haben Berger und Lionel Fourquaux gezeigt, dass sich jede überkonvergente Darstellung schreiben lässt als Quotient eines Tensorproduktes $X \otimes_L Y$, wobei X eine L-analytische Darstellung ist und Y über Γ_L faktorisiert. Theorem A ist eines der Hauptresultate, die in dieser Arbeit aufbereitet werden, siehe Theorem 3.4.6.

Bergers Ergebnis erlaubt uns, durch den Koeffizientenwechsel (1) jeder L-analytischen Darstellung V einen (φ, Γ_L)-Modul $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$ über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^\dagger$ zuzuordnen, und in [Ber16] wird auch das wesentliche Bild des resultierenden Funktors in Form der *L-analytischen* (φ, Γ_L)-Moduln beschrieben. Der Begriff der L-Analytizität eines (φ, Γ_L)-Moduls D über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^\dagger$ lässt sich folgendermaßen definieren:
Es ist Γ_L eine lokal L-analytische (und daher insbesondere lokal $\mathbb{Q}_p$-analytische) Gruppe, deren Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(\Gamma_L)$ isomorph zu L ist. Man kann zeigen (s. 3.3.4), dass die Operation von Γ_L auf D stets lokal $\mathbb{Q}_p$-analytisch und insbesondere differenzierbar ist, sodass man gemäß 2.2.6 eine *abgeleitete Operation* der Lie-Algebra

$$\mathrm{Lie}(\Gamma_L) \times D \longrightarrow D \tag{2}$$

erhält. Diese Abbildung ist $\mathbb{Q}_p$-bilinear, und D heißt *L-analytisch*, wenn sie sogar L-bilinear ist. Sei nun $E/\mathbb{Q}_p$ eine Galois-Erweiterung, welche die normale Hülle von $L/\mathbb{Q}_p$ enthält, und sei K/L eine beliebige Erweiterung mit absoluter Galoisgruppe G_K. In voller Allgemeinheit lautet nun Bergers Ergebnis über den Funktor $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ [Ber16, Thm. 10.4]:[3]

Theorem B. *Der Funktor* $V \longmapsto \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ *ist eine Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie der* L*-analytischen* E*-linearen Darstellungen von* G_K *und der Kategorie der* L*-analytischen* (φ, Γ_K)*-Moduln über* $E \otimes_L \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, Bergers Beweis dieses Theorems vollständig und in zugänglicher Form aufzubereiten, indem die dafür benötigte Theorie lokal-analytischer Vektoren aus [Ber16] im Detail entwickelt wird.
Unser Beweis (siehe Theorem 3.4.8) wird unter der vereinfachenden Annahme geführt, dass $L/\mathbb{Q}_p$ galoissch ist und $E = L$ gilt. Wir arbeiten jedoch ausschließlich in Abschnitt 3.4 mit dieser Annahme, während der Rest der Arbeit in derselben Allgemeinheit wie [Ber16] gehalten ist; außerdem deuten wir in Bemerkung 3.4.1 an, welche Überlegungen für die Behandlung des allgemeinen Falles notwendig sind, sodass dieser unter etwas größerem Notationsaufwand mit denselben Argumenten wie in Abschnitt 3.4 eingesehen werden kann.

In Kapitel 1, das als Nachschlagewerk bei der Lektüre der restlichen Arbeit verwendet werden kann, geben wir ausführliche Definitionen der verschiedenen Periodenringe, in denen die Koeffizienten der in Kapitel 3 betrachteten (φ, Γ)-Moduln leben. Dabei konstruieren wir im ersten Abschnitt die Lubin-Tate-Erweiterung L_∞/L, im zweiten dann den „klassischen“ Koeffizientenring $\mathbf{B}_L$, und in Abschnitt 1.3 schließlich die Ringe $\mathbf{B}_L^{[r,s]}$ und $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},L}$ rigid-analytischer Funktionen, sowie deren „große“ Varianten $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}$ und $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$.
Der erste Abschnitt von Kapitel 2 umreisst auf einem abstrakten Level die Theorie *lokal-analytischer* bzw. *pro-analytischer* Vektoren für Operationen p-adischer Lie-Gruppen auf Banachräumen bzw. Frécheträumen. Darauf aufbauend wird in Abschnitt 2.2 der zentrale Begriff der L-Analytizität im Kontext von Γ_K-Wirkungen untersucht, der oben in (2) bereits erklärt wurde. Dabei konstruieren wir in 2.2.7 die Operatoren ∇_σ (indiziert durch alle $\mathbb{Q}_p$-Einbettungen $\sigma\colon L \longrightarrow \overline{L}$), welche in Satz 2.2.8 eine entscheidende Charakterisierung der L-Analytizität liefern.
Diese wird einerseits in Kapitel 3 den Zusammenhang zwischen den beiden Konzepten von L-Analytizität in der Welt der (φ, Γ_K)-Moduln und im Kontext von Darstellungen sichtbar machen; andererseits bilden die in Abschnitt 2.4 durch Normierung aus den ∇_σ gewonnenen Operatoren ∂_σ das Werkzeug für das Hauptergebnis von Kapitel 2, nämlich den *Monodromiesatz* 2.4.9 (Theorem 6.1 in [Ber16]). Dieser beschreibt den Abstieg von pro-analytischen zu L-pro-analytischen Vektoren durch Lösen von Differentialgleichungen „$\partial_\sigma = 0$“ in Analogie zum Abstieg von differenzierbaren zu holomorphen Funktionen mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
Schließlich wenden wir in Abschnitt 2.3 den Formalismus aus 2.2 auf die im ersten Kapitel definierten Periodenringe an und berechnen die L-pro-analytischen Vektoren in dem „großen Periodenring“ $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$. Die wesentlichen Resultate sind Theorem 2.3.7 und Satz 2.3.8, deren Aussagen bei Berger in [Ber16, Thm. 4.4] zu finden sind.

[3] wir haben in der obigen Exposition der Einfachheit halber nur den Fall $L = K$ betrachtet.

Die ersten beiden Abschnitte von Kapitel 3 geben eine kurze Übersicht über die von uns benötigten grundlegenden Tatsachen zu Lubin-Tate-(φ, Γ)-Moduln und zum Begriff der Überkonvergenz, die ohne Beweise zitiert werden. Abschnitt 3.3 dient der Untersuchung von (φ, Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ und insbesondere ihrer Γ_K-Wirkung, um den Begriff der L-Analytizität für (φ, Γ_K)-Moduln definieren zu können, den wir im Anschluss auch als Eigenschaft von Darstellungen einführen.
In Theorem 3.4.8 des letzten Abschnittes von Kapitel 3 zeigen wir schließlich die in Theorem B formulierte Kategorienäquivalenz unter der Annahme $L = E$. Davor geben wir in 3.4.6 den Beweis für Theorem A, welcher auf dem Monodromiesatz und der Beschreibung von $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}$ aus Kapitel 2 beruht und seinerseits grundlegend für die Formulierung und den Beweis von Theorem 3.4.8 ist.
Der Anhang A beinhaltet eine Zusammenstellung von Ergebnissen aus dem Artikel [Ked05] von Kiran S. Kedlaya zur semilinearen Algebra über Robba-Ringen, die für einige unserer zentralen Theoreme gebraucht werden und deren Behandlung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.
In A.1 geben wir eine kurze Einführung zu Kedlayas *Vektorbündeln*, auf die im Beweis des Monodromiesatzes 2.4.9 zurückgegriffen wird. Appendix A.2 enthält die wichtigsten Resultate aus der *Theorie des Anstieges*, welche von uns verwendet werden, um Bergers Theorem 3.4.6 (Theorem A oben) einzusehen.

Voraussetzungen. In der ganzen Arbeit sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Körpererweiterung mit Ganzheitsring $\mathcal{O} := \mathcal{O}_L \subseteq L$ und Restklassenkörper $\kappa := \kappa_L$ der Kardinalität $q = p^h$. Wir fixieren einen Uniformisierer $\pi \in \mathcal{O}$, sowie einen algebraischen Abschluss $\overline{L}$ von L und bezeichnen seine p-adische Vervollständigung mit $\mathbb{C}_p$. Die Bewertung $v := v_p$ von $\mathbb{C}_p$ sei so normiert, dass $v_p(\pi) = 1$ gilt, sodass $|\pi| := |\pi|_p = p^{-1}$ ist.
Bezeichne $\Sigma := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_{\mathbb{Q}_p}}(L, \overline{L})$ die Menge der $\mathbb{Q}_p$-Algebrenhomomorphismen $L \longrightarrow \overline{L}$, und sei E/L eine endliche Erweiterung, sodass E galoissch über $\mathbb{Q}_p$ ist und die normale Hülle von L umfasst. Insbesondere gilt dann $\sigma(L) \subseteq E$ für alle $\sigma \in \Sigma$. Wir betrachten E als Koeffizientenbereich.
In Charakteristik p schreiben wir φ_p für den p-Frobenius $x \longmapsto x^p$ und $\varphi := \varphi_q = \varphi_p^h$ für den q-Frobenius.
Alle weiteren Notationen, die für den Rest der Arbeit gelten sollen, werden am Ende von Abschnitt 1.1 eingeführt, nachdem wir *Lubin-Tate-Erweiterungen* definiert haben.

Danksagung. Ich möchte meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Otmar Venjakob an dieser Stelle für den spannenden Themenvorschlag und die Betreuung meiner Arbeit danken. Weiter bedanke ich mich bei meinen Freunden Milan Malčić und Rustam Steingart für ihre stilistischen Anmerkungen und einige hilfreiche inhaltliche Gespräche.

Kapitel 1

Lubin-Tate-Erweiterungen und Koeffizientenringe

1.1 Lubin-Tate-Erweiterungen

Definition 1.1.1. (a) Ein *(eindimensionales) kommutatives formales Gruppengesetz über* $\mathcal{O}$ ist eine Potenzreihe $F \in \mathcal{O}[[X,Y]]$ mit

- $F(X,0) = X$ und $F(0,Y) = Y$,
- $F(X, F(Y,Z)) = F(F(X,Y), Z)$,
- $F(X,Y) = F(Y,X)$.

Ein *Homomorphismus* $\varphi\colon F \longrightarrow G$ *von formalen Gruppengesetzen* F, G ist eine Potenzreihe $\varphi \in \mathcal{O}[[X]]$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(F(X,Y)) = G(\varphi(X), \varphi(Y))$.
Identität und Verknüpfung von Homomorphismen und damit auch der Begriff des Isomorphismus von formalen Gruppengesetzen sind in naheliegender Weise erklärt.

(b) Ein Element $\phi \in \mathcal{O}[[X]]$ heißt *Frobenius-Potenzreihe* für den Uniformisierer π, falls gilt

- $\phi \in \pi X + (X^2)$,
- $\phi \equiv X^q \mod (\pi)$.

Bemerkung 1.1.2. Sei F ein kommutatives formales Gruppengesetz über $\mathcal{O}$.

(i) Man kann zeigen, dass eine eindeutige Potenzreihe $\iota_F \in -X + (X^2)$ über $\mathcal{O}$ existiert, die $F(X, \iota_F(X)) = 0$ erfüllt.

(ii) Aus (i) folgt, dass für jeden vollständigen nichtarchimedischen Erweiterungskörper K von L das maximale Ideal $\mathfrak{m}_K \subseteq K$ via $x +_F y := F(x,y)$ mit einer Struktur als abelsche Gruppe versehen wird.

(iii) Die Menge $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(F)$ aller Homomorphismen $F \longrightarrow F$ wird durch die Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(X) := F(\varphi(X), \psi(X)) \quad \text{und} \quad (\varphi \cdot \psi)(X) := \varphi(\psi(X))$$

zu einem Ring mit Nullelement 0 und Einselement X. Ein Element

$$aX + \text{Terme höheren Grades} \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(F)$$

ist invertierbar genau dann, wenn $a \in \mathcal{O}^\times$ ist.

Satz 1.1.3. *Für jede Frobenius-Potenzreihe ϕ existiert ein eindeutiges kommutatives formales Gruppengesetz F_ϕ über $\mathcal{O}$, sodass $\phi \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(F_\phi)$ ist. Weiter gilt:*

(i) Es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(F_\phi), \; a \longmapsto [a]_\phi$$

mit $[a]_\phi \in aX + (X^2)$ für alle $a \in \mathcal{O}$ und $[\pi]_\phi = \phi$.

(ii) Ist ψ eine weitere Frobenius-Potenzreihe zu π, so hat man einen Isomorphismus $F_\phi \xrightarrow{\sim} F_\psi$.

Beweis. Siehe [Sch17, Prop. 1.3.4, Prop. 1.3.6, Rem. 1.3.7]. □

Definition 1.1.4. Man nennt F_ϕ das *Lubin-Tate-Gruppengesetz* zu ϕ.

Konstruktion 1.1.5. Sei nun $\phi \in \mathcal{O}[[X]]$ eine Frobenius-Potenzreihe und $F := F_\phi$. Für jede endliche Erweiterung K/L induziert F eine Gruppenstruktur auf dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_K$ und damit auch auf

$$\mathfrak{M} := \{a \in \overline{L} \mid |a| < 1\} = \bigcup_{K/L \text{ endl.}} \mathfrak{m}_K.$$

Weiter liefert der Ringhomomorphismus $[-]_\phi$ eine $\mathcal{O}$-Modulstruktur auf $\mathfrak{M}$, und wir definieren für $n \geq 0$ den $\mathcal{O}/(\pi^n)$-Modul

$$\mathcal{F}_n := \ker[\pi^n]_\phi \subseteq \mathfrak{M}.$$

Dieser ist frei vom Rang 1 über $\mathcal{O}/(\pi^n)$ ([Sch17, Prop. 1.3.10]). Wir betrachten den Turm $L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots$ der endlichen Erweiterungen $L_n := L(\mathcal{F}_n)$ von L und setzen

$$L_\infty := \bigcup_{n \geq 0} L_n.$$

Da die Elemente von $G_L := \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ mit der Bewertung von $\overline{L}$ verträglich sind, sieht man leicht, dass G_L auf den $\mathcal{F}_n$ durch $\mathcal{O}/(\pi^n)$-lineare Automorphismen wirkt, insbesondere sind also die Erweiterungen L_n/L galoissch. Nach [Sch17, Prop. 1.3.12] hat man einen Gruppenisomorphismus

$$\chi_{L,n}\colon \mathrm{Gal}(L_n/L) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}/(\pi^n))^\times,$$

der gegeben ist durch $\sigma(z) = [\chi_{L,n}(\sigma)]_\phi(z)$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_n/L)$ und $z \in \mathcal{F}_n$. Für den Grad der Erweiterungen folgt

$$[L_n : L] = (q-1)q^{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Dieselbe Proposition besagt außerdem:

(i) L_n/L ist total verzweigt.

(ii) Für jeden Erzeuger ω von $\mathcal{F}_n$ als $\mathcal{O}/(\pi^n)$-Modul gilt $L_n = L(\omega)$ und $\mathcal{O}_{L_n} = \mathcal{O}[\omega]$, und ω ist ein uniformisierendes Element in L_n.

Die Moduln $\mathcal{F}_n$ bilden ein projektives System mit den Übergangsabbildungen $[\pi]_\phi$, und der projektive Limes

$$T := \varprojlim_{[\pi]_\phi} \mathcal{F}_n$$

heißt der *Tate-Modul* zu ϕ. Er ist ein freier $\mathcal{O}$-Modul vom Rang 1, wobei eine Familie $(\omega_n)_n \in T$ genau dann ein Erzeuger für T ist, wenn jedes ω_n den $\mathcal{O}/(\pi^n)$-Modul $\mathcal{F}_n$ erzeugt. Schließlich liefern die $\chi_{L,n}$ durch Übergang zum projektiven Limes einen Isomorphismus proendlicher Gruppen

$$\chi_L\colon \mathrm{Gal}(L_\infty/L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^\times,$$

den *Lubin-Tate-Charakter*.

Bemerkung 1.1.6. Mithilfe von Satz 1.1.3(ii) kann man zeigen, dass die Erweiterungen L_n nur von dem Uniformisierer π abhängen und nicht von der Wahl der Potenzreihe ϕ ([Sch17, Rem. 1.3.8]).

Beispiel 1.1.7. (i) Für die Frobenius-Potenzreihe $\phi = \pi X + X^q$ nennt man F_ϕ das *spezielle Lubin-Tate-Gruppengesetz* zu π.

(ii) Sind $L = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$ und $\phi = (1+X)^p - 1$, so ist

$$F_\phi = \widehat{\mathbb{G}}_m := (1+X)(1+Y) - 1$$

das *multiplikative formale Gruppengesetz*. Es ist nicht speziell für $p \neq 2$. Weiter gilt in diesem Fall

$$\mathcal{F}_n = \{\zeta - 1 \mid \zeta^{p^n} = 1\} \quad \text{und} \quad L_n = \mathbb{Q}_p(\zeta \mid \zeta^{p^n} = 1),$$

d.h. L_∞ ist die *zyklotomische Erweiterung* von $\mathbb{Q}_p$.

Wir können nun das Setting fixieren, in dem alle weiteren Konstruktionen dieser Arbeit stattfinden werden:

Sei $\phi = X^q + \pi X$ und $F := F_\phi$ das spezielle Lubin-Tate-Gruppengesetz, und seien die Erweiterungen L_n, L_∞, sowie der Tate-Modul T und der Lubin-Tate-Charakter χ_L wie in Konstruktion 1.1.5 gegeben. Bezeichne $\log_{\mathrm{LT}}$ den *Lubin-Tate-Logarithmus* zu F, d.h. die eindeutig bestimmte Potenzreihe $f \in F[[X]]$ mit

(a) $f \in X + (X^2)$,

(b) $f(F(X,Y)) = f(X) + f(Y)$,

und bezeichne $\exp_{\mathrm{LT}}$ sein Inverses (s. [Haz78, §5.4]). Nach [Lan78, §8.6 Lem. 3(ii)] konvergiert der Logarithmus $\log_{\mathrm{LT}}(X)$ für $|X| \leq 1$, und nach §8.6 Lem. 2 ebenda ist er linear über $\mathcal{O}$ in dem Sinne, dass für alle $a \in \mathcal{O}$ gilt

$$\log_{\mathrm{LT}}([a]_\phi(X)) = a \cdot \log_{\mathrm{LT}}(X).$$

Galois-Gruppen. Für endliche Erweiterungen K/L setze $K_n := KL_n$, $K_\infty := KL_\infty$, sowie die Galoisgruppen

$$G_K := \mathrm{Gal}(\overline{L}/K), \qquad H_K := \mathrm{Gal}(\overline{L}/K_\infty), \qquad \Gamma_K := G_K/H_K \cong \mathrm{Gal}(K_\infty/K).$$

In Γ_L definieren wir die offenen Normalteiler

$$\Gamma_n := \mathrm{Gal}(L_\infty/L_n) \trianglelefteq \Gamma_L,$$

welche eine Umgebungsbasis der 1 bilden.

Es sind $G_K \leq G_L$ und $H_K = H_L \cap G_K \leq H_L$ jeweils offene Untergruppen, und ebenso ist $\Gamma_K \leq \Gamma_L$ offen, denn wegen $H_K = H_L \cap G_K$ gilt

$$\Gamma_K = G_K/(H_L \cap G_K) \cong G_K H_L/H_L \subseteq G_L/H_L = \Gamma_L$$

also insbesondere $[\Gamma_L : \Gamma_K] = [G_L : G_K H_L] \leq [G_L : G_K] < \infty$. Für jede endliche Erweiterung K/L ist folglich $\Gamma_n \subseteq \Gamma_K$ für genügend große n.

Die Uniformisierer ω_n. Wir fixieren einen Erzeuger $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ des Tate-Moduls T. Jedes ω_n erzeugt die Erweiterung L_n/L, und wir bezeichnen mit $Q_n \in \mathcal{O}[X]$ das Minimalpolynom von ω_n über L. Man hat $Q_0(X) = X$, $Q_1(X) = [\pi]_\phi(X)/X$ und induktiv

$$Q_n(X) = Q_{n-1}([\pi]_\phi(X)) = \frac{[\pi]_\phi^n(X)}{[\pi]_\phi^{n-1}(X)} \text{ für } n \geq 2,$$

denn das Polynom $Q_{n-1}([\pi]_\phi(X))$ ist normiert, hat offensichtlich ω_n als Nullstelle und es hat Grad $(q-1) \cdot q^{n-1} = [L_n : L]$.

Bemerkung 1.1.8. Nach [Lan78, §8.6 Lem. 1] gilt $\log_{\mathrm{LT}}(X) = \lim_{n\to\infty}[\pi]_\phi^n(X)/\pi^n$, sodass wegen $\prod_{k=1}^n Q_k(X) = [\pi]_\phi^n(X)/X$ folgt

$$\log_{\mathrm{LT}}(X) = X \cdot \prod_{k\geq 1} \frac{Q_k(X)}{\pi}.$$

1.2 Einige Periodenringe

Konstruktion 1.2.1 (Der Tilt von $\mathbb{C}_p$). Wir setzen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} := \varprojlim_{(-)^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(\pi) = \{(\overline{a}_i)_{i\geq 0} \mid \overline{a}_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(\pi),\ \overline{a}_i = \overline{a}_{i+1}^q\}.$$

Dies ist eine perfekte κ-Algebra, und es gibt eine natürliche multiplikative Abbildung

$$\theta\colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p},\ a = (\overline{a}_i)_{i\geq 0} \longmapsto \lim_{i\to\infty} a_i^{q^i},$$

wobei $a_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ jeweils einen Lift für $\overline{a}_i$ bezeichne. Man hat auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ eine nicht-archimedische Bewertung

$$v_{\mathbb{C}_p^\flat}(a) := v_p(\theta(a)) = \lim_{i\to\infty} q^i \cdot v_p(a_i).$$

Der Quotientenkörper $\mathbb{C}_p^\flat := \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})$ heißt der *Tilt* von $\mathbb{C}_p$ und hat folgende Eigenschaften:

(i) $\mathbb{C}_p^\flat$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p.

(ii) $\mathbb{C}_p^\flat$ ist vollständig für die Bewertung $v_{\mathbb{C}_p^\flat}$ und sein Ganzheitsring ist $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$.

(iii) Der Restklassenkörper von $\mathbb{C}_p^\flat$ ist kanonisch isomorph zu dem von $\mathbb{C}_p$ und ist folglich ein algebraischer Abschluss von κ.

Für Details zu Tilts siehe [Sch17, §1.4]. Diese Konstruktion ermöglicht es, sogenannten *perfektoiden* Zwischenkörpern K von $\mathbb{C}_p/L$ einen vollständigen, nicht-archimedischen und perfekten Körper $K^\flat$ der Charakteristik p mit demselben Restklassenkörper wie K zuzuordnen.

Bemerkung 1.2.2. Die Elemente in G_L setzen sich stetig auf $\mathbb{C}_p$ fort, sodass wir nach [Sch17, Lem. 1.4.2] eine stetige Gruppenwirkung $G_L \times \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ erhalten. Sie induziert eine Operation auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ durch $g((\overline{a}_i)_i) := (\overline{g(a_i)})_i$ für $g \in G_L$, die sich stetig zu einer Wirkung

$$G_L \times \mathbb{C}_p^\flat \longrightarrow \mathbb{C}_p^\flat$$

fortsetzt. Sie respektiert offensichtlich die Bewertung von $\mathbb{C}_p^\flat$ (vgl. auch [Sch17, Lem. 1.4.13]).

Wir betrachten den oben fixierten Erzeuger $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$ des Tate-Moduls T. Weil der Homomorphismus $[\pi]_\phi$ modulo (π) zum Potenzieren mit q wird, erhalten wir ein Element

$$\overline{\omega} := (\dots, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_1, 0) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}.$$

Wegen $v_p(\omega_n) = 1/q^{n-1}(q-1)$ gilt

$$v_{\mathbb{C}_p^\flat}(\overline{\omega}) = \lim_{n\to\infty} q^n \cdot v_p(\omega_n) = \frac{q}{q-1},$$

d.h. $\overline{\omega} \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p^\flat}$. Wir haben folglich einen wohldefinierten Homomorphismus von κ-Algebren

$$\kappa[[X]] \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat},\ f \longmapsto f(\overline{\omega}),$$

welcher injektiv ist, da sonst sein Kern gleich einer Potenz von (X) und folglich das Element $\overline{\omega}$ gleich Null oder nilpotent in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ wäre. Also setzt sich der Einsetzungshomomorphismus auf die Quotientenkörper fort, und wir bezeichnen dessen Bild

$$\mathbf{E}_L := \kappa((\overline{\omega})) \subseteq \mathbb{C}_p^\flat$$

als den *Normenkörper* zu $\mathbb{C}_p^\flat$.

Bemerkung 1.2.3. Da $H_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L_\infty)$ auf $\mathbf{E}_L$ trivial wirkt, erhalten wir eine Operation von $\Gamma_L = G_L/H_L$ auf $\mathbf{E}_L$. Eine einfache Rechnung zeigt für $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma(\overline{\omega}) = \overline{[\chi_L(\gamma)]_\phi(\omega)} = \overline{[\chi_L(\gamma)]}(\overline{\omega}),$$

wobei $\overline{[a]} \in \kappa[[X]]$ für $a \in \mathcal{O}$ die Reduktion von $[a]_\phi$ modulo (π) bezeichne.
Weiter ist der Körper $\mathbf{E}_L$ unabhängig von der Wahl des Erzeugers ω von T, denn jeder weitere Erzeuger ist von der Form $a \cdot \omega := [a]_\phi(\omega)$ für ein $a \in \mathcal{O}^\times$. Für $\gamma := \chi_L^{-1}(a) \in \Gamma_L$ folgt

$$\overline{a\omega} = \overline{[\chi_L(\gamma)]}(\overline{\omega}) = \gamma(\omega) \in \mathbf{E}_L,$$

d.h. $\kappa((\overline{a\omega})) \subseteq \kappa((\overline{\omega})) = \mathbf{E}_L$ und per Symmetrie folgt Gleichheit.

Satz 1.2.4. *Die Einschränkung der H_L-Wirkung von $\mathbb{C}_p^\flat$ auf den separablen Abschluss $\mathbf{E}_L^{\mathrm{sep}}$ von $\mathbf{E}_L$ liefert einen Isomorphismus topologischer Gruppen*

$$\mathrm{Gal}(\overline{L}/L_\infty) = H_L \xrightarrow{\sim} G_{\mathbf{E}_L} = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}_L^{\mathrm{sep}}/\mathbf{E}_L).$$

Beweis. [Sch17, Thm. 1.6.7]. □

Konstruktion 1.2.5 (Periodenringe). Wir machen im Folgenden Gebrauch von dem Funktor *verzweigter Wittvektoren*

$$W_L(-)\colon \mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}}$$

auf der Kategorie $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}}$ der $\mathcal{O}$-Algebren. Im Falle einer perfekten κ-Algebra B hat man

$$W_L(B) \cong \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(B),$$

wobei W die „klassischen“ Wittvektoren und $\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}$ den Ganzheitsring der maximal unverzweigten Teilerweiterung von $L/\mathbb{Q}_p$ bezeichnen. Für eine detaillierte Konstruktion des Funktors $W_L(-)$ konsultiere man [Sch17, §1.1].

Wir definieren nun die $\mathcal{O}$-Algebren

$$\widetilde{\mathbf{A}} := W_L(\mathbb{C}_p^\flat) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{B}} := \widetilde{\mathbf{A}}[\pi^{-1}].$$

Da $\mathbb{C}_p^\flat$ ein perfekter Erweiterungskörper von κ ist, ist $\widetilde{\mathbf{A}}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0 mit Primelement π und Restklassenkörper $\mathbb{C}_p^\flat$, und jedes Element $x = (x_n)_n \in \widetilde{\mathbf{A}} = \prod_{n\geq 0} \mathbb{C}_p^\flat$ besitzt eine eindeutige π-adische Reihendarstellung

$$x = \sum_{n\geq 0} \pi^n [x_n^{q^{-n}}],$$

wobei

$$[-]\colon \mathbb{C}_p^\flat \longrightarrow W_L(\mathbb{C}_p^\flat),\ a \longrightarrow (a, 0, 0, \ldots)$$

die multiplikative *Teichmüller-Abbildung* bezeichnet (vgl. [Sch17, Prop. 1.1.21]). Die Elemente x von $\widetilde{\mathbf{B}}$ haben folglich eindeutige Reihenentwicklungen

$$x = \sum_{k\gg -\infty} \pi^k [x_k], \quad x_k \in \mathbb{C}_p^\flat.$$

Schwache Topologie. Die π-adische Topologie auf $\widetilde{\mathbf{A}}$ stimmt mit der Produkttopologie auf $\prod_{n\geq 0} \mathbb{C}_p^\flat$ überein, wenn man die Faktoren $\mathbb{C}_p^\flat$ jeweils mit der diskreten Topologie versieht. Bildet man die Produkttopologie auf $\widetilde{\mathbf{A}}$ bzgl. der von der Bewertung auf $\mathbb{C}_p^\flat$ induzierten Topologien auf den Faktoren, so erhält man die *schwache Topologie* auf $\widetilde{\mathbf{A}}$. Diese ist hausdorffsch, vollständig und mit der Ringstruktur von $\widetilde{\mathbf{A}}$ verträglich (s. [Sch17, §1.5]). Weiter setzt sie sich auf den Quotientenkörper $\widetilde{\mathbf{B}} = \bigcup_{n\geq 0} \pi^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}$ fort als die induktive Limes-Topologie.

Frobenius und Galois-Operation. Der q-Frobenius und die Galois-Wirkung von $\mathbb{C}_p^\flat$ induzieren auf $\widetilde{\mathbf{A}}$ durch Funktorialität einen Frobenius-Automorphismus – den wir wieder mit φ bezeichnen – sowie eine G_L-Operation, welche stetig bzgl. der schwachen Topologie sind (vgl. [Sch17, Rem. 2.1.7, Lem. 1.5.3, Rem. 2.1.14]) und sich stetig auf $\widetilde{\mathbf{B}}$ fortsetzen. Explizit sind sie gegeben durch

$$\varphi\left(\sum \pi^k [x_k]\right) = \sum \pi^k [x_k^q] \quad \text{und} \quad g\left(\sum \pi^k [x_k]\right) = \sum \pi^k [g(x_k)]$$

für $g \in G_L$, $x = \sum_{k \gg -\infty} \pi^k [x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}$. In der Darstellung $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathbb{C}_p^\flat)$ sind diese Wirkungen gegeben als $\mathrm{id} \otimes \varphi$ und $\mathrm{id} \otimes g$.

Potenzreihen über $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$. Die Inklusion $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \subseteq \mathbb{C}_p^\flat$ liefert Unterringe

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+ := W_L(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{B}}^+ := \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi^{-1}] \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}.$$

Offenbar gilt

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \left\{ \sum_{n \geq 0} \pi^n [x_n] \;\middle|\; x_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \right\} \quad \text{sowie} \quad \widetilde{\mathbf{B}}^+ = \left\{ \sum_{k \gg -\infty} \pi^k [x_k] \;\middle|\; x_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \right\}.$$

Daraus folgt sofort, dass der Kern der Projektion $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ durch $\pi \widetilde{\mathbf{A}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+ \cap \pi \widetilde{\mathbf{A}}$ gegeben ist. Wie oben lassen sich auf diesen Ringen schwache Topologien definieren, für die $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ wiederum vollständig ist. Sie stimmen mit den von $\widetilde{\mathbf{B}}$ induzierten Teilraumtopologien überein. Weiter schränken sich der Frobenius-Automorphismus und die G_L-Aktion auf $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ und $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ ein.

Konstruktion 1.2.6 (Der Ring $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$). Die Abbildung $\theta \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ (s. 1.2.1) induziert einen L-Algebrenhomomorphismus

$$\theta \colon \widetilde{\mathbf{B}}^+ \longrightarrow \mathbb{C}_p, \quad \sum_{k \gg -\infty} \pi^k [x_k] \longmapsto \sum_{k \gg -\infty} \pi^k \theta(x_k).$$

Man definiert $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ als die $\ker(\theta)$-adische Vervollständigung von $\widetilde{\mathbf{B}}^+$. Dies ist ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\ker \theta$, und weil θ offensichtlich G_L-äquivariant ist, erhält $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ eine induzierte Galois-Operation. Für mehr Details siehe [Ber02, §1.2]

Konstruktion 1.2.7 (Ein Cohen-Ring für den Normenkörper). Wir haben den Unterring $W_L(\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L}) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^+$, der wiederum den Frobenius φ und die G_L-Wirkung erbt, allerdings ist φ auf $W_L(\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L})$ lediglich injektiv, aber nicht surjektiv (das Problem ist, dass $\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L}$ nicht perfekt ist). Außerdem faktorisiert die G_L-Operation von $W_L(\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L})$ über Γ_L, da sie dasselbe bereits auf $\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L}$ tut.
In [Sch17, §2.1] konstruiert Schneider ein Element $\omega_\phi \in W_L(\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L}) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^+$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Projektion $W_L(\mathcal{O}_{\mathbf{E}_L}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{E}_L}$ schickt ω_ϕ auf $\overline{\omega}$.

(ii) $\varphi(\omega_\phi) = [\pi]_\phi(\omega_\phi)$.

(iii) $\gamma(\omega_\phi) = [\chi_L(\gamma)]_\phi(\omega_\phi)$ für alle $\gamma \in \Gamma_L$.

Wir betrachten die π-adische Vervollständigung $\mathcal{A}_L$ des Laurentreihenrings $\mathcal{O}((X))$, der explizit als

$$\mathcal{A}_L := \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \;\middle|\; a_k \in \mathcal{O},\ \lim_{k \to -\infty} v_p(a_k) = \infty \right\}$$

geschrieben werden kann. Es ist $\mathscr{A}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit der Bewertung $v(f) = \min_k v_p(a_k)$ und mit Restklassenkörper $\kappa((X))$. Sein Quotientenkörper ist gegeben durch

$$\mathscr{B}_L = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k \;\middle|\; a_k \in L,\ (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ ist beschränkt und } \lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = \infty \right\}.$$

Für Details siehe [Sch17, §1.7]. In §2.1 von [Sch17] wird gezeigt, dass alle Reihen der Form $f(\omega_\phi)$, $f \in \mathscr{A}_L$, in $W_L(\mathbf{E}_L) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}$ für die schwache Topologie konvergieren und die Abbildung

$$\mathscr{A}_L \longrightarrow W_L(\mathbf{E}_L),\ f \longmapsto f(\omega_\phi)$$

eine Einbettung von $\mathscr{O}$-Algebren ist. Wir bezeichnen sein Bild mit $\mathbf{A}_L$ und den Quotientenkörper davon mit $\mathbf{B}_L \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}$. Nach Konstruktion des Elements ω_ϕ ist $\mathbf{E}_L$ der Restklassenkörper von $\mathbf{A}_L$ (d.h. $\mathbf{A}_L$ ist ein *Cohen-Ring* für $\mathbf{E}_L$), und es gilt

$$\varphi(f) = f([\pi]_\phi(\omega_\phi)) \quad \text{sowie} \quad \gamma(f) = f([\chi_L(\gamma)]_\phi(\omega_\phi))$$

für alle $f \in \mathbf{B}_L$, $\gamma \in \Gamma_L$.
Es bezeichne $\mathbf{B}$ den π-adischen Abschluss der maximal unverzweigten Erweiterung von $\mathbf{B}_L$ in $\widetilde{\mathbf{B}}$, und sei $\mathbf{A} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$. Dies ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Primelement π und Restklassenkörper $\mathbf{E}_L^{\mathrm{sep}}$. Der Frobenius und die G_L-Wirkung schränken auf $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ein, und man kann zeigen, dass

$$\mathbf{B}^{H_L} = \mathbf{B}_L \quad \text{und} \quad \mathbf{B}^{\varphi=\mathrm{id}} = L$$

und entsprechendes für die Ganzheitsringe gilt (vgl. [Sch17, §3.1]).
Für K/L endlich setzen wir $\mathbf{B}_K := \mathbf{B}^{H_K}$ und $\mathbf{A}_K := \mathbf{A}^{H_K}$.

1.3 Überkonvergente Funktionen und Robba-Ringe

Wir definieren nun einige Ringe p-adischer Perioden, welche in Kapitel 3 als Koeffizientenringe für (φ, Γ)-Moduln dienen werden, insbesondere den *Robba-Ring* $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ (s. 1.3.27), sowie „große“ Periodenringe wie $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, der als eine Art „algebraischer Abschluss“ von $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ gedacht werden sollte (s. 1.3.22).

Konstruktion 1.3.1. Wir betrachten den Ring $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]} := \widetilde{\mathbf{B}}^+[1/[\overline{\omega}]]$. Seine Elemente sind von der Form

$$\frac{1}{[\overline{\omega}]^n} \sum_{k\gg-\infty} \pi^k [y_k] = \sum_{k\gg-\infty} \pi^k \left[\frac{y_k}{\overline{\omega}^n}\right] \text{ mit } y_k \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$$

und lassen sich daher schreiben als $x = \sum \pi^k [x_k]$, wobei $(x_k)_{k \gg -\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}_p^\flat$ ist.
Die Automorphismen $\sigma \in G_L$ und φ von $\widetilde{\mathbf{B}}$ schränken auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ ein, denn es gilt

$$\sigma([\overline{\omega}]) = [\sigma(\overline{\omega})] = [\overline{a\omega}] = [a][\overline{\omega}] \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]})^\times \quad \text{sowie} \quad \varphi([\overline{\omega}]) = [\overline{\omega}]^q \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]})^\times$$

mit $a := \chi_L(\sigma \mod H_L) \in \mathcal{O}^\times$.
Wir wollen auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ eine Familie von Bewertungen definieren. Für $r > 0$ sei

$$r' := \frac{rq}{q-1}.$$

Man betrachte die Abbildung[1]

$$V(-,r)\colon \widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ V(x,r) := \min_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{v_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k)}{r'} + k \right),$$

wobei $x = \sum \pi^k [x_k]$. Dieses Minimum existiert, weil die Folge $(v(x_k))_{k \gg \infty}$ nach unten beschränkt ist und daher $v(x_k)/r' + k \longrightarrow \infty$ für $k \longrightarrow \infty$ gilt.

Satz 1.3.2. *Die $V(-,r)$, $r > 0$, besitzen folgende Eigenschaften für $x = \sum_{i \gg -\infty} \pi^i [x_i]$, $y = \sum_{j \gg -\infty} \pi^j [y_j] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$:*

(i) $V(x,r) = \infty \iff x = 0$,

(ii) $V(x+y,r) \geq \min\{V(x,r), V(y,r)\}$, *und es gilt Gleichheit, wenn* $V(x,r) \neq V(y,r)$.

(iii) $V(xy,r) = V(x,r) + V(y,r)$,

(iv) $V(\varphi(x), qr) = V(x,r)$,

(v) $V(g(x),r) = V(x,r)$ *für alle* $g \in G_L$.

Insbesondere sind die $V(-,r)$ Bewertungen auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen sei o.B.d.A. $r = (q-1)/q$, d.h. $r' = 1$, und wir schreiben $V(x)$ statt $V(x,r)$. Die Eigenschaft (i) ist offensichtlich.
Zu (ii). Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $w_k(x) := \min_{i \leq k} v(x_i)$. Diese Abbildungen erfüllen:

(a) $V(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} (w_k(x) + k)$,

(b) $w_k(x+y) \geq \min\{w_k(x), w_k(y)\}$.

[1] die Normierung von $V(-,r)$ weicht von der in [Ber16] ab, um einige Rechungen einfacher zu halten. So ist es für uns nicht notwendig, den Verzweigungsindex von $L/\mathbb{Q}_p$ in der Notation mitzuführen, und für die Bewertung von ω_ϕ liefert 1.3.9 eine simplere Formel als in [Ber16, Absatz unter Lemma 3.4].

Sind (a) und (b) gezeigt, und gilt o.B.d.A. $V(x) \leq V(y)$, so folgt damit

$$\begin{aligned} V(x+y) &= \min_{k\in\mathbb{Z}} w_k(x+y)+k \\ &\geq \min_k(\min\{w_k(x), w_k(y)\}+k) \\ &= \min_k\{w_k(x)+k, w_k(y)+k\} \\ &= V(x) \end{aligned}$$

wie behauptet. Zum Beweis von (a) wähle man zu jedem k ein $i_k \leq k$, sodass $w_k(x) = v(x_{i_k})$ ist. Es folgt

$$w_k(x)+k \geq v(x_{i_k})+i_k \geq \min_i v(x_i)+i = V(x).$$

Dies zeigt $V(x) \leq \min_k(w_k(x)+k)$, und die umgekehrte Ungleichung ist trivial.
Für (b) sei o.B.d.A. $w_k(x) \leq w_k(y)$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}_p^\flat$ mit $v(\alpha) = w_k(x)$, sodass $\sum_{i\leq k} \pi^i[x_i]$ und $\sum_{i\leq k} \pi^i[y_i]$ Elemente von $[\alpha]\widetilde{\mathbf{B}}^+$ sind. Wir erhalten

$$x+y \in [\alpha]\widetilde{\mathbf{B}}^+ + \pi^{k+1}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$$

und folglich $w_k(x+y) \geq v(\alpha) = w_k(x)$.
Schließlich nehmen wir für den Zusatz $V(x) < V(y)$ an. Man hat $V(-y) = V(y)$, da aufgrund der Multiplikativität der Teichmüller-Abbildung

$$-\sum_{k\gg 0} \pi^k[y_k] = [-1]\cdot\sum_{k\gg 0}\pi^k[y_k] = \sum_{k\gg 0}\pi^k[-y_k]$$

gilt. Aus der Annahme $V(x+y) > V(x)$ folgt nun der Widerspruch

$$V(x) = V((x+y)-y) \geq \min\{V(x+y), V(y)\} > V(x)$$

und (ii) ist bewiesen.
Um (iii) einzusehen, sei k der kleinste Index mit $V(x) = v(x_k)+k$ und sei ebenso l minimal für y und bezeichne

$$z := \pi^{k+l}[x_k y_l], \qquad z_* := \sum_{\substack{i+j\leq k+l \\ (i,j)\neq(k,l)}} \pi^{i+j}[x_i y_j], \qquad z^* := \sum_{i+j>k+l} \pi^{i+j}[x_i y_j],$$

sodass $xy = z_* + z + z^*$ ist. Zu zeigen ist

$$V(xy) = V(z) = v(x_k y_l) + (k+l). \tag{$*$}$$

Zunächst gilt

$$V(z_*) > V(z), \tag{$**$}$$

denn für Indizes $(i,j) \neq (k,l)$ mit $i+j \leq k+l$ ist $i<k$ oder $j<l$, d.h.

$$\begin{aligned} V(\pi^{i+j}[x_i y_j]) &= (v(x_i)+i) + (v(y_j)+j) \\ &> (v(x_k)+k) + (v(y_l)+l) = V(z) \end{aligned}$$

wegen der Minimalität von k und l, und $(**)$ folgt mit Punkt (ii). Weiter hat das Element $z+z^* \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ in seiner π-adischen Reihendarstellung die Form

$$z+z^* = \pi^{k+l}[x_k y_l] + \sum_{n>k+l} \pi^n [a_n]$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}_p^\flat$, und es ist $V(z^*) \geq V(z)$, weil diese Abschätzung für alle Summanden der Reihe z^* (in der Darstellung aus der Definition von z^*) gilt. Nach Definition von V folgt damit notwendig

$$V(z+z^*) = V(z),$$

und unter Verwendung von $(**)$ und (ii) erhalten wir

$$V(xy) = V(z_* + (z+z^*)) = V(z+z^*) = V(z)$$

und $(*)$ ist gezeigt.
Für die Eigenschaften (iv) und (v) beachte man schließlich

$$\varphi\left(\sum \pi^k[x_k]\right) = \sum \pi^k [x_k^q] \quad \text{und} \quad g\left(\sum \pi^k[x_k]\right) = \sum \pi^k[g(x_k)]$$

und $v_{\mathbb{C}_p^\flat}(g(x_k)) = v_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k)$. □

Bemerkung 1.3.3. Sei $a \in L \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^+$. Dann gilt $V(a,r) = v_p(a)$ für alle $r>0$.

Beweis. Sei $a \neq 0$ und schreibe $a = u\pi^k$ mit $u \in \mathcal{O}^\times$, $k \in \mathbb{Z}$. Es ist u eine Einheit in $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ und damit auch seine Projektion $\overline{u} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$. Wegen $u \equiv [\overline{u}] \mod \pi$ in $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ folgt $V(u,r) = V([\overline{u}],r) = v_{\mathbb{C}_p^\flat}(\overline{u}) = 0$ mit Punkt (ii) oben und somit ist nach (iii)

$$V(a,r) = V(u,r) + V(\pi^k, r) = k = v_p(a).$$

□

Konstruktion 1.3.4. Für abgeschlossene Teilintervalle $I \subseteq (0,\infty)$ definieren wir auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ die „Supremumsnorm“

$$V(x,I) := \inf_{t\in I} V(x,t).$$

Ist $I = [r,s]$ mit $0<r<s<\infty$, so gilt offenbar $V(x,I) = \min\{V(x,r), V(x,s)\}$. Im Fall $I=[0,r]$ erklärt man auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ (nicht auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$)[2] die Bewertung $V(-,I) := V(-,r)$.
Wie man direkt aus Satz 1.3.2 folgert, besitzt $V(-,I)$ die folgenden Eigenschaften:

[2]beachte, dass für $x = \sum_{k\gg 0} \pi^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+ = W_L(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})[\pi^{-1}]$ gilt $\lim_{r\to 0} V(x,r) = \infty$.

(i) $V(x, I) = \infty \iff x = 0$,

(ii) $V(x + y, I) \geq \min\{V(x, I), V(y, I)\}$,

(iii) $V(xy, I) \geq V(x, I) + V(y, I)$,

(iv) $V(\varphi(x), qI) = V(x, I)$ und $V(g(x), I) = V(x, I)$ für alle $g \in G_L$.

Aus Bemerkung 1.3.3 und 1.3.2(iii) folgt außerdem für $a \in L$

$$V(ax, I) = \inf_{t \in I} V(ax, t) = v_p(a) + \inf_{t \in I} V(x, t) = v_p(a) + V(x, I).$$

Dies zusammen mit den Eigenschaften (i) und (ii) zeigt, dass $V(-, I)$ auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ (bzw. $\widetilde{\mathbf{B}}^+$) eine Struktur als ultrametrischer normierter L-Vektorraum induziert. Eine Umgebungsbasis der Null ist gegeben durch die Kugeln

$$B_R^I(0) := \{x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]} \mid V(x, I) > R\},\ \ R > 0.$$

1.3.1 Vervollständigungen für die Normen $V(-, I)$

Im restlichen Abschnitt verwenden wir nun die oben definierten Bewertungen, um eine Reihe von neuen Ringen aus $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ zu gewinnen.

Konvention: Für jeden Ring R, auf dem G_L operiert und für jede endliche Erweiterung K/L setze $R_K := R^{H_K}$.

Konstruktion 1.3.5 (Die Ringe $\widetilde{\mathbf{B}}^I$). Ist I ein abgeschlossenes Teilintervall von $(0, \infty)$, so bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ die Vervollständigung von $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ bzgl. $V(-, I)$. Für Intervalle der Form $I = [0, r]$ sei $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ die Komplettierung von $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ für $V(-, [0, r])$. In beiden Fällen schreiben wir $\widetilde{\mathbf{A}}^I \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^I$ für den Unterring der Elemente $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^I$ mit $V(x, I) \geq 0$. Dies sind p-adische Banachräume über L, versehen mit der Norm

$$\|x\|_I := p^{-V(x,I)}.$$

Für $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^I$ hat man $V(\pi^n x, I) \geq 0$ für genügend große n, sodass also $\widetilde{\mathbf{B}}^I = \widetilde{\mathbf{A}}^I[\pi^{-1}]$ gilt. Weiter setzen sich nach Eigenschaft (iv) in 1.3.4 die Galois-Automorphismen $g \in G_L$ und der Frobenius stetig fort zu L-linearen Isomorphismen

$$g\colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}^I \quad \text{und} \quad \varphi\colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}^{qI}$$

und für $\widetilde{\mathbf{A}}^I$ ebenso.

Bemerkung 1.3.6. Ist $J \subseteq I$ ein abgeschlossenes Teilintervall, so gilt $V(-, I) \leq V(-, J)$ und daher $B_R^I(0) \subseteq B_R^J(0)$ für alle $R > 0$, d.h. die von $V(-, I)$ erzeugte Topologie ist feiner als die von $V(-, J)$ induzierte, weshalb also jede Cauchy-Folge in $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}$ bzgl. $V(-, I)$ auch eine Cauchy-Folge bzgl. $V(-, J)$ ist. Somit hat man für $J \subseteq I$ eine natürliche Inklusion $\widetilde{\mathbf{B}}^I \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^J$, und $\widetilde{\mathbf{B}}^J$ ist gerade die Vervollständigung von $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ bzgl. $V(-, J)$.

Lemma 1.3.7. *Sein $0 < r < s$. Dann gilt $\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,s]} \cap \pi\widetilde{\mathbf{A}}^{[r,s]} = \pi\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,s]}$.*

Beweis. Für die nichttriviale Inklusion sei $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[r,s]}$ mit $\pi x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,s]}$. Dann hat man $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{[0,s]}$ sowie

$$V(x,[0,s]) = V(x,s) \geq V(x,[r,s]) \geq 0$$

und folglich $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,s]}$. □

Lemma 1.3.8. *Für $r > 1$ gilt $V(\omega_\phi, r) = V([\overline{\omega}], r) = 1/r$, insbesondere hat man also $V(\omega_\phi, I) = V([\overline{\omega}], I)$ für alle $I \subseteq (1,\infty)$. Weiter ist $\omega_\phi/[\overline{\omega}]$ eine Einheit in $\widetilde{\mathbf{B}}^I$.*

Beweis. Wegen $[\overline{\omega}] \equiv \omega_\phi \mod \pi$ ist $\omega_\phi = [\overline{\omega}] + \sum_{k\geq 1} \pi^k [x_k]$ für gewisse $x_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$. Nun gilt

$$V([\overline{\omega}], r) = \frac{v(\overline{\omega})}{r'} = \frac{q/(q-1)}{rq/(q-1)} = \frac{1}{r} < 1,$$

und wegen $v(x_k) \geq 0$ für alle $k > 0$ ist

$$V\left(\sum_{k\geq 1} \pi^k [x_k], r\right) \geq 1.$$

Es folgt $V(\omega_\phi, r) = V([\overline{\omega}], r)$ nach Satz 1.3.2(ii). Wir sehen außerdem, dass $\omega_\phi/[\overline{\omega}]$ von der Form $1 + x$ für ein x mit $V(x, I) > 0$ ist. Sein Inverses in $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ ist durch den Grenzwert $\sum_{n\geq 0}(-x)^n$ gegeben. □

Folgerung 1.3.9. *Für $I \subseteq (1,\infty)$ ist $\omega_\phi \in (\widetilde{\mathbf{B}}^I)^\times$ und es gilt*

$$V(\omega_\phi^k, r) = k/r$$

für alle $r \in I$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 1.3.10 (Alternative Beschreibung von $\widetilde{\mathbf{A}}^{[r,s]}$). Für einen bzgl. der p-adischen Topologie vollständigen Ring A bezeichne $A\{X,Y\}$ die p-adische Komplettierung des Polynomringes $A[X,Y]$, d.h. $A\{X,Y\}$ besteht aus Summen $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij} X^i Y^j$ mit $a_{ij} \in A$ und $\lim_{i+j\to\infty} a_{ij} = 0$.
Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $r_n := q^{n-1}(q-1)$. Seien $1 \leq j \leq k$ natürliche Zahlen und $r := r_j$, $s := r_k$. Man kann zeigen:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{A}}^{[r,s]} &= \widetilde{\mathbf{A}}^+\left\{\frac{\pi}{\omega_\phi^r}, \frac{\omega_\phi^s}{\pi}\right\} \\
&:= \widetilde{\mathbf{A}}^+\{X,Y\}/(\omega_\phi^r X - \pi, \pi Y - \omega_\phi^s, XY - \omega_\phi^{s-r}), \\
\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,s]} &= \widetilde{\mathbf{A}}^+\left\{\frac{\omega_\phi^s}{\pi}\right\}.
\end{aligned}$$

Vergleiche dazu [Ber10, §27] oder [Ber02, §2.1] für Details. Die Konstruktionen werden in letzterem für $L = \mathbb{Q}_p$ durchgeführt, lassen sich aber auf unsere Situation verallgemeinern.

Konstruktion 1.3.11 (Einbettungen in $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$). Es ist nach [Ber10, Prop. 28.1] die p-adische Entwicklung $x = \sum_{k\geq 0} p^k[x_k]$ eines Elementes $x \in W(\mathbb{C}_p^\flat)$ genau dann eine konvergente Reihe in $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, wenn $\lim_{k\to\infty} v(x_k) + k = \infty$ gilt;[3] daher konvergiert insbesondere die Reihenentwicklung jedes Elementes aus $W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})$ in $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, sodass wir eine Inklusion $\iota_0'\colon W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ erhalten, die sich $\mathcal{O}$-linear auf $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})$ und per Lokalisierung auch auf $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ und $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\varpi]}$ fortsetzt.
Ist $I \subseteq (0,\infty)$ mit $(q-1)/q \in I$, so gilt $V(\sum_k \pi^k[x_k], I) \leq \min_k v(x_k) + k$ nach Konstruktion 1.3.1, sodass jede Reihe in $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\varpi]}$, die bzgl. $V(-,I)$ eine Cauchy-Folge ist, in $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ konvergiert. Daher setzt sich ι_0' stetig fort zu einer Abbildung $\iota_0\colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Für $n \geq 0$ liefert dies in dem Fall, dass $p^n(q-1)/q \in I$ gilt, eine Injektion[4]

$$\iota_n := \iota_0 \circ \varphi_p^{-n}\colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+.$$

Man beachte, dass wegen $V(\varphi_p^{-n}(x), (q-1)/q) = V(x, p^n(q-1)/q) \geq V(x,I)$ jede bzgl. $V(-,I)$ konvergente Reihe durch φ_p^{-n} auf eine bzgl. $V(-,(q-1)/q)$ und daher in $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ konvergente Reihe abgebildet wird, was die Wohldefiniertheit von ι_n sichert. Die ι_n sind G_L-äquivariante L-Algebrenhomomorphismen. Siehe auch Prop. 2.12 und Cor. 2.13 in [Ber02].

Bemerkung 1.3.12. Am Ende von Abschnitt 1.1 hatten wir die Minimalpolynome $Q_n \in L[X]$ der Erzeuger ω_n von L_n/L eingeführt. Wir schreiben ab jetzt stets Q_n für das Element $Q_n(\omega_\phi) \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, und setzen $r_n = q^{n-1}(q-1)$. Seien $1 \leq j \leq k$ und $I := [r_j, r_k]$.
Es gilt $Q_k/\pi \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]}$, denn nach Eigenschaft (iv) in 1.3.4 und wegen $[\pi]_\phi(\omega_\phi) = \varphi(\omega_\phi)$ sowie Folgerung 1.3.9 hat man

$$V([\pi]_\phi^{k-1}(\omega_\phi), I) = V(\omega_\phi, I/q^{k-1}) = \frac{1}{q-1}.$$

Weiter gilt $Q_k = Q_1([\pi]_\phi^{k-1}(\omega_\phi))$ und $Q_1(X) = [\pi]_\phi(X)/X = X^{q-1} + \pi$, sodass sich $V(Q_k, I) \geq 1$ und somit $Q_k/\pi \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]}$ ergibt. Analog gilt $Q_k/\pi \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]}$.
Die Abbildung ι_n hat im Fall $n = hk$ die Gestalt $\iota_n = \iota_0 \circ \varphi^{-k}$ für den q-Frobenius $\varphi = \varphi_q$. Wir werden gelegentlich ι_0 als Identifikation ansehen und daher in der Notation unterdrücken, insbesondere schreiben wir auch einfach φ^{-k} anstatt ι_{hk}. Nach [Ber16, Lem. 3.2(1)] gilt für den Kern der Verkettung

$$\ker(\widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]} \xrightarrow{\iota_n} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \xrightarrow{\theta} \mathbb{C}_p) = (Q_k/\pi)\cdot \widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]}.$$

Wegen $\widetilde{\mathbf{B}}^I = \widetilde{\mathbf{A}}^I[\pi^{-1}]$ und der L-Linearität von $\theta\circ\iota_n = \theta\circ\varphi^{-k}$ sieht man damit sofort

$$\ker(\theta\circ\varphi^{-k}\colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow \mathbb{C}_p) = (Q_k/\pi)\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^I = Q_k\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^I.$$

[3] siehe Konstruktion 1.2.6 für eine Definition von $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

[4] für die Konvergenzbedingung vgl. die Definition von r_n in [Ber02, §§2.1, 2.2] und beachte, dass die Bewertung $V(-,r)$ dort um den Faktor $p/(p-1)\cdot q/(q-1)$ von unserer Definition in 1.3.1 abweicht.

Wir schließen die Behandlung der Ringe $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ mit zwei technischen Lemmata aus [Ber16], die in Kapitel 2 benötigt werden und die wir hier ohne Beweis zitieren.

Lemma 1.3.13. *Sei $y \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi\widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]}$ und sei $(y_i)_{i\geq 0}$ eine Folge in $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, sodass für alle $f \geq 1$ gilt*

$$y - \sum_{i=0}^{f-1} y_i \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i \in \ker(\theta \circ \varphi^{-k})^f.$$

Dann gibt es ein $f \geq 1$ mit

$$y - \sum_{i=0}^{f-1} y_i \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i \in \pi\widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]}.$$

Beweis. Siehe [Ber16, Prop. 3.3]. □

Lemma 1.3.14. *Sei $I \subseteq (0,\infty)$ und $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_L^+$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq 0$ und $x_n \in \mathcal{O}[\varphi^{-k_n}(\omega_\phi)]$ mit $x - x_n \in p^n\widetilde{\mathbf{A}}_L^I$.*

Beweis. Siehe [Ber16, Lemma 5.3]. □

1.3.2 Der Robba-Ring

Bemerkung 1.3.15. Sei $I \subseteq (0,\infty)$ ein abgeschlossenes Intervall. Die durch $V(-,I)$ auf $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ induzierte Topologie ist feiner als die schwache Topologie.

Beweis. Eine Umgebungsbasis der Null für die schwache Topologie von $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ ist gegeben durch endliche Durchschnitte von Mengen der Form

$$U_{n,k} := \left\{ \sum_{i\geq 0} \pi^i [x_i] \;\middle|\; v(x_k) > n \right\}, \; n,k \geq 0.$$

Zu gegebenem $U_{n,k}$ sei $N := n/r' + k$ mit einem beliebigen $r \in I$. Für $x \in B_N^I(0)$ gilt dann insbesondere

$$\frac{v(x_k)}{r'} + k > N$$

und also $v(x_k) > n$, d.h. $B_N^I(0) \subseteq U_{n,k}$. Daraus folgt, dass jede bzgl. der schwachen Topologie offene Menge in $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ auch offen bzgl. $V(-,I)$ ist. □

Konstruktion 1.3.16 (Die Ringe $\mathbf{B}_L^I$, $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^\dagger$ und $\mathbf{B}_L^\dagger$). Wir fixieren ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq (1,\infty)$ und setzen

$$L^I((X)) := \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k \;\middle|\; a_k \in L,\; \lim_{|k|\to\infty} v_p(a_k) + \frac{k}{s} = \infty \text{ für alle } s \in I \right\}.$$

Dann konvergiert die Reihe $f(\omega_\phi)$ in $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ nach Bemerkung 1.3.3 und Folgerung 1.3.9, also erhalten wir einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$L^I((X)) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^I, \ f \longmapsto f(\omega_\phi). \tag{1}$$

Wir bezeichnen sein Bild mit $\mathbf{B}_L^I$ und den Unterring der Elemente $x \in \mathbf{B}_L^I$, die $V(x, I) \geq 0$ erfüllen mit $\mathbf{A}_L^I$.
Ist speziell $I = [r, \infty)$ mit $r > 1$, so setzen wir $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r} := \mathbf{B}_L^{[r,\infty)}$. Man hat natürliche Inklusionen $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r_1} \subseteq \mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r_2}$ für $r_1 \leq r_2$. Der induktive Limes

$$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger} := \bigcup_{r>1} \mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r}$$

heißt der *Robba-Ring* über L. Seine Elemente sind die rigid-analytischen Funktionen auf Annuli der Form $\varepsilon \leq |X| < 1$, mit variierendem $0 < \varepsilon < 1$.
Sei $\mathscr{B}_L^r$ der Unterring der Elemente $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k \in L^{[r,\infty)}((X))$, für die die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zusätzlich beschränkt in L ist, und bezeichne $\mathbf{B}_L^{\dagger,r} \subseteq \mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r}$ das Bild der Einschränkung von (1) auf $\mathscr{B}_L^r$, sowie

$$\mathbf{B}_L^{\dagger} := \bigcup_{r>1} \mathbf{B}_L^{\dagger,r}.$$

Dies ist ein Körper nach [Sch06, Lem. 10.2]. Entsprechend seien die Teilringe $\mathbf{A}_L^{\dagger,r} \subseteq \mathbf{B}_L^{\dagger,r}$ und $\mathbf{A}_L^{\dagger} \subseteq \mathbf{B}_L^{\dagger}$ bzgl. des Unterrings $\mathscr{A}_L^r \subseteq \mathscr{B}_L^r$ der Reihen mit Koeffizienten in $\mathscr{O}$ definiert.
In Konstruktion 1.2.7 hatten wir den Körper

$$\mathbf{B}_L = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \omega_\phi^k \;\middle|\; a_k \in L, \ (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ beschränkt und } \lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = \infty \right\}$$

eingeführt. Wir können $\mathbf{B}_L^{\dagger} \subseteq \mathbf{B}_L$ als Teilkörper auffassen, denn es gilt offensichtlich $\mathscr{B}_L^r \subseteq \mathscr{B}_L$, und für $f \in \mathscr{A}_L^r \subseteq \mathscr{A}_L$ konvergiert $f(\omega_\phi)$ in $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ bzgl. der schwachen Topologie, welche nach Bemerkung 1.3.15 gröber als die durch $V(-, I)$ auf $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ gegebene Topologie ist. Folglich können wir die bzgl. $V(-, I)$ gebildeten Grenzwerte $f(\omega_\phi) \in \widetilde{\mathbf{B}}^I$ mit denjenigen bzgl. der schwachen Topologie in $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ identifizieren, sodass $\mathbf{A}_L^{\dagger,r} \subseteq \mathbf{A}_L$ ist, also auch $\mathbf{A}_L^{\dagger} \subseteq \mathbf{A}_L$ und entsprechend $\mathbf{B}_L^{\dagger} \subseteq \mathbf{B}_L$ für die Quotientenkörper. Man nennt $\mathbf{B}_L^{\dagger}$ den Teilkörper der *überkonvergenten Elemente* in $\mathbf{B}_L$.
Die Bewertung von $\mathbf{B}_L$ schränkt ein auf $\mathbf{B}_L^{\dagger}$, dieser ist also ebenfalls diskret bewertet mit Primelement π, und sein Ganzheitsring ist $\mathbf{A}_L^{\dagger}$. Er ist nicht vollständig – sein Abschluss ist gerade $\mathbf{B}_L$, siehe Lemma 10.4 in [Sch06] – dafür hat man das folgende Ergebnis:

Satz 1.3.17. *Es ist $\mathbf{B}_L^{\dagger}$ ein henselscher Körper.*

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.6]. □

Satz 1.3.18. *Es gilt $(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger})^\times = (\mathbf{B}_L^{\dagger})^\times$.*

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.3]. □

Bemerkung 1.3.19 (Zum Begriff der Überkonvergenz). Der Ring $\mathbf{B}_L$ besteht per Definition aus Laurentreihen $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k$ (wobei $X = \omega_\phi$) mit Koeffizienten in L, welche beschränkt sind und $\lim_{k\to-\infty} a_k = 0$ erfüllen, d.h. also deren Hauptteil für

$$\left|X^{-1}\right| \leq 1$$

konvergiert. Die Elemente von $\mathbf{B}_L^\dagger$ dagegen sind die Laurentreihen aus $\mathbf{B}_L$, für die ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass ihr Hauptteil auf dem Bereich

$$\left|X^{-1}\right| \leq 1 + \varepsilon$$

konvergiert, daher die Bezeichnung *über*-konvergent.

Bemerkung 1.3.20 (Fréchet-Topologie auf $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}$). Für $s \geq r$ stimmt $\mathbf{B}_L^{[r,s]}$ überein mit der Komplettierung des Raumes $L[\omega_\phi, \omega_\phi^{-1}]$ der Laurentpolynome für die Norm $V(-,[r,s])$ und ist insbesondere ein Banachraum, vgl. [Sch06, Üb. 9.15].
Damit ist $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L} = \bigcap_{s>r} \mathbf{B}_L^{[r,s]}$ ein Fréchetraum als projektiver Limes der Banachräume $\mathbf{B}_L^{[r,s]}$. Seine lokal-konvexe Topologie wird durch die Familie der Normen $\{V(-,[r,s])\}_{s\geq r}$ erzeugt, sodass eine Umgebungsbasis der Null durch endliche Durchschnitte von Kugeln der Form

$$B_R^{[r,s]}(0) = \{x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L} \mid V(x,[r,s]) > R\}, \text{ mit } R > 0,\ s \geq r$$

gegeben ist. Wegen $V(-,I) \leq V(-,J)$ für $J \subseteq I$ wird diese Topologie bereits durch jede Teilfamilie der Gestalt $\{V(-,[r,s_n])\}_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt, wobei $(s_n)_n$ eine Folge in $[r,\infty)$ ist mit $s_n \to \infty$. Weiter ist $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}$ gerade der Abschluss von $\mathbf{B}_L^{\dagger,r}$ bzgl. dieser Topologie.
Schließlich statten wir $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L} = \bigcup_{r>1} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}$ mit der lokal-konvexen induktiven Limes-Topologie für die Fréchet-Topologien aus, wodurch dieser zu einem *LF-Raum* wird, d.h. zu einem induktiven (*strikten*) lokal-konvexen Limes einer Folge von Frécheträumen (vgl. [Sch02, I §5.E.2]).

Beispiel 1.3.21. Der Lubin-Tate-Logarithmus $\log_{\mathrm{LT}}(X) \in L[[X]]$ konvergiert für $|X| < 1$, daher haben wir

$$t_\phi := \log_{\mathrm{LT}}(\omega_\phi) \in \mathbf{B}_L^I \quad \text{für alle } I \subseteq (1,\infty).$$

Aus der L-Linearität und Stetigkeit von φ und der Γ_L-Aktion sowie den Eigenschaften von ω_ϕ (s. 1.2.7) und der $\mathcal{O}$-Linearität von $\log_{\mathrm{LT}}$ folgt

$$\gamma(t_\phi) = \chi_L(\gamma) \cdot t_\phi \text{ für } \gamma \in \Gamma_L \quad \text{und} \quad \varphi(t_\phi) = \pi \cdot t_\phi.$$

1.3.3 Große Periodenringe

Konstruktion 1.3.22. Für $r > 0$ bezeichne $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ den Fréchetraum, der aus Vervollständigung von $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{[\varpi]}$ bzgl. der durch die Familie $\{V(-,[r,s])\}_{s\geq r}$ gegebene lokal-konvexe Topologie hervorgeht. Für $r_1 \leq r_2$ ist die von r_1 induzierte lokal-konvexe Topologie feiner als die durch r_2 induzierte, da

$$B_R^{[r_1,s]}(0) \subseteq B_R^{[r_2,s]}(0)$$

für alle $s \geq r_2$, $R > 0$ gilt, und folglich gibt es eine natürliche Inklusion $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_1}_{\mathrm{rig}} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_2}_{\mathrm{rig}}$. Ähnlich überlegt man sich, dass $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}$ für alle $s \geq r$ ein Unterring ist. Schließlich definieren wir den Ring

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} := \bigcup_{r>0} \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}},$$

der versehen mit der lokal-konvexen induktiven Limes-Topologie eine Struktur als LF-Raum trägt.
Diese Ringe lassen sich auch auf anderem Wege konstruieren. Dazu setzen wir

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} := \left\{ \sum_{k\gg-\infty} \pi^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}} \;\middle|\; \lim_{k\to\infty} v(x_k)/r' + k = \infty \right\},$$

In 1.2.7 hatten wir den Teilkörper $\mathbf{B} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}$ konstruiert, in dem wir wiederum die Teilringe

$$\mathbf{B}^{\dagger,r} := \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}^{\dagger} := \bigcup_{r>0} \mathbf{B}^{\dagger,r}$$

betrachten. Nach [Ber10, Lem. 21.10] ist $\mathbf{B}^{\dagger}$ ein Körper. Die Abbildungen $V(-,[r,s])$, $s \geq r$ sind auf $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ analog definiert wie auf $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{[\varpi]}$ und besitzen dort dieselben Eigenschaften.

Satz 1.3.23 (Alternative Beschreibung von $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$). *Die Vervollständigung von $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ für die von der Familie $\{V(-,[r,s])\}_{s\geq r}$ induzierte lokal-konvexe Topologie stimmt mit dem Ring $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ überein.*

Beweis. Zunächst gilt $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{[\varpi]} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$, da für $\sum \pi^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{[\varpi]}$ die Folge $(v(x_k))_k$ nach unten beschränkt ist, womit eine der Inklusionen klar ist.
Für die Umkehrung reicht es, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ zu zeigen. Sei dazu $x = \sum_{k\gg-\infty} \pi^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ gegeben. Für $s \geq r$ gilt $|v(x_k)/s'| \leq |v(x_k)/r'|$ und damit auch

$$\lim_{k\to\infty} v(x_k)/s' + k = \infty.$$

Wegen $V(\pi^k[x_k], s) = v(x_k)/s' + k$ ist also $(\pi^k[x_k])_k$ eine Nullfolge bzgl. der $V(-,[r,s])$, $s \geq r$, d.h. die Folge der Partialsummen

$$\alpha_N := \sum_{k\gg-\infty}^{N} \pi^k[x_k], \; N \gg -\infty$$

ist eine Cauchy-Folge bzgl. der lokal-konvexen Topologie. Nun finden wir wegen $v_{\mathbb{C}_p^\flat}(\overline{\omega}) > 0$ zu jedem α_N ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\overline{\omega}^n \cdot x_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ für alle $N \geq k \gg -\infty$ ist, also

$$\alpha_N = \frac{1}{\overline{\omega}^n} \sum_{k \gg -\infty}^{N} \pi^k [\overline{\omega}^n x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{[\overline{\omega}]}.$$

Es folgt $x = \lim_{N\to\infty} \alpha_N \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$. □

Satz 1.3.24. *Für $r > 1$ gilt $\mathbf{B}_L^{\dagger,r} = (\mathbf{B}^{\dagger,r})^{H_L}$, insbesondere hat man $\mathbf{B}_L^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger)^{H_L}$.*

Beweis. Man argumentiere wie in [CC98, Prop. II.2.1(iii)] und beachte, dass dort $\mathbf{A}^\dagger_{r,K}$ bzw. $\mathbf{A}^\dagger_{r^-,K}$ anstelle von $\mathbf{A}^\dagger_r$ bzw. $\mathbf{A}^\dagger_{r^-}$ gemeint ist. □

1.3.4 Erweiterung auf K/L

Eine endliche Körpererweiterung K/L liefert nach Satz 1.2.4 eine korrespondierende separable Erweiterung $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_L$ vom Grad $[K_\infty : L_\infty]$. Wegen Satz 1.3.17 gibt es eine eindeutige unverzweigte Erweiterung $\mathbf{B}_K^\dagger/\mathbf{B}_L^\dagger$ desselben Grades mit Restklassenkörper $\mathbf{E}_K$.
Wie in Satz 1.3.24 hat man $\mathbf{B}_K^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger)^{H_K} = \bigcup_{r>1} \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ mit

$$\mathbf{B}_K^{\dagger,r} := (\mathbf{B}^{\dagger,r})^{H_K}.$$

Für eine explizite Beschreibung der Ringe $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ vgl. man [Ber10, Thm. 22.3].

Satz 1.3.25. *Sei $x_1, \ldots, x_d$ eine Basis von $\mathbf{B}_K^\dagger$ über $\mathbf{B}_L^\dagger$. Ist r genügend groß, dass $x_i \in \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ für alle i gilt, so bildet $x_1, \ldots, x_d$ eine Basis von $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ über $\mathbf{B}_L^{\dagger,r}$.*
Insbesondere ist also $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ ein freier $\mathbf{B}_L^{\dagger,r}$-Modul vom Rang $[K_\infty : L_\infty]$ für $r \gg 0$.

Beweis. Siehe [Ber10, Prop. 22.6]. □

Konstruktion 1.3.26. Wir fixieren $r(K) \gg 0$, sodass $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ eine Basis für $\mathbf{B}_K^\dagger/\mathbf{B}_L^\dagger$ erhält. Sei $I \subseteq [r(K), \infty)$ ein kompaktes Intervall.
Es bezeichne $\mathbf{B}_K^I$ die Vervollständigung von $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ bzgl. $V(-, I)$ mit $r := \min I \geq r(K)$, sodass für die Basis aus Satz 1.3.25 gilt

$$\mathbf{B}_K^I = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{B}_L^I \cdot x_i.$$

Weiter ist $\mathbf{B}_K^I \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}_K^I = (\widetilde{\mathbf{B}}^I)^{H_K}$ ein Unterring, der invariant unter der Γ_K-Wirkung ist, und man kann zeigen

$$\widetilde{\mathbf{B}}_K^I = \bigoplus_{i=1}^{d} \widetilde{\mathbf{B}}_L^I \cdot x_i.$$

Der Frobenius-Homomorphismus von $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ schränkt ein zu

$$\varphi\colon \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \longrightarrow \mathbf{B}_K^{\dagger,qr} \quad \text{und} \quad \varphi\colon \mathbf{B}_K^I \longrightarrow \mathbf{B}_K^{qI}.$$

Man beachte, dass φ dort nicht mehr surjektiv ist. Für $m \geq 0$ setzen wir

$$\mathbf{B}_{K,m}^I := \varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{q^m I}) \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}_K^I, \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}_{K,\infty}^I := \bigcup_{m\geq 0} \mathbf{B}_{K,m}^I.$$

Offensichtlich gilt $\mathbf{B}_{K,m_1}^I \subseteq \mathbf{B}_{K,m_2}^I$ für $m_1 \leq m_2$ sowie $\mathbf{B}_{K,0}^I = \mathbf{B}_K^I$.

Konstruktion 1.3.27. Es bezeichne $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ die Vervollständigung von $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ für die durch die Normen $\{V(-,[r,s])\}_{s\geq r}$ induzierte lokal-konvexe Topologie, und

$$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} := \bigcup_{r>1} \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}.$$

Wir statten diesen Ring mit der induktiven Limes-Topologie bzgl. der Fréchet-Topologien der Ringe $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ aus, sodass $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ zu einem LF-Raum wird.
Wie in 1.3.26 definiert man für $m \geq 0$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,m}^{\dagger,r} := \varphi^{-m}(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,q^m r}) \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,\infty}^{\dagger,r} := \bigcup_{m\geq 0} \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,m}^{\dagger,r} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}.$$

Es gilt $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,\infty}^{\dagger,r} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}_K^{[r,s]}$ für alle $s \geq r$.
Schließlich setzen wir $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} := (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r})^{H_K}$ und $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} := (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger})^{H_K}$. Wegen Satz 1.3.23 hat man $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$.

Lemma 1.3.28. *Für $1 < r < s$ gilt innerhalb von $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$:*

(i) $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,s} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$.

(ii) $\varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,qr}) \cap \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,qr} = \varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r})$.

Beweis. Zu (i). Da $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,s}$ die Fréchet-Vervollständigung von $\mathbf{B}_K^{\dagger,s} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s} \cap \mathbf{B})^{H_K}$ bzgl. $\{V(-,[s,t])\}_{t\geq s}$ ist, lässt sich jedes Element $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,s}$ schreiben als Grenzwert einer bzgl. dieser Topologie konvergenten Reihe, deren Summanden bereits in $\widetilde{\mathbf{B}}_{[\varpi]}^{+}$ liegen (vgl. den Beweis von Satz 1.3.23). Gilt nun zusätzlich $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$, so konvergiert diese Reihe nach Definition von $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$ auch bzgl. $\{V(-,[r,t])\}_{t\geq r}$, sodass $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ folgt. Die umgekehrte Inklusion ist klar.
Zu (ii). Die nicht-triviale Inklusion folgt unter Verwendung von $\varphi^{-1}(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,qr}) \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ und (i) aus

$$\varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,qr}) \cap \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,qr} \subseteq \varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,qr} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}) = \varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}).$$

□

Kapitel 2

Räume lokal-analytischer Vektoren

Wir führen nun den für diese Arbeit zentralen Begriff der *L-analytischen Vektoren* bzgl. Operationen von p-adischen Lie-Gruppen auf Banachräumen über L ein.
Über die Isomorphie $\Gamma_L \cong \mathcal{O}^\times$ erhält Γ_L eine Struktur als lokal L-analytische Gruppe der Dimension 1 und damit als lokal $\mathbb{Q}_p$-analytische Gruppe der Dimension $[L : \mathbb{Q}_p]$. Ist V ein Banachraum über L, auf dem Γ_L stetig und linear operiert, so bezeichnen wir mit V^{la} bzw. $V^{L\text{-la}}$ den Unterraum der Vektoren in V, deren Orbitabbildung $\Gamma_L \longrightarrow V$ lokal $\mathbb{Q}_p$-analytisch bzw. lokal L-analytisch ist.
Offenbar hat man $V^{L\text{-la}} \subseteq V^{\text{la}}$, und der Abstieg von den ($\mathbb{Q}_p$-)analytischen zu den L-analytischen Vektoren lässt sich – vergleichbar mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen – durch „Richtungsableitungen" ∇_σ beschreiben, wobei σ die Menge Σ der $\mathbb{Q}_p$-Einbettungen $L \longrightarrow \overline{L}$ durchläuft. Diese Operatoren werden in 2.2.7 konstruiert, und das entscheidende Ergebnis dazu ist Satz 2.2.8. Als erste Anwendung zeigen wir in Beispiel 2.2.11, dass $(\widehat{L}_\infty)^{L\text{-la}} = L_\infty$ gilt. Dies illustriert die Philosophie, dass der Übergang zu den lokal L-analytischen Vektoren eines Raumes als eine Art „Dekomplettierung" interpretiert werden sollte.
Weil die in Kapitel 3 relevanten Ringe $\mathbf{B}^\dagger_{\text{rig},L}$ und $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\text{rig},L}$ keine Banachräume sind, sondern der allgemeineren Klasse der *LF-Räume* angehören, ist eine Ausdehnung der obigen Analytizitätsbegriffe auf solche Räume notwendig. Man spricht in diesem Kontext von dem Teilraum der *L-pro-analytischen Vektoren* $V^{L\text{-pa}} \subseteq V$, siehe Definition 2.1.6 sowie die Bemerkungen 2.1.8 und 2.2.16. Dieser Unterraum wird in Abschnitt 2.3 für $V = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\text{rig},L}$ berechnet, siehe Theorem 2.3.7 und Satz 2.3.8. Die Ringerweiterung $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\text{rig},L}/\mathbf{B}^\dagger_{\text{rig},L}$ verhält sich ähnlich zur Körpererweiterung $\widehat{L}_\infty/L$, und in Analogie zur Aussage von 2.2.11 lautet das entsprechende Resultat $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\text{rig},L})^{L\text{-pa}} = \mathbf{B}^\dagger_{\text{rig},L,\infty}$.
Schließlich wenden wir uns in Abschnitt 2.4 dem Monodromiesatz 2.4.9 zu, welcher den technischen Kern im Beweis der Kategorienäquivalenz 3.4.8 darstellt. Um von gewissen (φ, Γ)-Moduln über $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\text{rig},L})^{\text{pa}}$ zu solchen über $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\text{rig},L})^{L\text{-pa}}$ absteigen zu können, werden in 2.4.5 die Richtungsableitungen ∇_σ aus 2.2.7 zu Operatoren ∂_σ, $\sigma \in \Sigma_0 := \Sigma \setminus \{\text{id}\}$ normiert. Diese Normierung ermöglicht es, in 2.4.8 „Variablen" $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{Y}_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_0}$ zu konstruieren, auf denen sich die ∂_σ wie die gewöhnlichen partiellen Ableitungen verhalten, und

die im Beweis von 2.4.9 eine wesentliche Rolle spielen. So lässt sich in der Darstellung $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L} = \varinjlim_{r>1} \varprojlim_{s>r} \widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}_{L}$ mit Hilfe von $\mathfrak{Y}$ der gewünschte Abstieg auf dem Level von $(\widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}_{L})^{\mathrm{la}}$ durchführen, der dann in einem zweiten Schritt unter Verwendung von Kedlayas *Vektorbündeln* auf $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L})^{\mathrm{pa}}$ übertragen wird, siehe Appendix A.1.

2.1 Lokal-analytische und pro-analytische Vektoren

In diesem Abschnitt sei G eine p-adische Lie-Gruppe und V ein Banachraum über $\mathbb{Q}_p$, versehen mit einer stetigen linearen G-Operation.

Wir verwenden die üblichen Konventionen für Multiindizes: Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ und $x = (x_1, \dots, x_d) \in L^d$ bezeichne

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, \qquad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \qquad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!.$$

Außerdem verwenden wir gelegentlich das *Kronecker-Delta*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Definition 2.1.1. (a) Ein Vektor $v \in V$ heißt *lokal-analytisch*, falls die Orbitabbildung

$$\rho_v \colon G \longrightarrow V,\ g \longmapsto g(v)$$

lokal-analytisch ist. Den Untervektorraum der lokal-analytischen Vektoren in V bezeichnen wir mit V^{la}. Er ist offensichtlich G-invariant.

(b) Sei $H \leq G$ eine offene Untergruppe, für die eine Karte $c\colon H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^d$ existiert. Ein Vektor $v \in V$ heißt *H-analytisch*, falls Vektoren $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d}$ in V mit $\lim_{|\alpha| \to \infty} v_\alpha = 0$ existieren, sodass

$$h(v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} c(h)^\alpha \cdot v_\alpha$$

für alle $h \in H$ gilt. Wir schreiben $V^{H\text{-an}}$ für den Unterraum der H-analytischen Vektoren.

Bemerkung 2.1.2 (Die Topologie auf V^{la}). Nach [Sch11, Lem. 18.7] besitzt G eine Umgebungsbasis der Eins aus offenen Untergruppen. Ist $v \in V$ lokal-analytisch, so gibt es folglich ein $H \leq G$ wie oben, sodass $v \in V^{H\text{-an}}$ ist.
Gilt umgekehrt $v \in V^{H\text{-an}}$, so ist v lokal-analytisch, denn seine Orbitabbildung ist auf den Translaten von H analytisch: Ist $c\colon H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^d$ eine Karte und wie oben $h(v) = \sum_\alpha c(h)^\alpha v_\alpha$ für $h \in H$, so ist für $g \in G$ die Abbildung

$$d\colon gH \xrightarrow{g^{-1}\cdot} H \xrightarrow{c} \mathbb{Z}_p^d$$

eine Karte und

$$gh(v) = \sum_\alpha c(h)^\alpha \cdot g(v_\alpha) = \sum_\alpha d(gh)^\alpha \cdot g(v_\alpha) \quad \text{für alle } h \in H,$$

da g linear und stetig auf V ist. Wir halten fest

$$V^{\mathrm{la}} = \bigcup_H V^{H\text{-an}}.$$

Sei nun $\mathcal{F}(p^n\mathbb{Z}_p^d, V)$ der Raum der auf $p^n\mathbb{Z}_p^d$ konvergenten Potenzreihen $f = \sum_\alpha X^\alpha w_\alpha$ mit Koeffizienten $w_\alpha \in V$. Dieser wird mit der Norm $\|f\| := \max_\alpha \left\|p^{n|\alpha|}w_\alpha\right\|$ zu einem Banachraum. Nach Festlegung einer Karte $c\colon H \xrightarrow{\sim} p^n\mathbb{Z}_p^d$ mit $c(1) = 0$ erhalten wir eine injektive stetige lineare Abbildung

$$V^{H\text{-an}} \longrightarrow \mathcal{F}(p^n\mathbb{Z}_p^d, V) \subseteq \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, V),\ v \longmapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} X^\alpha \cdot v_\alpha.$$

Ihr Bild ist abgeschlossen in $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, V)$ (vgl. [Eme11, Prop. 3.3.3]), sodass $V^{H\text{-an}}$ versehen mit der eingeschränkten Norm von $\mathcal{F}(p^n\mathbb{Z}_p^d, V)$, welche wir mit $\|\cdot\|_H$ bezeichnen, zu einem Banachraum wird.
Schließlich statten wir V^{la} mit der Topologie des induktiven lokal-konvexen Limes $\bigcup_H V^{H\text{-an}}$ aus. Bei dieser Vereinigung genügt es, sich auf eine Umgebungsbasis aus Untergruppen $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots$ zu beschränken, für die eine Karte $c\colon H_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^d$ existiert, sodass $c(H_n) = p^n\mathbb{Z}_p^d$ für alle n sowie $c(1) = 0$ gilt, vgl. den Absatz über Lemma 2.4 in [BC14] und Theorem 27.1 sowie §26 in [Sch11] für die Existenz einer solchen Folge von Untergruppen. Damit erhält $V^{\mathrm{la}} = \bigcup_{n \geq 1} V^{H_n\text{-an}}$ eine Struktur als *LB-Raum*, d.h. als ein induktiver lokal-konvexer Limes einer Folge von Banachräumen.

Bemerkung 2.1.3. Sei $0 \neq v \in V^{\mathrm{la}}$. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass $h(v) = \sum_\alpha c(h)^\alpha v_\alpha$ für alle $h \in H_n$ gilt. Wegen $c(1) = 0$ hat man $v_0 = v$, also $\|v\| \leq \max_\alpha \left\|p^{n|\alpha|}v_\alpha\right\| = \|v\|_{H_n}$. Wegen $\lim_{|\alpha| \to \infty} p^{n|\alpha|}v_\alpha = 0$ finden wir $m \geq n$, sodass $\left\|p^{m|\alpha|}v_\alpha\right\| < \|v\|$ für alle $\alpha \neq 0$ gilt. Wir können also festhalten

$$\|v\| = \|v\|_{H_m} \quad \text{für } m \gg 0.$$

Lemma 2.1.4. *Sei B eine G-*Banachalgebra*, d.h. eine (kommutative) $\mathbb{Q}_p$-Algebra versehen mit einer Norm, die auf B eine Struktur als Banachraum induziert sowie $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in B$ erfüllt, und auf dem G durch stetige Algebren-Automorphismen wirkt. Dann gilt:*

(i) Für jede Untergruppe $H \leq G$ zusammen mit einer Karte $c\colon H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^d$ ist $B^{H\text{-an}} \subseteq B$ ein Unterring und $\|xy\|_H \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H$ für alle $x, y \in B^{H\text{-an}}$.

(ii) Ist $x \in B^{\mathrm{la}}$ eine Einheit in B, so gilt auch $x^{-1} \in B^{\mathrm{la}}$.

Beweis. Zu (i). Für $h \in H$ sei $h(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} c(h)^\alpha \cdot x_\alpha$ und $h(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} c(h)^\alpha \cdot y_\alpha$. Dann gilt

$$h(xy) = h(x)h(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} c(h)^\alpha \cdot w_\alpha \quad \text{mit } w_\alpha = \sum_{\mu+\nu=\alpha} x_\mu y_\nu$$

und somit $xy \in B^{H\text{-an}}$. Wegen $\|x_\mu y_\nu\| \leq \|x_\mu\| \cdot \|y_\mu\|$ und der starken Dreiecksungleichung existiert zu jedem α ein Paar $\mu_\alpha, \nu_\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $\mu_\alpha + \nu_\alpha = \alpha$ und $\|w_\alpha\| \leq \|x_{\mu_\alpha}\| \cdot \|y_{\nu_\alpha}\|$, sodass $\|xy\|_H \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H$ folgt.
Zu (ii). Sei $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots$ eine Folge von Untergruppen von G wie oben und $x \in V^{H_n\text{-an}}$, sodass $h(v) = \sum_\alpha c(h)^\alpha x_\alpha$ für alle $h \in H_n$ gilt. Dann ist

$$h(x^{-1}) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x + \sum_{\alpha \neq 0} c(h)^\alpha x_\alpha} = x^{-1} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{\alpha \neq 0} c(h)^\alpha x_\alpha / x}.$$

Nun wähle man $m \geq n$ groß genug, sodass $\left\|p^{m|\alpha|} \cdot x_\alpha / x\right\| < 1$ für alle $\alpha \neq 0$ ist, also auch $\left\|\sum_{\alpha \neq 0} c(h)^\alpha x_\alpha / x\right\| < 1$ für alle $h \in H_m$. Indem wir diesen Ausdruck in die geometrische Reihe entwickeln, ergibt sich

$$h(x^{-1}) = x^{-1} \cdot \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \left(\sum_{\alpha \neq 0} c(h)^\alpha x_\alpha / x \right)^k$$

für alle $h \in H_m$ und folglich $x^{-1} \in B^{H_m\text{-an}}$. □

Satz 2.1.5. *Sei B eine G-Banachalgebra und V ein endlich erzeugter freier B-Modul, versehen mit einer kompatiblen G-Operation.*
Es gebe eine Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_d)$ von V, sodass die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}_d(B) \subseteq B^{d \times d}, \; g \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(g)$$

lokal-analytisch ist. Dann gilt:

(i) Für offene Untergruppen $\mathbb{Z}_p^n \overset{c}{\cong} H \leq G$, auf denen $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}$ global-analytisch ist, gilt $V^{H\text{-an}} = \bigoplus_{i=1}^d B^{H\text{-an}} \cdot v_i$.

(ii) $V^{\mathrm{la}} = \bigoplus_{i=1}^d B^{\mathrm{la}} \cdot v_i$.

Beweis. Wir zeigen nur (i), denn die zweite Aussage folgt unmittelbar daraus. Für $g \in G$ schreibe $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(g) = (m_{ij}(g))_{i,j}$. Nach Voraussetzung ist für alle i, j die Abbildung

$$G \longrightarrow B, \; g \longmapsto m_{ij}(g)$$

global-analytisch. Für $j = 1, \dots, d$ ist daher die Orbitabbildung von v_j analytisch auf ganz G wegen

$$g(v_j) = \sum_{i=1}^d m_{ij}(g) \cdot v_i$$

für alle $g \in G$, insbesondere also $v_j \in V^{H\text{-an}}$. Jeder Vektor $v \in V$ hat die Form $v = \sum_{i=1}^d b_i v_i$ für gewisse $b_i \in B$, und für $g \in G$ hat man

$$g(v) = \sum_{i=1}^{d} g(b_i) \cdot g(v_i) = \sum_{i,j=1}^{d} g(b_i) m_{ji}(g) \cdot v_j. \tag{$*$}$$

Sind nun alle $b_i \in B^{H\text{-an}}$, so sind die Abbildungen

$$H \longrightarrow B,\ h \longmapsto h(b_i) m_{ji}(h)$$

analytisch und damit $v \in V^{H\text{-an}}$ wegen $(*)$, d.h. $\bigoplus_{i=1}^d B^{H\text{-an}} v_i \subseteq V^{H\text{-an}}$.
Sei umgekehrt $v = \sum_i b_i v_i \in V^{H\text{-an}}$ gegeben. Für $j = 1, \dots, d$ ist die j-te Koordinatenabbildung $p_j \colon V \longrightarrow B$ zur Basis $\mathfrak{B}$ stetig als B-lineare Abbildung auf einem endlich erzeugten freien B-Modul. Schreiben wir $h(v) = \sum_\alpha c(h)^\alpha v_\alpha$ mit $v_\alpha = \sum_i b_{\alpha,i} v_i$, so ist die Abbildung

$$H \longrightarrow B,\ h \longmapsto p_j(h(v)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c(h)^\alpha b_{\alpha,j}$$

global-analytisch. Bezeichne nun $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(h)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(h^{-1}) := (n_{ij}(h))_{i,j}$. Offenbar sind auch die n_{ij} auf H global-analytisch, und da $p_j(h(v)) = \sum_{i=1}^d h(b_i) m_{ij}(h)$ nach $(*)$ gilt, folgt

$$h(b_k) = \sum_{i=1}^{d} h(b_i) \sum_{j=1}^{d} m_{ij}(h) n_{jk}(h) = \sum_{j=1}^{d} p_j(h(v)) \cdot n_{jk}(h)$$

womit wir $b_k \in B^{H\text{-an}}$ einsehen. □

Sei nun V ein Fréchet-Raum, dessen Topologie von Seminormen $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ induziert ist. Wir können o.B.d.A.

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots$$

annehmen. Dann gilt (vgl. [Kri16, 1.3 und 1.7])

$$V = \varprojlim_{i \geq 1} V_i$$

für die Banachräume V_i, welche durch die Komplettierungen der Quotienten V/N_i gegeben seien, mit $N_i := \{v \in V \mid p_i(v) = 0\}$. Man nennt V_i die *Hausdorff-Vervollständigung bzgl. der Seminorm* p_i.
Bezeichne $\pi_i \colon V \longrightarrow V_i$ die kanonische Abbildung. Da jedes $g \in G$, aufgefasst als Automorphismus von V, stetig bzgl. allen p_i ist, gilt $g(N_i) \subseteq N_i$, und der induzierte Automorphismus auf dem Quotienten setzt sich stetig auf V_i fort. Wir erhalten also eine Wirkung

$$G \times V_i \longrightarrow V_i$$

und können damit den folgenden Begriff erklären:

Definition 2.1.6. Ein Vektor $v \in V$ heißt *pro-analytisch*, wenn $\pi_i(v) \in V_i^{\mathrm{la}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Wir schreiben V^{pa} für den Unterraum der pro-analytischen Vektoren in V.

Folgerung 2.1.7. *Sei $B = \varprojlim_{j\geq 1} B_j$ eine G-Fréchetalgebra*[1] *über $\mathbb{Q}_p$ und V ein endlich erzeugter freier B-Modul mit einer kompatiblen G-Wirkung. Wenn V eine Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_d)$ über B besitzt, für welche die Abbildung*

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}(B) \subseteq B^{d\times d}, \ g \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(g)$$

pro-analytisch ist, dann gilt $V^{\mathrm{pa}} = \bigoplus_{i=1}^d B^{\mathrm{pa}} \cdot v_i$.

Beweis. Seien die Projektionen für $B = \varprojlim_{j\geq 1} B_j$ mit π_j bezeichnet, sodass $M = \varprojlim_{j\geq 1} M_j$ gilt mit $M_j \cong B_j^d$ und kompatiblen Projektionen, für die wir ebenfalls π_j schreiben.
Für $v = \sum_{i=1}^d b_i \cdot v_i \in V$ hat man dann $\pi_j(v) = \sum_i \pi_j(b_i) \cdot \pi_j(v_i) \in M_j$, und die Aussage folgt nun aus den Definitionen und Satz 2.1.5(ii). $\square$

Bemerkung 2.1.8. (a) Auch für Fréchetträume V kann man den Unterraum V^{la} wie in Definition 2.1.1(a) erklären. Für Banach-Räume stimmt dieser offensichtlich mit V^{pa} überein, doch im allgemeinen gilt nur $V^{\mathrm{la}} \subsetneq V^{\mathrm{pa}}$.

(b) Wir erweitern die Konzepte lokal-analytischer und pro-analytischer Vektoren auf *LB-Räume* bzw. *LF-Räume*, also hausdorffsche topologische Vektorräume, die induktive lokal-konvexe Limiten abzählbar vieler Banachräume bzw. Fréchetträume sind. Ist $V = \varinjlim_{i\geq 1} V_i$ mit Banach-oder Fréchetträumen V_i, so können wir annehmen, dass die Übergangsabbildungen und damit auch die Abbildungen $V_i \longrightarrow V$ injektiv sind, siehe den Absatz nach Definition 1.1.16 in [Eme11].
Wir setzen nun voraus, dass die Unterräume V_i für $i \gg 0$ invariant unter der G-Wirkung auf $V = \bigcup_{i\geq 1} V_i$ sind. Dann setzen wir

$$V^{\mathrm{la}} := \bigcup_{i\gg 0} V_i^{\mathrm{la}} \quad \text{und} \quad V^{\mathrm{pa}} := \bigcup_{i\gg 0} V_i^{\mathrm{pa}}.$$

Für LF-Räume hat man $V^{\mathrm{la}} \subseteq V^{\mathrm{pa}}$ und bei LB-Räumen gilt Gleichheit.

2.2 L-Analytische Vektoren

Wir arbeiten im Folgenden mit Darstellungen über dem Erweiterungskörper E von L, den wir als endlich und galoissch über $\mathbb{Q}_p$ vorausgesetzt haben, und der die normale Hülle von $L/\mathbb{Q}_p$ enthalten soll. Außerdem fixieren wir eine endliche Erweiterung K/L.

[1] d.h. ein Fréchetraum ausgestattet mit einer Struktur als (kommutative) $\mathbb{Q}_p$-Algebra mit G-Wirkung, die auf allen B_j eine Struktur als G-Banachalgebra induziert.

Bemerkung 2.2.1. Über den Lubin-Tate-Charakter χ_L identifizieren wir $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$ mit $\mathcal{O}^\times$, sodass Γ_L zu einer p-adischen Lie-Gruppe wird. Auf den offenen Normalteilern $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(L_\infty/L_n)$ schränkt χ_L ein zu Isomorphismen $\Gamma_n \cong 1 + \pi^n\mathcal{O}$, und wir erhalten folglich durch den p-adischen Logarithmus $\log_p(1+x) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} \cdot x^k/k$ für $n \gg 0$ analytische Karten

$$\ell\colon \Gamma_n \underset{\chi_L}{\cong} 1 + \pi^n\mathcal{O} \xrightarrow[\log_p]{\sim} \pi^n\mathcal{O}.$$

Nun ist Γ_K eine offene kompakte Untergruppe in Γ_L (siehe das Ende von Abschnitt 1.1), also ebenfalls eine p-adische Lie-Gruppe, für welche die Γ_n, $n \gg 0$ eine Umgebungsbasis der Eins bilden.

Definition 2.2.2. Sei V ein Banachraum über L, auf dem Γ_K stetig und linear operiert.

(a) Sei $n \gg 0$, sodass $\Gamma_n \subseteq \Gamma_K$ ist. Ein Vektor $v \in V$ heißt *L-analytisch auf* Γ_n, in Zeichen $v \in V^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$, wenn es eine Folge $(v_k)_{k\geq 0}$ in V gibt mit $\lim_{k\to\infty} \pi^{nk}v_k = 0$ und

$$\gamma(v) = \sum_{k\geq 0} (\ell\gamma)^k \cdot v_k.$$

(b) Die Menge der *lokal L-analytischen* Vektoren ist $V^{L\text{-la}} := \bigcup_{n\gg 0} V^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$.

Bemerkung 2.2.3. Ebenso wie in Bemerkung 2.1.2 ist $V^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$ ein Banachraum mit der Norm $\|v\|_{\Gamma_n} := \max_{k\geq 0} \left\|\pi^{nk}v_k\right\|$ für $\gamma(v) = \sum_k (\ell\gamma)^k v_k$ und $V^{L\text{-la}}$ damit ein LB-Raum. Die analogen Aussagen zu 2.1.3 - 2.1.5 sowie 2.1.7 gelten auch im Kontext lokal L-analytischer Vektoren sowie L-pro-analytischer Vektoren (siehe Bemerkung 2.2.16).

Sei ab jetzt V ein Banachraum über E, versehen mit einer stetigen E-linearen Γ_K-Wirkung. Das Hauptideal $\pi^n\mathcal{O}$ ist ein freier $\mathbb{Z}_p$-Modul vom Rang $d := [L : \mathbb{Q}_p]$, und dasselbe gilt für $\Gamma_n \cong 1 + \pi^n\mathcal{O}$ über den Isomorphismus $\ell = \log_p \circ \chi_L$ für $n \gg 0$. Wir fixieren eine Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ von Γ_n über $\mathbb{Z}_p$, sowie den zugehörigen Isomorphismus c nach $\mathbb{Z}_p^d$. Dann ist

$$\Gamma_n \xrightarrow[\ell]{\sim} \pi^n\mathcal{O} \xrightarrow[c]{\sim} \mathbb{Z}_p^d,\ \gamma = \gamma_1^{c_1(\gamma)} \cdots \gamma_d^{c_d(\gamma)} \longrightarrow (c_1(\gamma), \ldots, c_d(\gamma)) \tag{C}$$

eine Karte.

Erinnerung (Multinomialsatz). Sei A ein kommutativer Ring und $a = (a_1, \ldots, a_d) \in A^d$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ setzt man $\binom{k}{\alpha} := k!/\alpha!$. Dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i\right)^k = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|=k}} \binom{k}{\alpha} \cdot a^\alpha.$$

Lemma 2.2.4. *Es gilt* $V^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}} = V^{\Gamma_n\text{-an}} \cap V^{L\text{-la}}$.

Beweis. Sei $v \in V^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$ mit Vektoren $v_k \in V$, sodass $\lim_{k\to\infty} \pi^{nk} v_k = 0$ ist und $\gamma(v) = \sum_{k\geq 0}(\ell\gamma)^k v_k$ für alle $\gamma \in \Gamma_n$ gilt. Die Karte (**C**) liefert Darstellungen $\ell\gamma = \sum_{i=1}^d c_i(\gamma) \cdot \ell\gamma_i$. Setzen wir $\mathfrak{B} := (\ell\gamma_1, \dots, \ell\gamma_d) \in L^d$, so folgt mit dem Multinomialsatz

$$\gamma(v) = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{i=1}^d c_i(\gamma) \cdot \ell\gamma_i\right)^k v_k = \sum_{k\geq 0}\sum_{|\alpha|=k} c(\gamma)^\alpha \mathfrak{B}^\alpha \binom{k}{\alpha} v_k = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} c(\gamma)^\alpha \cdot w_\alpha$$

mit $w_\alpha := \binom{|\alpha|}{\alpha}\mathfrak{B}^\alpha v_{|\alpha|} \in V$. Wegen $\ell\gamma_i \in \pi^n\mathcal{O}$ sichert die Konvergenzbedingung an die v_k, dass $\lim_{|\alpha|\longrightarrow\infty} w_\alpha = 0$ ist, d.h. $v \in V^{\Gamma_n\text{-an}}$ und die Inklusion „$\subseteq$“ ist damit klar.
Ist umgekehrt $v \in V^{\Gamma_n\text{-an}} \cap V^{L\text{-la}}$, so gibt es einerseits ein $m \gg 0$ und Vektoren $v_k \in V$ mit $\lim_{k\to\infty} \pi^{mk} v_k = 0$ und

$$\gamma(v) = \sum_{k\geq 0}(\ell\gamma)^k v_k \tag{$*$}$$

für alle $\gamma \in \Gamma_m$. Sei o.B.d.A. $m \geq n$. Dann gilt für $\gamma \in \Gamma_m$ wie oben $\ell\gamma = \sum_{i=1}^d c_i(\gamma) \cdot \ell\gamma_i$ und Einsetzen in $(*)$ liefert

$$\gamma(v) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} c(\gamma)^\alpha \cdot \binom{|\alpha|}{\alpha}\mathfrak{B}^\alpha v_{|\alpha|} \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma_m. \tag{1}$$

Andererseits hat man wegen $v \in V^{\Gamma_n\text{-an}}$ Elemente $w_\alpha \in V$ mit $\lim_{|\alpha|\to\infty} w_\alpha = 0$ und

$$\gamma(v) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} c(\gamma)^\alpha \cdot w_\alpha \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma_n. \tag{2}$$

Auf dem offenen Teil $\ell(\Gamma_m) \subseteq \mathbb{Z}_p^d$ stimmen die Potenzreihen (1) und (2) überein, sodass aus dem Identitätssatz [Sch11, A.I Cor. 5.8] folgt

$$w_\alpha = \binom{|\alpha|}{\alpha}\mathfrak{B}^\alpha v_{|\alpha|} \quad \text{für alle } \alpha.$$

Um die Konvergenz von $(*)$ auf Γ_n einzusehen, bleibt $\lim_{k\to\infty} \pi^{nk} v_k = 0$ zu zeigen. Da $\mathfrak{B} = (\ell\gamma_1, \dots, \ell\gamma_d)$ eine $\mathbb{Z}_p$-Basis von $\pi^n\mathcal{O}$ ist, gibt es ein j mit $\ell\gamma_j \in \pi^n\mathcal{O} \setminus \pi^{n+1}\mathcal{O}$. Die Behauptung folgt aus der Eigenschaft $\lim_{|\alpha|\to\infty} w_\alpha = 0$ angewandt auf die Folge $(\alpha_k)_{k\geq 0}$, wobei $\alpha_k \in \mathbb{N}_0^d$ den Multiindex mit Eintrag k an der Stelle j und 0 überall sonst bezeichne. Somit gilt $v \in V^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$. □

Bemerkung 2.2.5. Wir sehen insbesondere $V^{L\text{-la}} \subseteq V^{\text{la}}$. Es ist a priori V^{la} ein $\mathbb{Q}_p$-Untervektorraum und $V^{L\text{-la}}$ ein L-Untervektorraum von V. Aus der E-Linearität der Γ_K-Operation folgt aber unmittelbar, dass beide sogar E-Untervektorräume sind.
Das Ziel des restlichen Abschnittes ist es, die lokal L-analytischen Vektoren in V^{la} zu charakterisieren.

In der nächsten Bemerkung machen wir Gebrauch von dem Begriff des *tonnelierten* lokal-konvexen Vektorraumes, für dessen Definition wir auf [Sch02, Def. über Prop. 6.15] verweisen. Die für uns im Folgenden relevanten Tatsachen lauten:

(a) In tonnelierten lokal-konvexen Vektorräumen gilt der Satz von Banach-Steinhaus [Sch02, Prop. 6.15].

(b) Banachräume, Frécheträume und allgemeiner LB -und LF-Räume sind tonneliert nach Ex. 2),4) unter Cor. 6.16 ebenda.

Bemerkung 2.2.6 (Die Operation von $\mathrm{Lie}\,\Gamma_K$**).** Unter Verwendung der Isomorphie $\Gamma_L \cong \mathcal{O}^\times$ durch den Lubin-Tate-Charakter und der Tatsache, dass $\mathcal{O}^\times \subseteq L^\times$ offen ist, identifizieren wir die Lie-Algebren

$$\mathrm{Lie}\,\Gamma_L = \mathrm{Lie}\,\mathcal{O}^\times = \mathrm{Lie}\,L^\times = L.$$

Für die letzte Gleichheit siehe [Bou72, III §3.9 Cor. nach Prop. 33]. Entsprechend gilt $\mathrm{Lie}\,\Gamma_K = \mathrm{Lie}\,\Gamma_L = L$ für die offene Untergruppe $\Gamma_K \leq \Gamma_L$.
Sei nun W ein hausdorffscher tonnelierter lokal-konvexer E-Vektorraum mit einer stetigen linearen Γ_K-Operation, sodass für jedes $v \in W$ die Orbitabbildung $\rho_v \colon \Gamma_K \longrightarrow W$ in $1 = \mathrm{id}$ differenzierbar ist.[2] Diese Forderung ist insbesondere erfüllt, wenn die Γ_K-Wirkung auf W lokal-analytisch ist, also etwa für $W = V^{\mathrm{la}}$ oder $W = V^{\mathrm{pa}}$. Wir bezeichnen mit

$$d_1\rho_v \colon \mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow W$$

die Ableitung von ρ_v, und definieren die *abgeleitete Wirkung*

$$\mathrm{Lie}\,\Gamma_K \times W \longrightarrow W,\ (\mathfrak{x}, v) \longmapsto \mathfrak{x}(v) := d_1\rho_v(\mathfrak{x}).$$

Diese ist $\mathbb{Q}_p$-bilinear und stetig, was aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt, und eine einfache Rechnung zeigt

$$\mathfrak{x}(v) = \frac{d}{dt}(\rho_v \circ \exp_{\Gamma_K})(\mathfrak{x}t)|_{t=0},$$

wobei t in einer hinreichend kleinen Null-Umgebung von $\mathbb{Z}_p$ variiert und $\exp_{\Gamma_K}$ eine Exponentialabbildung für die Lie-Gruppe Γ_K bezeichnet (s. den Absatz nach dem Beweis von Lemma 2.3.1 in [BSX15]). Für Details konsultiere man [Féa97, §3.1].
Da die Gruppe Γ_K abelsch ist, kommutieren die Elemente aus $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ als Operatoren von

[2] Differenzierbarkeit in diesem Kontext ist in Sinne von [Bou67, (1.2.1)] erklärt. Für Abbildungen in Banachräume entspricht dies dem üblichen Differenzierbarkeitsbegriff.

W miteinander, denn für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ und $v \in W$ hat man

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}(\mathfrak{y}(v)) &= \frac{d}{dt} \exp(\mathfrak{x}t) \left(\frac{d}{ds} \exp(\mathfrak{y}s)(v)|_{s=0} \right) \bigg|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\exp(\mathfrak{x}t)(\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot (\exp(\mathfrak{y}s)(v) - v)) - \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot (\exp(\mathfrak{y}s)(v) - v) \right) \\
&= \lim_{t,s\to 0} \frac{\exp(\mathfrak{x}s)\exp(\mathfrak{y}s)(v) - \exp(\mathfrak{x}t)(v) - \exp(\mathfrak{y}s)(v) - v}{ts} \\
&= \mathfrak{y}(\mathfrak{x}(v)).
\end{aligned}$$

Eine simplere Rechnung zeigt außerdem, dass jede stetige $\mathbb{Q}_p$-lineare und Γ_K-äquivariante Abbildung $W \longrightarrow W'$ auch mit den induzierten $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$-Wirkungen vertauscht. Insbesondere sind die Γ_K- und $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$-Operationen auf W miteinander verträglich.

Erweiterung auf E-Koeffizienten. Wir bezeichnen die Menge der $\mathbb{Q}_p$-Einbettungen von L in seinen algebraischen Abschluss mit

$$\Sigma := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_{\mathbb{Q}_p}}(L, \overline{L}).$$

Wir wollen für $v \in V^{\mathrm{la}}$ und $\sigma \in \Sigma$ die „Ableitung $\nabla_\sigma(v)$ von v in Richtung σ“ erklären mit dem Ziel, den Teilraum

$$V^{L\text{-la}} \subseteq V^{\mathrm{la}}$$

durch gewisse Differentialgleichungen in den ∇_σ zu beschreiben. Dazu modifizieren wir für $n \gg 0$ die Karten ℓ zu Abbildungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \colon \Gamma_n \xrightarrow[\ell]{\sim} \pi^n \mathcal{O} \longrightarrow E^\Sigma = \prod_{\sigma\in\Sigma} E,& \\
a \longmapsto (\sigma(a))_{\sigma\in\Sigma}&
\end{aligned}$$

und werden weiter unten mittels $\mathcal{L}$ jedem Vektor $v \in V^{\Gamma_n\text{-an}}$ eine Reihenentwicklung der Gestalt

$$\gamma(v) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^\Sigma} (\mathcal{L}\gamma)^\alpha \cdot \frac{\nabla^\alpha(v)}{\alpha!}, \quad \gamma \in \Gamma_n \tag{T}$$

zuordnen. Doch zunächst betrachten wir die E-Algebra $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$, in der die Operatoren $(\nabla_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ formal leben sollen. Die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K),\ \mathfrak{x} \longmapsto 1 \otimes \mathfrak{x} \tag{I}$$

ist injektiv, da sie aus Anwendung des exakten Funktors $- \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ auf die Inklusion $\mathbb{Q}_p \subseteq E$ hervorgeht, sodass wir $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ mit seinem Bild unter (**I**) identifizieren können. Die abgeleitete Wirkung der Lie-Algebra setzt sich auf $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ fort durch

$$a \otimes \mathfrak{x} \colon V^{\mathrm{la}} \longrightarrow V^{\mathrm{la}},\ v \longmapsto a \cdot \mathfrak{x}(v).$$

Konstruktion 2.2.7 (Die Operatoren ∇_σ). Da E die normale Hülle von L enthält, ist das Bild jeder $\mathbb{Q}_p$-Einbettung $\sigma \in \Sigma$ von L vollständig in E enthalten. Folglich hat man, da $L/\mathbb{Q}_p$ separabel ist, einen Isomorphismus von E-Vektorräumen

$$E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K) \xrightarrow{\sim} E^\Sigma,$$

der $1 \otimes a$ auf $(\sigma(a))_{\sigma\in\Sigma}$ schickt für alle $a \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K) = L$ (vgl. Prop. 1.1.1 und Lemma 1.1.2 in [Sha]). Für $\sigma \in \Sigma$ bezeichne

$$\nabla_\sigma \in E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$$

dasjenige Element, welches über diesen Isomorphismus auf den zu σ gehörigen kanonischen Basisvektor in E^Σ abgebildet wird, d.h. auf das Tupel mit Eintrag 1 bei σ und 0 überall sonst. Weiter setzen wir $\nabla := (\nabla_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$.
Die Operatoren ∇_σ kommutieren miteindander, siehe das Ende von Bemerkung 2.2.6.

Sei nun $n \gg 0$ und $\gamma \in \Gamma_n$. Wir wollen gelegentlich $\ell(\gamma) \in \pi^n\mathcal{O} \subseteq L$ explizit als Element von $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) = L$ auffassen. Um dies zu verdeutlichen schreiben wir dann $\log(\gamma)$ statt $\ell(\gamma)$, und unterscheiden dabei nicht zwischen $\log(\gamma) \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ und seinem Bild $1 \otimes \log(\gamma)$ unter der Inklusion (**I**).
Nach Definition der Operatoren ∇_σ hat man

$$\log(\gamma) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \sigma(\ell\gamma) \cdot \nabla_\sigma.$$

Weiter ist nach [Bou72, III§4.3 Ex. 2)] die gewöhnliche Exponentialfunktion

$$\exp\colon \pi^n\mathcal{O} \longrightarrow 1 + \pi^n\mathcal{O}$$

eine Exponentialabbildung $\exp\colon \mathrm{Lie}(\Gamma_K) \dashrightarrow \Gamma_K$ für die Lie-Gruppe Γ_K, sodass einerseits für alle $\gamma \in \Gamma_n$ gilt

$$\gamma = \exp(\log\gamma). \tag{1}$$

Andererseits hat man für jedes $v \in V^{\mathrm{la}}$ und alle $\mathfrak{x}$ innerhalb einer genügend kleinen Null-Umgebung in $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ die konvergente Taylorentwicklung

$$\exp(\mathfrak{x})(v) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \cdot \mathfrak{x}^k(v), \tag{2}$$

wobei hier der Ausdruck $\mathfrak{x}^k(v)$ die iterierte Anwendung von $\mathfrak{x}$ auf v via der abgeleiteten Operation bezeichnet, siehe hierzu den Anfang von §3 in [ST02] sowie [Féa97, Bem. 3.1.4]. Ist nun $v \in V^{\Gamma_n\text{-an}}$ und schreiben wir $\mathcal{L}(\gamma) = (\sigma(\ell\gamma))_{\sigma\in\Sigma}$ sowie $\nabla = (\nabla_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, so erhalten wir durch Kombination von (1) und (2) und unter Verwendung des Multinomialsatzes für die Taylorentwicklung von ρ_v die gewünschte Gestalt (**T**)

$$\begin{aligned}\gamma(v) = \exp(\log\gamma)(v) &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(\log\gamma)^k(v)\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma(\ell\gamma)\nabla_\sigma\right)^k(v)\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}\binom{k}{\alpha}(\mathscr{L}\gamma)^\alpha\nabla^\alpha(v)\\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^\Sigma}(\mathscr{L}\gamma)^\alpha\cdot\frac{\nabla^\alpha(v)}{\alpha!}.\end{aligned}$$

Satz 2.2.8. *Sei $v \in V^{\mathrm{la}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $v \in V^{L\text{-la}}$.

(ii) Die von der abgeleiteten Wirkung induzierte $\mathbb{Q}_p$-lineare Abbildung

$$d_1\rho_v\colon\ \mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow V,\ \mathfrak{x} \longmapsto \mathfrak{x}(v)$$

ist L-linear.

(iii) $\nabla_\sigma(v) = 0$ *für alle* $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$.

Beweis. Die Richtung „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“ ist klar, denn aus der lokalen L-Analytizität von ρ_v folgt direkt die L-Linearität seines Differentials $d_1\rho_v$.
Zu „(iii) $\Longrightarrow$ (i)“. Da die ∇_σ miteinander kommutieren, besitzt die Reihenentwicklung (**T**) von $\gamma(v)$ unter der Voraussetzung (iii) die Gestalt

$$\gamma(v) = \sum_{k\geq 0}(\ell\gamma)^k\cdot\frac{\nabla_{\mathrm{id}}^k(v)}{k!},$$

was $v \in V^{L\text{-la}}$ impliziert.
Zu „(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“. Sei $n \gg 0$, sodass $v \in V^{\Gamma_n\text{-an}}$ ist, und sei $\gamma \in \Gamma_n$. Nach Konstruktion der ∇_σ (s. 2.2.7) hat man in $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ die Identitäten

$$\log\gamma = \sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma(\ell\gamma)\cdot\nabla_\sigma \quad \text{sowie} \quad 1 = \sum_{\sigma\in\Sigma}\nabla_\sigma.$$

Andererseits folgt $(\log\gamma)(v) = \ell(\gamma)\cdot 1(v)$ aufgrund der L-Linearität der abgeleiteten Orbitabbildung von v, sodass sich $\sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma(\ell\gamma)\cdot\nabla_\sigma(v) = \ell(\gamma)\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma}\nabla_\sigma(v)$ für alle $\gamma \in \Gamma_n$ ergibt. Setzen wir $\Sigma_0 := \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$, so gilt also

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_0}(\sigma(x) - x)\cdot\nabla_\sigma(v) = 0 \quad \text{für alle } x \in \pi^n\mathcal{O}. \tag{$*$}$$

Sei $\theta \in \pi^n\mathcal{O}$, sodass $1, \theta, \ldots, \theta^r$ eine Basis für $L/\mathbb{Q}_p$ ist. Wir zeigen, dass das System $(\sum_{\sigma\in\Sigma_0}(\sigma\theta^j - \theta^j)\cdot\nabla_\sigma)_{j=1,\ldots,r}$ eine Basis des von $(\nabla_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_0}$ erzeugten E-Untervektorraumes von $E\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ bildet. Dann folgt $\nabla_\sigma(v) = 0$ für alle $\sigma \in \Sigma_0$ mit $(*)$. Dafür ist einzusehen, dass die Koeffizientenmatrix

$$S := \begin{pmatrix} \sigma_1\theta - \theta & \sigma_2\theta - \theta & \cdots & \sigma_r\theta - \theta \\ \sigma_1\theta^2 - \theta^2 & \sigma_2\theta^2 - \theta^2 & \cdots & \sigma_r\theta^2 - \theta^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1\theta^r - \theta^r & \sigma_2\theta^r - \theta^r & \cdots & \sigma_r\theta^r - \theta^r \end{pmatrix} \in E^{r\times r}$$

invertierbar ist. Bekanntlich (s. etwa [Sha, Lem. 1.4.12]) hat die Vandermonde-Matrix

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta & \sigma_1\theta & \cdots & \sigma_r\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta^r & \sigma_1\theta^r & \cdots & \sigma_r\theta^r \end{pmatrix} \in E^{(r+1)\times(r+1)}$$

die Determinante $\prod_{0\le i<j\le r}(\sigma_j\theta - \sigma_i\theta)$, wobei $\sigma_0 := \mathrm{id}$. Da die σ_i durch ihre Werte bei θ bereits festgelegt sind, ist $\det(T) \neq 0$. Indem wir in T für $j = 1, \ldots, r$ das θ^j-fache der ersten Zeile von der $(j+1)$-ten Zeile subtrahieren, erhalten wir die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in E^{(r+1)\times(r+1)}$$

und folglich $\det(S) = \det(T) \neq 0$, womit die Behauptung folgt. □

Die Charakterisierung (iii) in obigem Satz legt die folgende Verallgemeinerung des Begriffes der L-Analytizität nahe.

Definition 2.2.9. Sei $\sigma \in \Sigma$. Ein Vektor $v \in V^{\mathrm{la}}$ heißt *lokal σ-analytisch*, wenn $\nabla_\tau(v) = 0$ für alle $\tau \neq \sigma$ gilt.

Folgerung 2.2.10. *Für die E-Darstellung V von Γ_K sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $V^{L\text{-la}} = V^{\mathrm{la}}$.

(ii) Die abgeleitete Wirkung $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)\times V^{\mathrm{la}} \longrightarrow V^{\mathrm{la}}$ *ist L-bilinear.*

(iii) Die abgeleitete Wirkung ist L-linear in der ersten Komponente.

Beweis. Zu „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“. Nach Satz 2.2.8 ist für $v \in V^{\mathrm{la}} = V^{L\text{-la}}$ die zugehörige Abbildung $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow V^{\mathrm{la}}$ linear über L. Ist andererseits $\mathfrak{x} \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ fest, so ist auch

$$V^{L\text{-la}} \longrightarrow V^{L\text{-la}},\ v \longmapsto \mathfrak{x}(v) = d_1\rho_v(\mathfrak{x})$$

L-linear, denn für $v \in V^{L\text{-la}}$ und $a \in L$ ist $\rho_{av} = a\cdot\rho_v$ wegen der E-Linearität der Γ_K-Wirkung, sowie $d_1(a\rho_v) = a\cdot d_1\rho_v$, da ρ_v lokal L-analytisch ist.
Schließlich ist die Richtung „(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“ trivial und „(iii) $\Longrightarrow$ (i)“ folgt direkt aus 2.2.8(ii). □

Beispiel 2.2.11. Wir betrachten den π-adischen Abschluss $\widehat{K}_\infty$ von K_∞ innerhalb von $\mathbb{C}_p$. Nach dem Theorem von Ax-Sen-Tate [Ber10, Thm. 5.3] gilt für jeden Teilkörper $F \subseteq \overline{L}$

$$\mathbb{C}_p^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/F)} = \widehat{F},$$

sodass für $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{L}/K_\infty)$ folgt $\mathbb{C}_p^{H_K} = \widehat{K}_\infty$. Insbesondere ist $\widehat{K}_\infty$ eine L-lineare Γ_K-Banachdarstellung. Die Γ_K-Operation setzt sich stetig und E-linear auf den Banachraum $E \otimes_L \widehat{K}_\infty$ über E fort, und es gilt:

(i) Für jedes $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ existiert ein $x_\sigma \in (\widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}}$, sodass $\gamma(x_\sigma) = x_\sigma + \sigma(\ell\gamma)$ für alle $\gamma \in \Gamma_K$ und insbesondere $\nabla_\tau(x_\sigma) = \delta_{\sigma,\tau}$ für alle $\tau \in \Sigma$ gilt.

(ii) Auf $(E \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}}$ ist $\nabla_{\mathrm{id}} = 0$.

(iii) Es gilt $(E \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}} = E \otimes_L K_n$ für $n \gg 0$, und insbesondere $(E \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{L\text{-la}} = E \otimes_L K_\infty$.

Beweis. Zu (i). Laut [BC14, Thm. 4.1] existiert für jede Einbettung $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ ein Element $u_\sigma \in \widehat{F}_\infty \subseteq \widehat{K}_\infty$ mit $\gamma(u_\sigma) = \sigma(\chi_L(\gamma)) \cdot u_\sigma$ für alle $\gamma \in \Gamma_K$. Durch die Wahl $\log_p(p) := 0$ setzen wir den p-adischen Logarithmus fort zu einem Gruppenhomomorphismus $\log_p \colon \mathbb{C}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}_p$ und definieren $x_\sigma := \log_p(u_\sigma)$, sodass für alle $\gamma \in \Gamma_K$ folgt

$$\gamma(x_\sigma) = \log_p(\gamma(u_\sigma)) = \log_p(\sigma(\chi_L(\gamma)) \cdot u_\sigma) = \sigma(\ell\gamma) + x_\sigma.$$

Dies zeigt $x_\sigma \in (\widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}}$, und Koeffizientenvergleich mit der Taylorentwicklung (**T**) liefert die Behauptung für $\nabla_\tau(x_\sigma)$.
Zu (ii). Nach [BC14, Prop. 6.3] gibt es ein $0 \neq \mathfrak{z} \in \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$, das auf $(\mathbb{C}_p \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}}$ als die Nullabbildung wirkt. Schreiben wir $\mathfrak{z} = \sum_{\tau\in\Sigma} z_\tau \cdot \nabla_\tau$ mit $z_\tau \in \mathbb{C}_p$, so liefert Anwendung auf x_σ

$$0 = \mathfrak{z}(x_\sigma) = \sum_{\tau\in\Sigma} z_\tau \cdot \nabla_\tau(x_\sigma) = z_\sigma$$

für alle $\sigma \neq \mathrm{id}$, sodass also $\mathfrak{z} = z_{\mathrm{id}} \nabla_{\mathrm{id}}$ mit $z_{\mathrm{id}} \neq 0$ und folglich $\nabla_{\mathrm{id}} = 0$ auf $(E \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}} \subseteq (\mathbb{C}_p \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}}$ gilt.
Zu (iii). Wegen E-Linearität gilt $(E \otimes_L \widehat{K}_\infty)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}} = E \otimes_L (\widehat{K}_\infty)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$ und daher genügt es, $\widehat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}} = K_\infty$ zu zeigen. Jedes $x \in K_n$ wird von $\Gamma_n \subseteq \Gamma_K$ fixiert, sodass die Orbitabbildung von x sogar konstant auf Γ_n ist.
Sei umgekehrt $x \in (\widehat{K}_\infty)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$. Aus (ii) und Satz 2.2.8 folgt $\nabla_\sigma(x) = 0$ für alle $\sigma \in \Sigma$, womit man an der Taylorreihe (**T**) abliest, dass ρ_x lokal-konstant auf Γ_K und folglich auf Γ_n konstant ist. Das bedeutet $x \in \mathbb{C}_p^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/K_n)}$, und der Satz von Ax-Sen-Tate liefert $x \in \widehat{K}_n = K_n \subseteq K_\infty$. □

Bemerkung 2.2.12. Sei B eine kommutative Γ_K-Fréchetalgebra über E mit einer Γ_K-Wirkung durch stetige E-Algebrenautomorphismen, für die sämtliche Orbitabbildungen in $1 \in \Gamma_K$ differenzierbar sind[3] und M ein endlich erzeugter freier B-Modul, versehen mit einer kompatiblen Γ_K-Operation, die derselben Differenzierbarkeitsbedingung genügt. Dann gilt für alle $f \in B$, $x \in M$ und $\mathfrak{d} \in E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ die Produktregel

$$\mathfrak{d}(f \cdot x) = f \cdot \mathfrak{d}(x) + \mathfrak{d}(f) \cdot x.$$

Beweis. Offenbar genügt es, $\mathfrak{d} \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ anzunehmen. Mit der gewöhnlichen Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(fx) &= \frac{d}{dt}\exp(t\mathfrak{d})(fx)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(t\mathfrak{d})(f) \cdot \exp(t\mathfrak{d})(x)|_{t=0} \\ &= f \cdot \frac{d}{dt}\exp(t\mathfrak{d})(x)|_{t=0} + \frac{d}{dt}\exp(t\mathfrak{d})(f)|_{t=0} \cdot x \\ &= f \cdot \mathfrak{d}(x) + \mathfrak{d}(f) \cdot x.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.13. In der Situation von 2.2.12 wirkt also jedes $\mathfrak{d} \in E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ als *Derivation* $\mathfrak{d}_B$ auf B und auf M als *Differentialoperator* $\mathfrak{d}_M$, sodass M eine Struktur als *Differentialmodul* über $(B, \mathfrak{d}_B)$ im Sinne von [Ked10, Def. 4.1.2] erhält.
Ist $\mathfrak{B} = (x_1, \ldots, x_d)$ eine Basis von M über B, so ist wie üblich die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{d}_M)$ von $\mathfrak{d}_M \colon M \longrightarrow M$ bzgl. $\mathfrak{B}$ gegeben durch $\mathfrak{d}_M(x_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} \cdot \mathfrak{d}_M(x_i)$. Für einen Vektor $x \in M$ mit Koordinaten $a = (a_1, \ldots, a_d) \in B^d$ bzgl. der Basis $\mathfrak{B}$ berechnen sich die Koordinaten von $\mathfrak{d}_M(x)$ durch

$$\mathfrak{d}_B(a) + \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{d}_M) \cdot a,$$

siehe [Ked10, Def. 4.2.1].

Lemma 2.2.14. *Wir lassen $g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$ auf $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ durch $g \otimes \mathrm{id}$ wirken. Dann gilt $g(\nabla_\sigma) = \nabla_{g\circ\sigma}$ für alle $\sigma \in \Sigma$, insbesondere hat man $\nabla_{\mathrm{id}} \in L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$.*

Beweis. Wir wählen Elemente $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_K$, für welche das System $(\log \gamma_1, \ldots \log \gamma_d)$ eine Basis von $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \cong L$ über $\mathbb{Q}_p$ bildet. Dann hat man für $\sigma \in \Sigma$ eine eindeutige Darstellung $\nabla_\sigma = \sum_{i=1}^d a_i^\sigma \cdot \log \gamma_i$ mit $a_i^\sigma \in E$. Nach Konstruktion 2.2.7 folgt

$$\log \gamma_i = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\ell\gamma_i) \cdot \nabla_\sigma = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\ell\gamma_i) \cdot a_j^\sigma \right) \cdot \log \gamma_j$$

und damit $\sum_{\sigma\in\Sigma} \sigma(\ell\gamma_i) \cdot a_j^\sigma = \delta_{ij}$. Die Basiswechsel-Koeffizienten a_j^σ sind durch diese Gleichungen bereits festgelegt, und indem wir g darauf anwenden, erhalten wir $g(a_j^\sigma) = a_j^{g\circ\sigma}$. Dies impliziert $g(\nabla_\sigma) = \sum_{j=1}^d a_j^{g\circ\sigma} \cdot \log \gamma_j = \nabla_{g\circ\sigma}$, und der Zusatz folgt nun aus $h(\nabla_{\mathrm{id}}) = \nabla_{\mathrm{id}}$ für alle $h \in \mathrm{Gal}(E/L)$. □

[3] vgl. die Bemerkungen 2.1.7 und 2.2.6.

Lemma 2.2.15. *Seien V, W Banachräume über E, auf denen Γ_K stetig und linear operiert, und $g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$. Weiter sei eine stetige, Γ_K-äquivariante und g^{-1}-semilineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ gegeben, d.h. f sei $\mathbb{Q}_p$-linear und für alle $a \in E$, $v \in V$ und $\gamma \in \Gamma_K$ gelte $f \circ \gamma(v) = \gamma \circ f(v)$ und $f(av) = g^{-1}(a) \cdot f(v)$. Dann folgt für alle $v \in V^{\mathrm{la}}$ und $\sigma \in \Sigma$*

$$f(\nabla_\sigma(v)) = \nabla_{g^{-1}\circ\sigma}(f(v)).$$

Die Wahl $\sigma = g|_L$ liefert insbesondere $\nabla_{\mathrm{id}}(f(v)) = f(\nabla_{g|_L}(v))$.

Beweis. Dass f mit Γ_K vertauscht, kommutiert f auch mit der Wirkung von $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ nach Bemerkung 2.2.6. Ist nun $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_d)$ eine $\mathbb{Q}_p$-Basis von $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \cong L$ und schreiben wir $\nabla_\sigma = \sum_{i=1}^d a_i^\sigma \cdot \mathfrak{x}_i$ mit $a_i^\sigma \in E$, so erhalten wir mit Lemma 2.2.14 für alle $v \in V^{\mathrm{la}}$

$$f(\nabla_\sigma(v)) = \sum_{i=1}^d g^{-1}(a_i^\sigma) \cdot \mathfrak{x}_i(f(v)) = g^{-1}(\nabla_\sigma)(f(v)) = \nabla_{g^{-1}\circ\sigma}(f(v)).$$

□

Bemerkung 2.2.16. Ist V ein Fréchetraum über E, so definiert man analog wie in 2.1.6 den Unterraum $V^{L\text{-pa}}$ der *L-pro-analytischen Vektoren* in V. Schreiben wir $V = \varprojlim V_i$ mit Banachräumen V_i (vgl. den Absatz über 2.1.6), so wirkt die Ableitung ∇_σ in Richtung $\sigma \in \Sigma$ auf V durch $\nabla_\sigma((x_i)_i) = (\nabla_\sigma(x_i))_i$.
Schließlich dehnen wir die Begriffe „lokal L-analytisch“ und „L-pro-analytisch“ auf LB- und LF-Räume aus, vgl. Bemerkung 2.1.8.

Folgerung 2.2.17. *Sei $V = \bigcup_{k\geq 1} W_k$ ein LB- oder LF-Raum, versehen mit einer stetigen E-linearen Γ_K-Wirkung, für die die Unterräume W_k invariant sind. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $V^{\mathrm{pa}} = V^{L\text{-pa}}$.

(ii) Für alle $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ gilt $\nabla_\sigma = 0$ auf V^{pa}.

(iii) Die abgeleitete Operation

$$\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \times V^{\mathrm{pa}} \longrightarrow V^{\mathrm{pa}} \tag{1}$$

ist L-bilinear.

(iv) Die abgeleitete Operation ist L-linear in der ersten Komponente.

Beweis. Sei zunächst $V = \varprojlim_{k\geq 1} V_k$ ein Fréchetraum mit Banachräumen V_k, und bezeichne $\pi_k\colon V \longrightarrow V_k$ die kanonische Abbildung.
Die Äquivalenz „(i) $\iff$ (ii)“ folgt direkt aus Satz 2.2.8.
Ist $v = (v_k)_{k\geq 1} \in V^{\mathrm{pa}}$, so gilt $d_1\rho_v = (d_1\rho_{v_k})_{k\geq 1}$ für die Ableitung

$$d_1\rho_v\colon\ \mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow V^{\mathrm{pa}},\ \mathfrak{x} \longmapsto \mathfrak{x}(v),$$

und $d_1\rho_{v_k}$ ist die Orbitabbildung von v_k bzgl. der von der Wirkung (1) via π_k auf V_k^{la} induzierten Operation (vgl. [Bou67, (1.2.1)]). Offenbar ist $d_1\rho_v$ genau dann L-linear, wenn alle $d_1\rho_{v_k}$ dies sind, was nach 2.2.8 äquivalent zu $v \in V^{L\text{-pa}}$ ist.
Dies zeigt „(i) $\Longleftrightarrow$ (iv)“, und für „(i) $\Longleftrightarrow$ (iii)“ verwende Folgerung 2.2.10 zusammen mit der Beobachtung, dass ein $\mathbb{Q}_p$-linearer stetiger Endomorphismus von V^{pa} genau dann L-linear ist, wenn die von ihm induzierten Endomorphismen auf V_k^{la} dies sind.
Schließlich betrachten wir den allgemeinsten Fall, dass V ein LF-Raum ist, also $V = \bigcup_{k\geq 1} W_k$ mit Fréchetträumen

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots$$

und $v \in V^{\mathrm{pa}} = \bigcup_k W_k^{\mathrm{pa}}$, so gilt $v \in W_k^{\mathrm{pa}}$ für ein $k \gg 1$, und dort sind die Äquivalenzen von (i)-(iv) bereits gezeigt, sodass sie auch für V^{pa} folgen. $\square$

2.3 Die L-analytischen Vektoren in $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $r_n := q^{n-1}(q-1)$. Wir fixieren $1 \leq j \leq k$ und setzen $J := [r_j, r_k]$. Es ist $\widetilde{\mathbf{B}}_L^J = (\widetilde{\mathbf{B}}^J)^{H_L}$ eine kommutative Γ_L-Banachalgebra über L, versehen mit der Norm $\|x\|_J := p^{-V(x,J)}$. Für $s \in J$ schreiben wir $\|x\|_s := p^{-V(x,s)}$, sodass also $\|x\|_J = \max_{s\in J}\|x\|_s$ gilt.
Wir bestimmen zunächst den Teilraum $(\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{L\text{-la}}$ der lokal L-analytischen Vektoren in $\widetilde{\mathbf{B}}_L^J$. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff (für mehr Details konsultiere man [DS16, §1.2]).

Definition 2.3.1. Für $n \geq 0$ betrachten wir in $L[X]$ die $\mathcal{O}$-Untermoduln

$$L_n[X] := \{f \in L[X] \mid \deg f \leq n \text{ und } f(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}\}.$$

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $L[X]$ heißt *Mahler-Basis*, falls für alle $n \geq 0$ gilt:

(a) $f_n \in L_n[X]$.

(b) $L_n[X] = \mathcal{O}f_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_n$.

Konstruktion 2.3.2. Sei $m \geq 0$ fest. Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ bezeichne $n = n_0 + n_1 q + \dots + n_f q^f$ ihre q-adische Entwicklung, und sei

$$w_n := \sum_{i=k+m}^{f} n_i \cdot \frac{q^{i-k-m}-1}{q-1},$$

wobei man wie üblich $w_n := 0$ setzt im Falle einer leeren Summe. In [DS16] wird eine Mahler-Basis $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konstruiert mit der Eigenschaft, dass die Familie $(\pi^{w_n}g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis bildet für den Banachraum

$$\mathrm{LA}_{m+k}(\mathcal{O}, L) = \{f\colon \mathcal{O} \longrightarrow L \mid f \text{ ist } L\text{-analytisch auf jeder} \\ \text{abgeschlossenen Kugel mit Radius } |\pi^{m+k}|\}.$$

Siehe (1.8) in §1.2 von [DS16] für die Definition der g_n und (4.5) sowie Prop. 4.2 in §4.2 ebenda für die entsprechende Aussage.

Lemma 2.3.3. *Es gilt* $\varphi^{-m}(\omega_\phi) \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}}$ *für alle* $m \geq 0$.

Beweis. Für $a \in \mathcal{O}$ schreibe $[a]_\phi(X) = \sum_{n\geq 1} a_n X^n$. Die $\mathcal{O}$-Linearität von $\log_{\mathrm{LT}}$ liefert

$$[a]_\phi(X) = \exp_{\mathrm{LT}} \circ \log_{\mathrm{LT}}([a]_\phi(X)) = \exp_{\mathrm{LT}}(a \cdot \log_{\mathrm{LT}}(X)).$$

Aus dieser Gleichheit schließt man $a_n = p_n(a)$ für eine Familie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen über L mit $p_n \in L_n[X]$ für alle $n \geq 1$. Es folgt für alle $\gamma \in \Gamma_L$

$$\gamma(\varphi^{-m}(\omega_\phi)) = \varphi^{-m}(\gamma(\omega_\phi)) = \varphi^{-m}\left(\sum_{n\geq 1} p_n(\chi_L(\gamma)) \cdot \omega_\phi^n\right) = \sum_{n\geq 1} p_n(\chi_L(\gamma)) \cdot \varphi^{-m}(\omega_\phi)^n.$$

Die Orbitabbildung von $\varphi^{-m}(\omega_\phi)$ entspricht der Einschränkung der Funktion

$$\mathcal{O} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_L^J,\ a \longmapsto \sum_{n\geq 1} p_n(a) \cdot \varphi^{-m}(\omega_\phi)^n \tag{1}$$

auf $\mathcal{O}^\times \cong \Gamma_L$, und wir zeigen das Lemma durch den Nachweis, dass (1) ein Element von $\mathrm{LA}_{m+k}(\mathcal{O}, \widetilde{\mathbf{B}}_L^J)$ ist. Wegen $p_n \in L_n[X]$ und da die Familie $(g_i)_{i\geq 0}$ aus 2.3.2 eine Mahler-Basis ist, gibt es $b_{n,i} \in \mathcal{O}$ mit $p_n = \sum_{i=0}^n b_{n,i} g_i$ für alle $n \geq 0$ (wobei wir $p_0 := 0$ setzen). Nun sortieren wir die Reihe (1) um zu

$$\sum_{n=1}^\infty p_n \cdot \varphi^{-m}(\omega_\phi)^n = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{i=0}^n b_{n,i} g_i\right) \cdot \varphi^{-m}(\omega_\phi)^n = \sum_{i=0}^\infty g_i \cdot \left(\sum_{n=i}^\infty b_{n,i} \varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right). \tag{2}$$

Man beachte, dass wegen $b_{n,i} \in \mathcal{O}$ und $\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)\|_J < 1$ der Grenzwert $\sum_{n=i}^\infty b_{n,i}\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n$ in $\widetilde{\mathbf{B}}_L^J$ existiert. Jeder Summand der Funktionenreihe (2) ist als Polynom ein Element in $\mathrm{LA}_{m+k}(\mathcal{O}, \widetilde{\mathbf{B}}_L^J)$, und die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass sie bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{LA}_{m+k}}$ dieses Banachraumes konvergiert. Für alle $n \geq i$ gilt

$$\left\|b_{n,i}\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_J \leq \left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_J \leq \left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^i\right\|_J$$

und mit der verschärften Dreiecksungleichung folgt damit

$$\left\|g_i \cdot \sum_{n=i}^\infty b_{n,i}\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_{\mathrm{LA}_{m+k}} \leq \|g_i\|_{\mathrm{LA}_{m+k}} \cdot \left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^i\right\|_J.$$

Es genügt daher nachzuweisen, dass $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{\mathrm{LA}_{m+k}} \cdot \|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\|_J = 0$ ist. Für $s \in J$ gilt nach Satz 1.3.2(iv) und Folgerung 1.3.9

$$\left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_s = \left\|\omega_\phi^n\right\|_{q^m s} = p^{-\frac{n}{q^m s}}.$$

Wir erhalten damit und wegen $J = [r_j, r_k]$ sowie $q^m r_k = r_{k+m}$

$$\begin{aligned}\left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_J &= \max_{s\in\{r_j,r_k\}} \left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_s = \left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_{r_k}\\ &= \left\|\omega_\phi^n\right\|_{r_{k+m}} = p^{-\frac{n}{r_{k+m}}} = |\pi|^{\frac{n}{r_{k+m}}}\\ &= |\pi|^{\frac{n}{q^{k+m-1}(q-1)}}.\end{aligned}$$

Dabei ist die erste Gleichheit oben das *Maximumsprinzip* [Ber02, Cor. 2.20], siehe auch Konstruktion 1.3.4. Weiter gilt $\|g_n\|_{\mathrm{LA}_{k+m}} = |\pi|^{-w_n}$, da $(\pi^{w_n} g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von LA_{k+m} ist, siehe 2.3.2. Mit $n = n_0 + n_1 q + \ldots + n_f q^f$ folgt schließlich

$$w_n = \sum_{i=k+m}^{f} n_i \frac{q^{i-k-m}-1}{q-1} \leq \sum_{i=k+m}^{f} n_i \frac{q^{i-k-m}}{q-1} = \frac{1}{q^{k+m}(q-1)} \cdot \sum_{i=k+m}^{f} n_i q^i \leq \frac{n}{q^{k+m}(q-1)}.$$

Alles zusammen ergibt

$$\begin{aligned}\|g_n\|_{\mathrm{LA}_{k+m}} \cdot \left\|\varphi^{-m}(\omega_\phi)^n\right\|_J &= |\pi|^{-w_n} \cdot |\pi|^{\frac{n}{q^{k+m-1}(q-1)}}\\ &\leq |\pi|^{n\cdot\left(\frac{1}{q^{k+m-1}(q-1)} - \frac{1}{q^{k+m}(q-1)}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

und damit folgt die Aussage des Lemmas. □

Folgerung 2.3.4. *Es gilt* $\mathbf{B}^J_{L,m} := \varphi^{-m}(\mathbf{B}^{q^m J}_L) \subseteq (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{L\text{-la}}$.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen sei o.B.d.A. $m = 0$. Für den allgemeinen Fall ersetze man im Beweis ω_ϕ durch $\varphi^{-m}(\omega_\phi)$ und verwende die Stetigkeit und L-Linearität von φ^{-m}. Wegen Lemma 2.3.3 ist ω_ϕ lokal L-analytisch, und damit auch ω_ϕ^{-1} nach Lemma 2.1.4(ii). Wir wählen $n \gg 0$ genügend groß, sodass $\omega_\phi, \omega_\phi^{-1} \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$ sind und $\|x\|_J = \|x\|_{\Gamma_n}$ für $x \in \{\omega_\phi, \omega_\phi^{-1}\}$ gilt (s. Bemerkung 2.1.3).
Sei nun $u \in \mathbf{B}^J_{L,0} = \mathbf{B}^J_L$. Dann gibt es eine Laurentreihe $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ mit Koeffizienten $a_i \in L$, die $\lim_{|i|\to\infty} v(a_i) + i/s = \infty$ für alle $s \in J$ erfüllen, sodass

$$u = f(\omega_\phi) = \sum_{i\geq 0} a_i \cdot \omega_\phi^i + \sum_{i\geq 1} a_{-i} \cdot (\omega_\phi^{-1})^i$$

gilt. Diese beiden Potenzreihen konvergieren in $\widetilde{\mathbf{B}}^J_L$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_J$ und damit nach Wahl von n auch bzgl. $\|\cdot\|_{\Gamma_n}$, und weil $(\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$ bzgl. dieser Norm nach Bemerkung 2.1.2 vollständig ist, erhalten wir $u \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$. □

Beispiel 2.3.5. (i) Es gilt $t_\phi = \log_{\mathrm{LT}}(\omega_\phi) \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{L\text{-la}}$.

(ii) Ist $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$ und $f \in L[X]$, so gilt auch $f(x) \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_n\text{-}L\text{-an}}$.

(iii) Wir betrachten die am Ende von Abschnitt 1.1 definierten Minimalpolynome Q_n der Erzeuger ω_n von L_n/L, und schreiben der Einfachheit halber Q_n für das Element $Q_n(\omega_\phi) \in \widetilde{\mathbf{B}}_L^J$. Es gilt $t_\phi/Q_n \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{L\text{-la}}$.

Beweis. Punkt (i) ist klar mit Folgerung 2.3.4, da $t_\phi \in \mathbf{B}_L^J$ ist, und (ii) folgt direkt aus Lemma 2.1.4(i).
Zu (iii). Es gilt $Q_n = [\pi]_\phi^n/[\pi]_\phi^{n-1}$, also folgt unter Ausnutzung der $\mathcal{O}$-Linearität von $\log_{\mathrm{LT}}$

$$\frac{t_\phi}{Q_n} = [\pi]_\phi^{n-1}(\omega_\phi) \cdot \frac{\log_{\mathrm{LT}}(\omega_\phi)}{[\pi]_\phi^n(\omega_\phi)} = \frac{[\pi]_\phi^{n-1}(\omega_\phi)}{\pi^n} \cdot \frac{\log_{\mathrm{LT}}([\pi]_\phi^n(\omega_\phi))}{[\pi]_\phi^n(\omega_\phi)}.$$

Man sieht leicht, dass beide Faktoren Elemente von $\mathbf{B}_L^J$ und damit nach Folgerung 2.3.4 lokal L-analytisch sind. Für den rechten Faktor verwende man, dass $\log_{\mathrm{LT}}(X)/X$ eine Potenzreihe über L ist, die für $|X| < 1$ konvergiert. □

Sei im Folgenden $m_0 \gg 0$ genügend groß, dass t_ϕ und t_ϕ/Q_k in $(\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_{m_0}\text{-}L\text{-an}}$ liegen.

Lemma 2.3.6. *Sei $m \geq m_0$ und $a \in \widetilde{\mathbf{B}}_L^J$, sodass $Q_k \cdot a \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_m\text{-}L\text{-an}}$ ist. Dann gilt bereits $a \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_m\text{-}L\text{-an}}$.*

Beweis. Es gilt $t_\phi \cdot a = (t_\phi/Q_k) \cdot (Q_k a) \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_m\text{-}L\text{-an}}$. Wir berechnen mit Hilfe von Beispiel 1.3.21, Satz 2.2.8 und Beispiel 2.3.5(i), unter Verwendung der Identitäten $\sum_{\sigma\in\Sigma} \nabla_\sigma = 1$ und $\gamma(t_\phi) = \chi_L(\gamma) \cdot t_\phi$

$$\nabla_{\mathrm{id}}(t_\phi) = 1(t_\phi) = \frac{d}{ds} \exp(s) \cdot t_\phi|_{s=0} = \exp(0) \cdot t_\phi = t_\phi.$$

Die Produktregel 2.2.12 liefert somit für alle $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\mathrm{la}}$

$$\nabla_{\mathrm{id}}(t_\phi x) = t_\phi x + t_\phi \nabla_{\mathrm{id}}(x).$$

Iteration dieser Rechnung zeigt, dass $\nabla_{\mathrm{id}}^i(t_\phi a)$ für alle $i \geq 0$ durch t_ϕ teilbar ist, sodass wir für $\gamma \in \Gamma_m$ schreiben können

$$\gamma(t_\phi a) = \sum_{i\geq 0} (\ell\gamma)^i \cdot t_\phi a_i$$

für gewisse $a_i \in \widetilde{\mathbf{B}}_L^J$. Andererseits gilt nach Beispiel 1.3.21

$$\gamma(t_\phi a) = \gamma(t_\phi) \cdot \gamma(a) = \chi_L(\gamma) \cdot t_\phi \cdot \gamma(a),$$

und folglich

$$\gamma(a) = \chi_L(\gamma)^{-1} \cdot \sum_{i\geq 0} (\ell\gamma)^i \cdot a_i$$

für alle $\gamma \in \Gamma_m$ und damit $a \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_m\text{-}L\text{-an}}$. □

Sei für den Rest dieses Abschnittes K/L eine endliche Erweiterung. Um nun für das Intervall $J = [r_j, r_k]$ die Menge der lokal L-analytischen Vektoren in $\widetilde{\mathbf{B}}^J_K$ berechnen zu können, machen wir Gebrauch von den in 1.3.12 betrachteten Abbildungen $\theta \circ \varphi^{-k}$.

Theorem 2.3.7. *Es gilt* $(\widetilde{\mathbf{B}}^J_K)^{L\text{-la}} = \mathbf{B}^J_{K,\infty} := \bigcup_{m\geq 0} \mathbf{B}^J_{K,m}$, *wobei* $\mathbf{B}^J_{K,m} = \varphi^{-m}(\mathbf{B}^{q^m J}_K)$.

Beweis. **Fall 1:** $K = L$. Die Inklusion $\mathbf{B}^J_{L,\infty} \subseteq (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{L\text{-la}}$ gilt nach Folgerung 2.3.4. Umgekehrt sei $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}}$ mit $m \geq m_0$ gegeben. Da wir x durch $\pi^n x$ ersetzen können, sei o.B.d.A. $V(x, J) \geq 0$, d.h. $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^J$. Aufgrund von Bemerkung 1.3.10 hat man $\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} = \widetilde{\mathbf{A}}^+\{\omega_\phi^{r_k}/\pi\}$ und $\widetilde{\mathbf{A}}^J = \widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]}\{\pi/\omega_\phi^{r_j}\}$.
Wir nehmen zunächst $j = k$, d.h. $J = \{r_k\}$ an.[4] Es ist x von der Form $x = \sum_{i\geq 0} a_i(\pi/\omega_\phi^{r_k})^i$, für eine π-adische Nullfolge $(a_i)_{i\geq 0}$ in $\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]}$, weshalb wir für alle $n \geq 1$ ein $k_n \geq 0$ finden mit

$$x_n := \left(\frac{\omega_\phi^{r_k}}{\pi}\right)^{k_n} \cdot x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi^n \widetilde{\mathbf{A}}^J. \qquad (*)$$

Nach Lemma 2.3.3 ist ω_ϕ und damit auch x_n ein Element von $(\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}}$. Die Abbildung $\theta \circ \varphi^{-k} \colon \widetilde{\mathbf{B}}^J \longrightarrow \mathbb{C}_p$ ist G_L-äquivariant und beschränkt sich folglich auf die H_L-Invarianten:

$$\theta \circ \varphi^{-k} \colon \widetilde{\mathbf{B}}^J_L \longrightarrow \widehat{L}_\infty.$$

Siehe Beispiel 2.2.11 für die Identität $\mathbb{C}_p^{H_L} = \widehat{L}_\infty$. Da $\theta \circ \varphi^{-k}$ stetig und L-linear ist, werden Vektoren, die L-analytisch auf Γ_{m+k} sind, auf ebensolche abgebildet. Mit Punkt (iii) in 2.2.11 erhalten wir folglich

$$\theta \circ \varphi^{-k}(x_n) \in \mathcal{O}_{\widehat{L}_\infty}^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}} = \mathcal{O}_{L_{m+k}}.$$

Nach Bemerkung 1.3.12 gilt

$$0 = \theta \circ \varphi^{-(m+k)}(Q_{m+k}(\omega_\phi)) = Q_{m+k}((\theta \circ \varphi^{-k})(\varphi^{-m}(\omega_\phi))),$$

also ist $\theta \circ \varphi^{-k}(\varphi^{-m}(\omega_\phi))$ ein primitives Element für die Erweiterung L_{m+k}/L. Folglich existiert ein $y^{(0)}_{n,0} \in \mathcal{O}[\varphi^{-m}(\omega_\phi)]$ mit $x_n - y^{(0)}_{n,0} \in \ker(\theta \circ \varphi^{-k})$. Bemerkung 1.3.12 liefert ein Element $x_{n,1} \in \widetilde{\mathbf{A}}^J$ mit $x_n - y^{(0)}_{n,0} = (Q_k/\pi) \cdot x_{n,1}$. Wegen Lemma 2.3.3 und Beispiel 2.3.5(ii) hat man $y^{(0)}_{n,0} \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}}$, und Lemma 2.3.6 impliziert daher $x_{n,1} \in (\widetilde{\mathbf{B}}^J_L)^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}}$. Indem wir diese Konstruktion mit $x_{n,1}$ statt x_n wiederholen und iterieren, erhalten wir induktiv eine Folge $(y^{(0)}_{n,i})_{i\geq 0}$ in $\mathcal{O}[\varphi^{-m}(\omega_\phi)] \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^+$, sodass für alle $f \geq 1$ gilt

$$x_n - \sum_{i=0}^{f-1} y^{(0)}_{n,i} \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i \in \ker(\theta \circ \varphi^{-k})^f.$$

[4] die weiter unten gegebene Definition von x_n gemäß dem Beweis von [Ber16, Thm. 4.4] ist nur im Fall $r_j = r_k$ korrekt, weil $\omega_\phi^{r_k}/\pi$ ansonsten kein Element von $\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]}$ ist, siehe auch die Errata von Berger.

Lemma 1.3.13 liefert ein $f^{(0)} \geq 1$, für welches diese Differenz in $\pi\widetilde{\mathbf{A}}^J$ liegt, und mit $(*)$ sowie $Q_k/\pi \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]}$ (vgl. 1.3.12) folgt

$$\begin{aligned} x_n - \sum_{i=0}^{f^{(0)}-1} y_{n,i}^{(0)} \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i &\in (\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi^n \widetilde{\mathbf{A}}^J) \cap \pi\widetilde{\mathbf{A}}^J \\ &= (\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} \cap \pi\widetilde{\mathbf{A}}^J) + \pi^n \widetilde{\mathbf{A}}^J \\ &= \pi\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi^n\widetilde{\mathbf{A}}^J = \pi(\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi^{n-1}\widetilde{\mathbf{A}}^J), \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit klar ist und die zweite nach Lemma 1.3.7 gilt. Wir schreiben nun $x_n - \sum_{i=0}^{f^{(0)}-1} y_{n,i}^{(0)}(Q_k/\pi)^i = \pi x_n^{(1)}$ mit $x_n^{(1)} \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi^{n-1}\widetilde{\mathbf{A}}^J$. Es ist $x_n^{(1)} \in (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{\Gamma_{m+k}\text{-}L\text{-an}}$, weil dasselbe für die x_n, $y_{n,i}^{(0)}$ und Q_k gilt. Anwendung derselben Prozedur auf $x_n^{(1)}$ anstatt x_n liefert eine Folge $(y_{n,i}^{(1)})_{i\geq 0}$ in $\mathcal{O}[\varphi^{-m}(\omega_\phi)]$ und ein $f^{(1)} \geq 1$, sodass die Differenz

$$x_n - \sum_{i=0}^{f^{(0)}-1} y_{n,i}^{(0)} \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i - \sum_{i=0}^{f^{(1)}-1} \pi y_{n,i}^{(1)} \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i = \pi \cdot \left(x_n^{(1)} - \sum_{i=0}^{f^{(1)}-1} y_{n,i}^{(1)} \left(\frac{Q_k}{\pi}\right)^i \right)$$

ein Element von $\pi^2(\widetilde{\mathbf{A}}^{[0,r_k]} + \pi^{n-2}\widetilde{\mathbf{A}}^J)$ ist. Iterieren wir diesen Prozess und setzen $y_{n,i} := \sum_{\nu=0}^{n-1} \pi^\nu y_{n,i}^{(\nu)}$, wobei $y_{n,i}^{(\nu)} := 0$ sei für $i \geq f^{(\nu)}$, sowie $f := \max_\nu f^{(\nu)}$ und $y_n := \sum_{i=0}^{f-1} y_{n,i}(Q_k/\pi)^i$, so folgt

$$x_n - y_n \in \pi^n \widetilde{\mathbf{A}}^J.$$

Schließlich ergibt sich mit $z_n := (\pi/\omega_\phi^{r_k})^{k_n} \cdot y_n$

$$x - z_n = \left(\frac{\pi}{\omega_\phi^{r_k}}\right)^{k_n} \cdot (x_n - y_n) \in \pi^n \widetilde{\mathbf{A}}^J,$$

sodass die Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ π-adisch gegen x konvergiert. Nach Konstruktion gilt $z_n \in \mathbf{A}_{L,m}^J = \varphi^{-m}(\mathbf{A}_L^J)$, und weil $\mathbf{A}_L^J$ bzgl. der π-adischen Topologie vollständig und φ ein Homöomorphismus ist, folgt die Behauptung im Spezialfall $j = k$.
Im allgemeinen Fall haben wir $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{[r_j,r_k]} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^{\{r_k\}}$, und der Spezialfall liefert $x = \varphi^{-m}(f)$ für ein $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\omega_\phi^i \in \mathbf{B}_L^{\{q^m r_k\}}$. Setzen wir $r := q^m r_j$ und $s := q^m r_k$, so folgt $f = \varphi^m(x) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]} \cap \mathbf{B}_L^{\{r\}}$ und wir sind fertig, wenn wir $f \in \mathbf{B}_L^{[r,s]}$ zeigen können.
Für $f^+ := \sum_{i\geq 0} a_i\omega_\phi^i$ und $f^- := \sum_{i<0} a_i\omega_\phi^i$ gilt offensichtlich $f^+ \in \mathbf{B}_L^{[r,s]}$ sowie $f^- \in \mathbf{B}_L^{[s,\infty)}$. Es folgt

$$f^- = f - f^+ \in \widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{[s,\infty)} = \widetilde{\mathbf{B}}^{[r,\infty)},$$

wobei dieser Durchschnitt innerhalb von $\widetilde{\mathbf{B}}^{\{s\}}$ gebildet wird. Mit Lemma 1.3.28(i) erhalten wir

$$f^- \in \widetilde{\mathbf{B}}_L^{[r,\infty)} \cap \mathbf{B}_L^{[s,\infty)} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,s} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}^{\dagger,r}$$

und somit $f \in \mathbf{B}_L^{[r,s]}$, was den Beweis im Fall $K = L$ abschließt.
Fall 2: $K \neq L$. Sei $\mathfrak{B} = (x_1, \ldots, x_d)$ eine Basis von $\mathbf{B}_K^J$ über $\mathbf{B}_L^J$ gemäß Konstruktion 1.3.26. Wir zeigen zuerst die Inklusion $\mathbf{B}_{K,\infty}^J \subseteq (\widetilde{\mathbf{B}}_K^J)^{L\text{-la}}$. Mit $\mathbf{B}_K^J/\mathbf{B}_L^J$ sind auch die Ringerweiterungen $\mathbf{B}_{K,m}^J/\mathbf{B}_{L,m}^J$ endlich, also ist $\mathbf{B}_{K,\infty}^J/\mathbf{B}_{L,\infty}^J$ ganz. Sei $x \in \mathbf{B}_{K,\infty}^J$ und $f = \sum_i a_i X^i \in \mathbf{B}_{L,\infty}^J[X]$ ein normiertes Polynom minimalen Grades, das x als Nullstelle hat. Für $\gamma \in \Gamma_K$ setzen wir $f^\gamma := \sum_i \gamma(a_i) X^i$. Nach dem Fall $L = K$ sind für genügend große n alle $a_i \in \mathbf{B}_{L,\infty}^J$ global L-analytisch auf Γ_n. Nun wähle man $m \gg 0$ genügend groß, dass $x \in \mathbf{B}_{K,m}^J$ und $f \in \mathbf{B}_{L,m}^J[X]$ gilt.[5] Wir erhalten eine in beiden Komponenten lokal-analytische Funktion

$$F\colon \Gamma_K \times \mathbf{B}_{K,m}^J \longrightarrow \mathbf{B}_{K,m}^J,\ (\gamma, y) \longmapsto f^\gamma(y).$$

Es gilt $F(\mathrm{id}, x) = f(x) = 0$ und $\partial F/\partial Y(\mathrm{id}, x) = f'(x) \neq 0$, daher liefert die lokal-analytische Variante des Satzes über implizite Funktionen[6] ein $n \gg 0$ und eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbf{B}_{K,m}^J$, sodass der Durchschnitt $(\Gamma_n \times U) \cap F^{-1}(0)$ Graph einer lokal L-analytischen Funktion $g\colon \Gamma_n \longrightarrow U$ ist. Wegen $F(\gamma, \gamma(x)) = f^\gamma(\gamma(x)) = \gamma(f(x)) = 0$ für alle γ stimmt g mit der Orbitabbildung von x überein, womit $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_K^J)^{L\text{-la}}$ folgt.
Schließlich gilt $\widetilde{\mathbf{B}}_K^J = \bigoplus_{i=1}^d \widetilde{\mathbf{B}}_L^J \cdot x_i$, und da nach dem eben Gezeigten die x_i lokal L-analytisch sind, erhalten wir mit Satz 2.1.5 und Bemerkung 2.2.3 sowie dem Fall $K = L$ oben

$$(\widetilde{\mathbf{B}}_K^J)^{L\text{-la}} = \bigoplus_{i=1}^d (\widetilde{\mathbf{B}}_L^J)^{L\text{-la}} \cdot x_i = \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{B}_{L,\infty}^J \cdot x_i = \mathbf{B}_{K,\infty}^J.$$

□

Wir fixieren nun $j \gg 0$ und setzen $J_k := [r_j, r_k]$ mit variierendem $k \geq j$. Nach Konstruktion der Periodenringe aus Abschnitt 1.3.3 ist $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r_j}$ die Vervollständigung von $\widetilde{\mathbf{B}}_{[\varpi]}^+$ für die durch $\{V(-, J_k)\}_{k \geq j}$ definierte lokal-konvexe Topologie, sodass

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r_j} = \varprojlim_{k \geq j} \widetilde{\mathbf{B}}^{J_k} \quad \text{und damit} \quad \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger, r_j} = \varprojlim_{k \geq j} \widetilde{\mathbf{B}}_K^{J_k}$$

gilt. Ebenso hat man $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger, r_j} = \varprojlim_k \mathbf{B}_K^{J_k}$ für $j \gg 0$ (s. 1.3.26). Da φ^{-n} für jedes $n \geq 0$ ein topologischer Isomorphismus ist, erhalten wir $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,n}^{\dagger, r_j} = \varprojlim_k \mathbf{B}_{K,n}^{J_k}$.
Mit Hilfe unserer Ergebnisse über $(\widetilde{\mathbf{B}}_K^{J_k})^{L\text{-la}}$ berechnen wir nun die L-pro-analytischen Vektoren in $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger, r_j}$.

Satz 2.3.8. *Es gilt* $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger, r_j})^{L\text{-pa}} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,\infty}^{\dagger, r_j}$, *insbesondere hat man*

$$(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger})^{L\text{-pa}} = \bigcup_{r \gg 0} (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger, r})^{L\text{-pa}} = \bigcup_{r \gg 0} \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,\infty}^{\dagger, r} =: \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,\infty}^{\dagger}.$$

[5] man beachte, dass $\mathbf{B}_{K,m}^J$ ein Banachraum und $\mathbf{B}_{K,\infty}^J$ lediglich ein LB-Raum ist.
[6] dieser folgt aus dem Satz über inverse Funktionen [Sch11, Prop. 6.4].

Beweis. Die Inklusion „$\supseteq$“ ist klar, denn jedes Element aus der rechten Seite liegt in $\mathbf{B}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},K,m} = \varprojlim_k \mathbf{B}^{J_k}_{K,m}$ für ein $m \geq 0$ und ist wegen Theorem 2.3.7 somit L-pro-analytisch.
Für die Umkehrung sei zunächst $K = L$ und $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},L})^{L\text{-pa}}$. Wir fixieren ein $k > j$. Nach Theorem 2.3.7 liegt das Bild x_k von x unter der kanonischen Abbildung $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},L} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{J_k}_L$ in $\mathbf{B}^{J_k}_{L,m}$ für ein $m \geq 0$.
Wir zeigen, dass für jeden Index $\ell \geq k$ ebenfalls $x_\ell \in \mathbf{B}^{J_\ell}_{L,m}$ für dasselbe m gilt, denn dann folgt $x \in \varprojlim_{\ell \geq k} \mathbf{B}^{J_\ell}_{L,m} = \mathbf{B}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},L,m}$ und damit die Behauptung für $L = K$.
Da die Übergangsabbildungen $\widetilde{\mathbf{B}}^{J_\ell}_L \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{J_k}_L$ des projektiven Limes Inklusionen sind, können wir $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},L} = \bigcap_{\ell \geq k} \widetilde{\mathbf{B}}^{J_\ell}_L$ schreiben und x mit den x_ℓ identifizieren. Für $\ell \geq k$ hat man a priori $x \in \mathbf{B}^{J_\ell}_{L,m(\ell)}$ für ein $m(\ell) \geq m$. Nach [FX13, §2] (siehe auch [CC98, §I.5]) gibt es für jedes $I \subseteq (1, \infty)$ einen Homomorphismus $\psi \colon \mathbf{B}^{qI}_L \longrightarrow \mathbf{B}^I_L$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Nun gilt nach Wahl von m und $m(\ell)$

$$\varphi^m(x) \in \mathbf{B}^{q^m J_k}_L \quad \text{sowie} \quad \varphi^{m(\ell)}(x) \in \mathbf{B}^{q^{m(\ell)} J_\ell}_L \subseteq \mathbf{B}^{q^{m(\ell)} J_k}_L.$$

Ersteres erlaubt uns, durch Anwendung von ψ auf dem Level von J_k

$$\varphi^m(x) = \psi^{m(\ell)-m} \circ \varphi^{m(\ell)-m} \circ \varphi^m(x) = \psi^{m(\ell)-m}(\varphi^{m(\ell)}(x))$$

zu schreiben, und zweiteres imliziert $\varphi^m(x) \in \mathrm{im}(\psi^{m(\ell)-m} \colon \mathbf{B}^{q^{m(\ell)} J_\ell}_L \longrightarrow \mathbf{B}^{q^m J_\ell}_L)$ und folglich $x \in \mathbf{B}^{J_\ell}_{L,m} = \varphi^{-m}(\mathbf{B}^{q^m J_\ell}_L)$.
Ist schließlich K allgemein, so hat man $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},K} = \bigoplus_{i=1}^d \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_j}_{\mathrm{rig},L} \cdot x_i$ für eine Basis $x_1, \ldots, x_d$ von $\mathbf{B}^{\dagger,r_j}_K / \mathbf{B}^{\dagger,r_j}_L$ gemäß Satz 1.3.25. Die x_i sind L-pro-analytisch als Elemente von $\mathbf{B}^{\dagger,r_j}_K$, und die Behauptung folgt nun aus dem Fall $K = L$ und Folgerung 2.1.7. $\square$

2.4 Der Monodromiesatz

Sei K/L eine endliche Erweiterung. Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des Monodromiesatzes 2.4.9 (Theorem 6.1 in [Ber16]), der später benötigt wird, um das entscheidende Theorem 3.4.6 zur Überkonvergenz L-analytischer Darstellungen einzusehen.

Wir fixieren etwas Notation: Jedes $\sigma \in \Sigma = \{\mathbb{Q}_p\text{-Einbettungen } L \hookrightarrow E\}$ beschränkt sich zu einem Automorphismus der maximal unverzweigten Teilerweiterung L^{ur} von $L/\mathbb{Q}_p$, da diese galoissch über $\mathbb{Q}_p$ ist, und induziert folglich einen Automorphismus $\overline{\sigma}$ des Restklassenkörpers $\kappa = \kappa_L$, also eine Potenz des p-Frobenius $\varphi_p \colon x \longmapsto x^p$ auf κ. Sei $\widetilde{n}(\sigma) \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\overline{\sigma} = \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)}$$

gilt. Diese Zahl ist eindeutig modulo (h), wobei $q = p^h$ ist, und wir wählen $\widetilde{n}(\sigma)$ als den Vertreter in $\{0, \ldots, h-1\}$. Weiter definieren wir die Menge

$$\mathfrak{Z} := \{(g, n) \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Z} \mid \widetilde{n}(g|_L) \equiv n \mod h\},$$

deren Elemente wir meist als $g = (g, n(g))$ schreiben. Für Polynome – oder allgemein für Laurentreihen $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k$ mit $a_k \in L$ – sei $f^\sigma := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(a_k) X^k$ für $\sigma \in \Sigma$.
Für die in Kapitel 1 definierten Teilringe sowie deren Vervollständigungen B von $\widetilde{\mathbf{B}}$ topologisieren wir die E-Vektorräume $E \otimes_L B$ wie folgt: Ist B ein Banachraum (wie etwa $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ oder $\mathbf{B}_K^I$), so definieren wir für $x \in E \otimes_L B$

$$\|x\| := \inf \left\{ \max_{i=1,\dots,n} |e_i| \cdot \|b_i\| \mid x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_i,\ e_i \in E, b_i \in B \right\}.$$

Dies ist eine Norm nach [Sch02, Prop. 17.4ii.], und die davon induzierte Topologie auf $E \otimes_L B$ stimmt mit der induktiven bzw. projektiven Tensorprodukt-Topologie überein, siehe Prop. 17.6 sowie den darauf folgenden Absatz ebenda.
Wegen $\dim_L E < \infty$ ist $E \otimes_L B$ als normierter L-Vektorraum vollständig, und weil die oben definierte Norm offensichtlich mit dem Betrag von E verträglich ist, wird $E \otimes_L B$ damit zu einem Banachraum über E. Für die Fréchet- und LF-Räume B über L aus Abschnitt 1.3 erhalten wir dann in naheliegender Weise entsprechende Topologien auf den E-Vektorräumen $E \otimes_L B$. Weiter setzen sich der Frobenius und die Galois-Wirkung E-linear und stetig auf $E \otimes_L B$ fort.

Konstruktion 2.4.1. (a) **Die Elemente** y_σ, t_σ. In 1.2.7 haben wir das Element

$$\omega_\phi \in \widetilde{\mathbf{A}}^+ = W_L(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})$$

eingeführt. Sei $\sigma \in \Sigma$. Wir betrachten die Homomorphismen von $\mathbb{Z}_p$-Moduln

$$\sigma \colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_E \quad \text{und} \quad \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)} \colon W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \longrightarrow W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}). \tag{1}$$

Auf dem Ganzheitsring $\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}$ der maximal unverzweigten Teilerweiterung von $L/\mathbb{Q}_p$, aufgefasst als „unverzweigte Wittvektoren“ $\mathcal{O}^{\mathrm{ur}} = W(\kappa_L) \subseteq W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat})$, wirkt $\varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)}$ als $\sigma|_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}}$ nach Definition von $\widetilde{n}(\sigma)$, sodass die Abbildungen (1) beide σ-semilinear über $\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}$ sind. Dies liefert eine σ-semilineare Abbildung von $\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}$-Moduln

$$\sigma \otimes \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)} \colon \widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \longrightarrow \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}).$$

Wir setzen $y_\sigma := (\sigma \otimes \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)})(\omega_\phi)$. Via der Isomorphie

$$\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \cong (\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \cong \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{\mathbf{A}}^+$$

hat man $y_\sigma \in \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{\mathbf{A}}^+$. Da die G_L-Operation mit dem p-Frobenius kommutiert, gilt sogar $y_\sigma \in \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{\mathbf{A}}_L^+$. Unter Verwendung der Eigenschaften von ω_ϕ sieht man leicht, dass die Elemente y_σ den Gleichungen

$$\gamma(y_\sigma) = [\chi_L(\gamma)]_\phi^\sigma(y_\sigma) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma_L \quad \text{und} \quad \varphi(y_\sigma) = [\pi]_\phi^\sigma(y_\sigma)$$

genügen. Schließlich definieren wir

$$t_\sigma := \log_{\mathrm{LT}}^\sigma(y_\sigma) = (\sigma \otimes \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)})(t_\phi),$$

wobei $t_\phi = \log_{\mathrm{LT}}(\omega_\phi)$ ist, siehe Beispiel 1.3.21. Man hat

$$\gamma(t_\sigma) = \sigma(\chi_L(\gamma)) \cdot t_\sigma \quad \text{sowie} \quad \varphi(t_\sigma) = \sigma(\pi) \cdot t_\sigma,$$

und aus Bemerkung 1.1.8 folgt außerdem $t_\sigma = y_\sigma \cdot \prod_{k\geq 1}(Q_k^\sigma(y_\sigma)/\sigma(\pi))$.

(b) **Die Abbildungen** ι_g. Sei $g = (g, n(g)) \in \mathfrak{Z}$. Wir modifizieren die in Konstruktion 1.3.11 definierte Einbettung $\iota_0'\colon W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ zu einer g^{-1}-semilinearen Abbildung

$$\iota_g' := g^{-1} \otimes (\iota_0' \circ \varphi_p^{-n(g)})\colon \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \longrightarrow E \otimes_L \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+,$$

die sich auf die Ringe $E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^+ \subseteq E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}_{[\varpi]}^+$ fortsetzt und offensichtlich G_L-äquivariant ist.
Für jedes kompakte Intervall $I \subseteq (0,\infty)$ mit $p^{n(g)}(q-1)/q \in I$ (vgl. 1.3.11) erhalten wir durch stetige Fortsetzung von ι_g' einen g^{-1}-semilinearen und G_L-äquivarianten Homomorphismus von E-Algebren

$$\iota_g\colon E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow E \otimes_L \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+.$$

Lemma 2.4.2. *Es seien $g \in \mathfrak{Z}$ und $I \subseteq (1,\infty)$ mit $p^{n(g)}(q-1)/q \in I$. Für $\sigma := g|_L$ gelte weiter $n(g) = \widetilde{n}(\sigma) + kh$. Dann folgt* $\ker(\theta \circ \iota_g\colon E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow E \otimes_L \mathbb{C}_p) = Q_k^\sigma(y_\sigma) \cdot E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I$.

Beweis. Man hat auf einer dichten Teilmenge von $E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I$ wegen $p^h = q$

$$\iota_g(x) = (g^{-1} \otimes \varphi_p^{-n(g)})(x) = \varphi^{-k} \circ (g^{-1} \otimes \varphi_p^{-\widetilde{n}(\sigma)})(x),$$

und weil $\ker(\theta \circ \varphi^{-k}) = Q_k \cdot E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I$ nach Bemerkung 1.3.12 gilt, folgt damit

$$\ker(\theta \circ \iota_g) = (g \otimes \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)})(\ker(\theta \circ \varphi^{-k})) = (\sigma \otimes \varphi_p^{\widetilde{n}(\sigma)})(Q_k) \cdot E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I = Q_k^\sigma(y_\sigma) \cdot E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I.$$

□

Lemma 2.4.3. *Für $a \in \mathcal{O}$ hat man*

$$[1+a]_\phi(X) - X = q_1(X) \cdot a + q_2(X) \cdot a^2 + \dots$$

mit gewissen $q_i(X) \in L[[X]]$. Dabei gilt speziell für q_1

$$q_1(X) = \log_{\mathrm{LT}}(X) \cdot \frac{\partial F(X,Y)}{\partial Y}(X,0),$$

wobei F das am Ende von Abschnitt 1.1 fixierte Lubin-Tate-Gruppengesetz bezeichnet.

Beweis. Da die Abbildung $a \longmapsto [a]_\phi$ ein Ringhomomorphismus ist, gilt

$$[1+a]_\phi(X) = F(X, [a]_\phi(X)) = F(X, \exp_{\mathrm{LT}}(a \cdot \log_{\mathrm{LT}}(X))). \tag{1}$$

Die Potenzreihe $\exp_{\mathrm{LT}}(X) \in XL[[X]]$ hat linearen Koeffizienten 1, sodass sich

$$\exp_{\mathrm{LT}}(a \log_{\mathrm{LT}}(X)) = a \log_{\mathrm{LT}}(X) + \text{Terme höheren Grades in } a$$

ergibt. Entwickeln wir nun den Ausdruck (1) als Reihe in a, so tritt a genau bei den Summanden von $\partial F/\partial Y(X,0)$ als linearer Term auf, und folglich erhalten wir

$$[1+a]_\phi(X) - X = a \cdot \log_{\mathrm{LT}}(X) \cdot \frac{\partial F(X,Y)}{\partial Y}(X,0) + \text{Terme höheren Grades in } a.$$

□

Sei nun $r > 1$. Für $\sigma \in \Sigma$ fassen wir y_σ als Element von $E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ auf.

Lemma 2.4.4. *Seien $\sigma, \tau \in \Sigma$, und bezeichne $v_\sigma := (\partial F/\partial Y)^\sigma(y_\sigma, 0)$. Dann gilt*

$$\nabla_\tau(y_\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \sigma \neq \tau, \\ t_\sigma \cdot v_\sigma, & \text{falls } \sigma = \tau. \end{cases}$$

Beweis. Wegen der lokalen L-Analytizität von ω_ϕ hat man für $\gamma \in \Gamma_n$, $n \gg 0$ eine Reihenentwicklung $\gamma(\omega_\phi) = \sum_{k\geq 0} (\ell\gamma)^k \cdot y_k$ mit $y_k \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. Somit erhalten wir, da Frobenius und Γ_K-Operation kommutieren, für die Orbitabbildung von y_σ die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \gamma(y_\sigma) &= (\mathrm{id} \otimes \gamma) \circ (\sigma \otimes \varphi_p^{n(\sigma)})(\omega_\phi) = (\sigma \otimes \varphi_p^{n(\sigma)})(\gamma(\omega_\phi)) \\ &= (\sigma \otimes \varphi_p^{n(\sigma)}) \left(\sum_{k\geq 0} (\ell\gamma)^k y_k \right) = \sum_{k \geq 0} (\sigma(\ell\gamma))^k \cdot (\sigma \otimes \varphi_p^{n(\sigma)})(y_k). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der Taylorentwicklung (**T**) aus Abschnitt 2.2 liefert wie in Satz 2.2.8 die σ-Analytizität von y_σ, d.h. $\nabla_\tau(y_\sigma) = 0$ für $\tau \neq \sigma$.
Zur Berechnung von $\nabla_\sigma(y_\sigma)$ beachte man, dass $1 = \sum_\tau \nabla_\tau$ in $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$, gilt (vgl. 2.2.6), und folglich

$$\nabla_\sigma(y_\sigma) = 1(y_\sigma) = \frac{d}{dt} \exp(t)(y_\sigma)|_{t=0}.$$

Für $t \in \mathbb{Z}_p$ klein genug setzen wir $\gamma_t := \exp(t) \in \Gamma_K$. Unter der Identifikation $\Gamma_L = \mathcal{O}^\times \subseteq \mathcal{O}$ via χ_L ist exp die gewöhnliche Exponentialfunktion, insbesondere ist dann t ein Teiler von $\gamma_t - 1$ und $\lim_{t\to 0}(\gamma_t - 1)/t = 1$ in $\mathcal{O}$. In der Notation von Lemma 2.4.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma(y_\sigma) &= \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_t(y_\sigma) - y_\sigma}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{[1 + (\gamma_t - 1)]^\sigma(y_\sigma) - y_\sigma}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\left(\frac{\gamma_t - 1}{t} \right) \cdot q_1^\sigma(y_\sigma) + t \cdot \sum_{i \geq 2} q_i^\sigma(y_\sigma) \cdot \frac{(\gamma_t - 1)^i}{t^2} \right] \\ &= \log^\sigma_{\mathrm{LT}}(y_\sigma) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^\sigma (y_\sigma, 0) \\ &= t_\sigma \cdot v_\sigma. \end{aligned}$$

□

Konstruktion 2.4.5 (Die Operatoren ∂_σ). Es ist $v_\sigma \in E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ eine Einheit als Potenzreihe in der Variable y_σ mit Koeffizienten in $\sigma(\mathcal{O})$ und konstantem Term 1 (man beachte, dass t_σ keine Einheit ist). Wir definieren

$$\partial_\sigma := t_\sigma^{-1} v_\sigma^{-1} \cdot \nabla_\sigma \colon (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} \longrightarrow t_\sigma^{-1} \cdot (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}.$$

Die Operatoren $(\partial_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ setzen sich auf $E \otimes_L (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} = \bigcup_r E \otimes_L (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ fort und erfüllen für $\sigma, \tau \in \Sigma$:

(a) $\partial_\sigma(y_\tau) = \delta_{\sigma,\tau}$, wobei $\delta_{\sigma,\tau}$ das *Kronecker-Delta* bezeichnet.

(b) $\partial_\sigma \circ \partial_\tau = \partial_\tau \circ \partial_\sigma$.

(c) $\partial_\sigma(xy) = x \cdot \partial_\sigma(y) + \partial_\sigma(x) \cdot y$.

Schließlich bemerken wir, dass für jedes abgeschlossene Intervall $I \subseteq (1, \infty)$ die ∂_σ auch als Operatoren auf $(E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{I}_{K})^{\mathrm{la}}$ wohldefiniert sind.

Lemma 2.4.6. *Sei $I \subseteq (1,\infty)$ ein kompaktes Intervall und M ein endlich erzeugter freier $E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{I}_{K}$-Modul. Weiter sei $\sigma \in \Sigma$ und $x \in M$ ein Element, das für $m \gg 0$ durch $Q^\sigma_m(y_\sigma)$ teilbar ist, d.h. es gibt ein $z_m \in M$ mit $x = Q^\sigma_m(y_\sigma) \cdot z_m$. Dann ist x in M durch $t_\sigma = y_\sigma \cdot \prod_{m\geq 1} Q^\sigma_m(y_\sigma)/\sigma(\pi)$ teilbar, d.h. $x = t_\sigma \cdot z$ für ein $z \in M$.*

Beweis. Man argumentiere wie im Beweis von [Ber02, Lem. 4.6]. □

Lemma 2.4.7. *Es gilt $\nabla_\sigma((E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}) \subseteq t_\sigma \cdot (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ und folglich*

$$\partial_\sigma((E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}) \subseteq (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$$

für alle $\sigma \in \Sigma$.

Beweis. Für $x \in (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ ist zu zeigen, dass $\nabla_\sigma(x)$ in $(E \otimes_K \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ durch t_σ teilbar ist. Wegen $(E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} = E \otimes_L (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} = \bigcup_r E \otimes_L (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ können wir $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ für ein $r \gg 0$ annehmen. Man wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $p^n(q-1)/q \geq r$ gilt für $n := \widetilde{n}(\sigma) + mh$, und es sei $g \in \mathfrak{Z}$ mit $g|_L = \sigma$ und $n(g) = n$. Weiter fixieren wir eine unbeschränkte Folge

$$p^n(q-1)/q \leq s_1 < s_2 \ldots$$

und setzen $J_i := [r, s_i]$. Dann gilt $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} = \varprojlim_{i\geq 1} \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_{K}$, und nach Wahl von n ist für alle i die Abbildung $\iota_g \colon E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i} \longrightarrow E \otimes_L \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ wohldefiniert (s. Konstruktion 2.4.1(b)). Weil ι_g und θ äquivariant für die G_K-Wirkung sind, beschränkt sich ihre Komposition zu einer Abbildung der H_K-Invarianten

$$\theta \circ \iota_g \colon E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_{K} \longrightarrow E \otimes_L \widehat{K}_\infty.$$

Für die Gleichheit $\mathbb{C}_p^{H_K} = \widehat{K}_\infty$ siehe Beispiel 2.2.11. Wegen $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ ist sein Bild $x_i \in \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K$ unter der kanonischen Projektion ein Element von $(\widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K)^{\mathrm{la}}$. Da $\theta \circ \iota_g$ stetig und $\mathbb{Q}_p$-linear ist und mit Γ_K vertauscht, folgt $\theta \circ \iota_g(x_i) \in E \otimes_L (\widehat{K}_\infty)^{\mathrm{la}}$. Lemma 2.2.15 und Beispiel 2.2.11 liefern wegen $g|_L = \sigma$

$$\theta \circ \iota_g(\nabla_\sigma(x_i)) = \nabla_{\mathrm{id}}(\theta \circ \iota_g(x_i)) = 0,$$

und mit Lemma 2.4.2 folgt, dass $\nabla_\sigma(x_i)$ in $E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K$ durch $Q^\sigma_m(y_\sigma)$ teilbar ist für alle $m \gg 0$. Lemma 2.4.6 liefert $\nabla_\sigma(x_i) \in t_\sigma \cdot E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K$. Die Γ_K-Operation von $E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K$ setzt sich wegen $\gamma(t_\sigma) = \sigma(\chi_L(\gamma)) \cdot t_\sigma$ auf die Lokalisierung nach t_σ fort, und aus Lemma 2.1.4 folgt, dass $t_\sigma^{-1} \cdot \nabla_\sigma(x_i)$ lokal-analytisch ist. Somit ist $\nabla_\sigma(x_i)$ in $(E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K)^{\mathrm{la}}$ durch t_σ teilbar, was

$$\nabla_\sigma(x) = (\nabla_\sigma(x_i))_{i\geq 1} \in t_\sigma \cdot (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$$

impliziert. □

Konstruktion 2.4.8. Sei $I \subseteq (0,\infty)$ ein abgeschlossenes Intervall und $\Sigma_0 := \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Wir wollen für alle $n \in \mathbb{N}$ „Variablentupel" $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}_{n,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_0}$ mit $\mathfrak{Y}_{n,\sigma} \in \pi^n \cdot (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I_K)^{\mathrm{la}}$ erklären, auf denen sich ∂_σ wie die gewöhnliche partielle Ableitung in Richtung des Index' $\sigma \in \Sigma_0$ verhält.[7]
Für $\sigma \in \Sigma_0$ betrachten wir die Elemente $y_\sigma \in \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_L} \widetilde{\mathbf{A}}^+_L$ aus 2.4.1. Nach Lemma 1.3.14 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_{\sigma,n} \in \mathcal{O}_E[\varphi^{-k_n}(\omega_\phi)]$ mit $y_\sigma - y_{n,\sigma} \in \pi^n \cdot \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{\mathbf{A}}^I_L$. Man setze nun

$$\mathfrak{Y}_{n,\sigma} := y_\sigma - y_{n,\sigma} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Y}_n := (\mathfrak{Y}_{n,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_0}.$$

Wir verwenden die Konventionen für Multiindizes aus Abschnitt 2.1 und setzen außerdem $\mathfrak{e}_\sigma := (\delta_{\sigma,\tau})_{\tau\in\Sigma_0} \in \mathbb{N}_0^{\Sigma_0}$.
Aus Lemma 2.3.3 und Satz 2.2.8 folgt $\partial_\sigma(y_{n,\tau}) = 0$, und laut Konstruktion 2.4.5(a) hat man $\partial_\sigma(y_\tau) = \delta_{\sigma,\tau}$ für alle $\sigma,\tau \in \Sigma_0$. Damit ergeben sich, unter Verwendung der Produktregel 2.4.5(c), für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_\sigma)_\sigma \in \mathbb{N}_0^{\Sigma_0}$ die gewünschten Identitäten

$$\partial_\sigma(\mathfrak{Y}_n^\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha_\sigma = 0, \\ \alpha_\sigma \cdot \mathfrak{Y}_n^{\alpha-\mathfrak{e}_\sigma}, & \text{falls } \alpha_\sigma \geq 1. \end{cases}$$

Weiter gibt es nach Bemerkung 2.1.3 ein $m_0 \geq 1$, sodass $\mathfrak{Y}_{n,\sigma} = y_\sigma - y_{n,\sigma} \in (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I_L)^{\Gamma_m\text{-an}}$ sowie

$$\|\mathfrak{Y}_{n,\sigma}\|_{\Gamma_m} = \|\mathfrak{Y}_{n,\sigma}\|_I \leq \|\pi^n\|_I = p^{-n}$$

für alle $m \geq m_0$ gilt.

[7] in [Ber16] werden die $\mathfrak{Y}_n$ als $\mathbf{y} - \mathbf{y}_n$ geschrieben; sie finden dort außerdem Verwendung in Theorem 5.4, wo bewiesen wird, dass sich jedes Element $x \in (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I_K)^{\mathrm{la}}$ für $n \gg 0$ schreiben lässt als Potenzreihe $x = \sum_\alpha x_\alpha \cdot \mathfrak{Y}_n^\alpha$ mit $x_\alpha \in (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I_K)^{L\text{-la}}$.

Sei nun M ein freier $(E\otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$-Modul vom Rang d, versehen mit einem bijektiven φ-semilinearen Endomorphismus $\varphi_M\colon M \longrightarrow M$ und einer mit φ_M kommutierenden, pro-analytischen und semilinearen Γ_K-Operation.[8] Wir fixieren eine Basis $\mathfrak{B} = (x_1, \dots, x_d)$ von M und setzen für $r > 1$

$$M^r := \bigoplus_{i=1}^{d} (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} \cdot x_i.$$

Weiter nehmen wir an, dass ein $r_0 \gg 1$ existiert, sodass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi_M) \in \mathrm{GL}_d((E\otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_0}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}})$ gilt und sich für alle $r \geq r_0$ die Γ_K-Wirkung auf M^r beschränkt, sodass

$$M \cong (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} \otimes_{(E\otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}} M^r$$

als Isomorphie von (φ, Γ_K)-Moduln gilt.

Theorem 2.4.9 (Monodromiesatz). *Sei M wie oben und gelte $\partial_\sigma(M) \subseteq M$ für alle $\sigma \in \Sigma_0 = \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Dann ist*

$$\mathrm{Sol}(M) := \{x \in M \mid \partial_\sigma(x) = 0 \text{ für alle } \sigma \in \Sigma_0\}$$

ein freier $(E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}$-Modul vom Rang d, der stabil unter Γ_K ist und auf den sich φ_M zu einer Bijektion einschränkt. Weiter gilt

$$M = (E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} \otimes_{(E\otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}} \mathrm{Sol}(M).$$

Beweis. Zunächst ist klar, dass sich φ_M und die Γ_K-Wirkung auf $\mathrm{Sol}(M)$ einschränken, da beide mit der Wirkung von $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ und daher mit den Operatoren $(\partial_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_0}$ kommutieren, vgl. die Rechnung am Ende von Bemerkung 2.2.6.
Um die Notation für den Beweis zu vereinfachen, sei $\widetilde{\mathscr{B}} := E\otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ und $\widetilde{\mathscr{B}}^r := E\otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ für $r \geq r_0$. Es genügt zu zeigen, dass M eine Basis $\mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_d)$ besitzt, die in $\mathrm{Sol}(M)$ enthalten ist. Dann hat man nämlich offensichtlich

$$\mathrm{Sol}(M) \supseteq \bigoplus_{i=1}^{d} \widetilde{\mathscr{B}}^{L\text{-pa}} \cdot e_i,$$

und die umgekehrte Inklusion gilt ebenfalls, denn schreiben wir $x \in \mathrm{Sol}(M)$ als Linearkombination $x = \sum_i a_i \cdot e_i$ mit Koordinaten $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_i \in (\widetilde{\mathscr{B}}^r)^{\mathrm{pa}}$ für ein $r \geq r_0$, so folgt wegen $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(\partial_\sigma) = 0$ und Bemerkung 2.2.13 für die Koordinaten von $\partial_\sigma(x)$ bzgl. $\mathfrak{E}$

$$0 = \partial_\sigma(a) + \mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(\partial_\sigma) \cdot a = \partial_\sigma(a),$$

d.h. $\partial_\sigma(a_i) = 0$ für alle $\sigma \neq \mathrm{id}$ und folglich $a_i \in (\widetilde{\mathscr{B}}^r)^{L\text{-pa}}$ für alle i nach Satz 2.2.17. Somit ist $\mathrm{Sol}(M)$ in diesem Fall ein freier $\widetilde{\mathscr{B}}^{L\text{-pa}}$-Modul mit Basis $\mathfrak{E}$, der $\widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{pa}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}^{L\text{-pa}}} \mathrm{Sol}(M) = M$

[8] insbesondere ist M ein (φ, Γ_K)-*Modul* über $(E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$ im Sinne von Definition 3.1.1.

erfüllt.
Wir fixieren nun ein $r \geq r_0$. Für kompakte Teilintervalle $I \subseteq [r, \infty)$ schreiben wir $\widetilde{\mathscr{B}}_I := E \otimes_L \widetilde{\mathbf{B}}^I_K$. Es ist M^r ein freier $(\widetilde{\mathscr{B}}^r)^{\mathrm{pa}}$-Modul mit der oben eingeführten Basis $\mathfrak{B} = (x_1, \dots, x_d)$. Für jedes $s > r$ mit $I \subseteq [r, s]$ hat man Abbildungen (s. Bemerkung 1.3.6)

$$(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} = (\varprojlim_{t \geq r} \widetilde{\mathbf{B}}^{[r,t]}_K)^{\mathrm{pa}} \longrightarrow (\widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}_K)^{\mathrm{la}} \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{B}}^I_K)^{\mathrm{la}},$$

und die Komposition hängt nicht von der Wahl von s ab, sodass wir einen kanonischen Homomorphismus $(\widetilde{\mathscr{B}}^r)^{\mathrm{pa}} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I$ erhalten. Man betrachte den freien $\widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I$-Modul

$$M_I := \widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{pa}}_r} M^r = \bigoplus_{i=1}^d \widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I \cdot x_i,$$

und schreibe $D_\sigma := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\partial_\sigma) \in (\widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I)^{d \times d}$ für die Darstellungsmatrix des Operators ∂_σ auf M_I bzgl. $\mathfrak{B}$.
Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

(i) Für jedes kompakte Intervall $I \subseteq [r, \infty)$ ist $\mathrm{Sol}(M_I) = \bigcap_{\sigma \neq \mathrm{id}} \ker(\partial_\sigma)$ ein freier $\widetilde{\mathscr{B}}^{L\text{-la}}_I$-Modul vom Rang d mit

$$M_I = \widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}^{L\text{-la}}_I} \mathrm{Sol}(M_I). \tag{1}$$

(ii) Wir fixieren ein Intervall der Form $I := [r, s]$ mit $I \cap qI \neq \varnothing$ und konstruieren eine Basis $\mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_d)$ von M^r, die für alle $k \geq 0$ auch eine Basis für $\mathrm{Sol}(M_{q^k I})$ bildet. Diese wird die gewünschte Basis für $\mathrm{Sol}(M)$ sein.

Zu (i). Wie oben überlegt man sich, dass die Behauptung folgt, wenn wir eine Basis $\mathfrak{C} = (v_1, \dots, v_d)$ von M_I finden, die in $\mathrm{Sol}(M_I)$ enthalten ist. Die Elemente von $\mathfrak{C}$ liegen wegen Bemerkung 2.2.13 genau dann in $\mathrm{Sol}(M_I)$, wenn die Basiswechselmatrix S von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ für alle $\sigma \in \Sigma_0$ der Gleichung

$$\partial_\sigma(S) + D_\sigma \cdot S = 0 \tag{2}$$

genügt, da die Spalten von S gerade die Koordinaten der v_i bzgl. $\mathfrak{B}$ sind. Es reicht also, eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I)$ zu finden, die (2) erfüllt. Wir schreiben $\partial = (\partial_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_0}$ und setzen $D_\alpha := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\partial^\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\Sigma_0}$. Sei $n \gg 0$ hinreichend groß, sodass gilt:

(a) Die Reihe

$$S := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{\Sigma_0}} (-1)^{|\alpha|} \cdot D_\alpha \cdot \frac{\mathfrak{Y}_n^\alpha}{\alpha!}$$

konvergiert in $(\widetilde{\mathscr{B}}^{\mathrm{la}}_I)^{d \times d}$ (für die LB-Topologie).

(b) Für $\alpha \neq 0$ gilt $\|D_\alpha \cdot \mathfrak{Y}_n^\alpha/\alpha!\|_I < 1$.

Ein solches n existiert, denn weil die Operatoren ∂_σ bzgl. $\|\cdot\|_I$ stetig sind und daher endliche Operatornorm haben, finden wir unter Verwendung der Formel

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\partial^\alpha \circ \partial^\beta) = \partial^\alpha(D_\beta) + D_\alpha \cdot D_\beta \tag{3}$$

ein $C > 0$ mit $\|D_\alpha\|_I < C^{|\alpha|}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\Sigma_0}$. Nun wählt man $n \gg 0$ genügend groß mit $\lim_{|\alpha|\to\infty} C^{|\alpha|} \cdot \left\|\pi^{n|\alpha|}/\alpha!\right\|_I = 0$ und $C^{|\alpha|} \cdot \left\|\pi^{n|\alpha|}/\alpha!\right\|_I < 1$ für $\alpha \neq 0$, sowie $m \gg 0$, sodass gemäß Konstruktion 2.4.8 bzw. Bemerkung 2.1.3 $\|\mathfrak{Y}_{n,\sigma}\|_{\Gamma_m} = \|\mathfrak{Y}_{n,\sigma}\|_I \leq p^{-n}$ und $\|D_\sigma\|_{\Gamma_m} = \|D_\sigma\|_I$ gilt.
Wegen (b) ist der Grenzwert S der obigen Reihe ein Element von $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathscr{B}}_I^{\mathrm{la}})$, und wir zeigen, dass S die Bedingung (2) erfüllt. Zunächst liefert die Produktregel

$$\partial_\sigma(S) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\Sigma_0}} (-1)^{|\alpha|} \cdot \partial_\sigma(D_\alpha) \cdot \frac{\mathfrak{Y}_n^\alpha}{\alpha!} + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\Sigma_0}} (-1)^{|\alpha|} \cdot D_\alpha \cdot \frac{\partial_\sigma(\mathfrak{Y}_n^\alpha)}{\alpha!}.$$

Weiter gilt $\partial_\sigma(D_\alpha) = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\partial_\sigma \circ \partial^\alpha) - D_\sigma \cdot D_\alpha = D_{\alpha+\mathfrak{e}_\sigma} - D_\sigma \cdot D_\alpha$ wegen der Formel (3), sowie

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\Sigma_0}} (-1)^{|\alpha|} \cdot D_\alpha \cdot \frac{\partial_\sigma(\mathfrak{Y}_n^\alpha)}{\alpha!} &= \sum_{\alpha_\sigma>0} (-1)^{|\alpha|} \cdot D_\alpha \cdot \frac{\alpha_\sigma \cdot \mathfrak{Y}_n^{\alpha-\mathfrak{e}_\sigma}}{\alpha!} \\ &= -\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\Sigma_0}} (-1)^{|\alpha|} \cdot D_{\alpha+\mathfrak{e}_\sigma} \cdot \frac{\mathfrak{Y}_n^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}$$

nach Konstruktion 2.4.8. Es folgt

$$\partial_\sigma(S) = -\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\Sigma_0}} (-1)^{|\alpha|} \cdot D_\sigma \cdot D_\alpha \cdot \frac{\mathfrak{Y}_n^\alpha}{\alpha!} = -D_\sigma \cdot S$$

und damit Punkt (i).
Zu (ii). Sei also $I := [r, s]$ mit $I \cap qI \neq \varnothing$. Weiter bezeichne $\mathfrak{C} = (v_1, \ldots, v_d)$ die Basis von $\mathrm{Sol}(M_I)$, die gemäß (i) aus $\mathfrak{B}$ durch Basiswechsel via S hervorgeht. Der Frobenius φ_M beschränkt sich zu einer Bijektion $M^r \xrightarrow{\sim} M^{qr}$, und Tensorieren mit $\varphi\colon \widetilde{\mathscr{B}}_I^{\mathrm{la}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{B}}_{qI}^{\mathrm{la}}$ liefert einen bijektiven, semilinearen Frobenius $M_I \xrightarrow{\sim} M_{qI}$. Dieser kommutiert mit den ∂_σ, sodass wir für alle $k \geq 0$ Bijektionen

$$\varphi_I^k\colon \mathrm{Sol}(M_I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sol}(M_{q^kI}) \tag{4}$$

erhalten. Sei nun $J := I \cap qI$. Dann gilt $\widetilde{\mathscr{B}}_I \subseteq \widetilde{\mathscr{B}}_J$ und somit $M_J = \widetilde{\mathscr{B}}_J^{\mathrm{la}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}_I^{\mathrm{la}}} M_I$. Mit (1) folgt

$$\mathrm{Sol}(M_J) = \mathrm{Sol}(\widetilde{\mathscr{B}}_J^{\mathrm{la}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}_I^{L\text{-la}}} \mathrm{Sol}(M_I)) = \widetilde{\mathscr{B}}_J^{L\text{-la}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}_I^{L\text{-la}}} \mathrm{Sol}(M_I),$$

also ist $\mathfrak{C}$ auch eine Basis für $\mathrm{Sol}(M_J)$. Weiter ist $\varphi_I(\mathfrak{C}) = (\varphi_I(v_1), \dots, \varphi_I(v_d))$ ebenfalls eine Basis von $\mathrm{Sol}(M_J)$, wie man mit derselben Argumentation für qI statt I sieht, da $\varphi_I(\mathfrak{C})$ wegen (4) eine Basis für $\mathrm{Sol}(M_{qI})$ ist. Sei $S \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathscr{B}}_J^{L\text{-la}})$ die Basiswechselmatrix von $\mathfrak{C}$ nach $\varphi_I(\mathfrak{C})$.

Wir schreiben $\mathscr{B}_{I,n} := E \otimes_L \mathbf{B}_{K,n}^I$ für $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, sodass nach Theorem 2.3.7 $\widetilde{\mathscr{B}}_I^{L\text{-la}} = \mathscr{B}_{I,\infty}$ gilt, und setzen $I_k := q^k I$ sowie $J_k := I_k \cap I_{k+1} = q^k J$ für $k \geq 0$. Sei nun $n \geq 0$ hinreichend groß, dass $S \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{B}_{J,n})$ gilt. Wir betrachten für $k \geq 0$ die $\mathscr{B}_{I_k,n}$-Moduln

$$V_k := \bigoplus_{i=1}^{d} \mathscr{B}_{I_k,n} \cdot \varphi_I^k(v_i) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{d} \mathscr{B}_{I_k,\infty} \cdot \varphi_I^k(v_i) = \mathrm{Sol}(M_{I_k}).$$

Es ist $\varphi^k(S)$ die Basiswechselmatrix von $\varphi_I^k(\mathfrak{C})$ nach $\varphi_I^{k+1}(\mathfrak{C})$, und nach Wahl von n hat man $\varphi^k(S) \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{B}_{J_k,n})$. Folglich gilt

$$\mathscr{B}_{J_k,n} \otimes_{\mathscr{B}_{I_k,n}} V_k = \mathscr{B}_{J_k,n} \otimes_{\mathscr{B}_{I_{k+1},n}} V_{k+1},$$

und indem wir o.B.d.A. annehmen, dass $I \cap q^2 I = \varnothing$ (und damit $(\bigcup_{j=0}^k I_k) \cap I_{k+1} = J_k$ für alle k) gilt, können wir Bemerkung A.1.3 anwenden und die Familie $\{V_k\}_{k \geq 0}$ als ein Vektorbündel über $\mathscr{B}_n^r := E \otimes_L \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K,n}^{\dagger,r}$ auffassen.

Nach Theorem A.1.4 gibt es Elemente $\mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_d)$ in $\bigcap_{k \geq 0} V_k$, die für jedes k eine Basis von V_k und damit auch von $\mathrm{Sol}(M_{I_k})$ und M_{I_k} bilden. Wegen $\bigcup_k I_k = [r, \infty)$ und $M_{I_k} = \widetilde{\mathscr{B}}_{I_k}^{\mathrm{la}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{B}}_r^{\mathrm{pa}}} M^r$ ist $\mathfrak{E}$ folglich sowohl für $\mathrm{Sol}(M^r)$ als auch für M^r eine Basis, und nach Wahl von r ist $\mathfrak{E}$ daher die gewünschte Basis von $\mathrm{Sol}(M)$. $\square$

Kapitel 3

L-Analytische Darstellungen und ihre (φ, Γ)-Moduln

In diesem Kapitel fixieren wir ein für alle Mal eine endliche Erweiterung K/L. In den ersten beiden Abschnitten stellen wir die Grundbegriffe zu den verschiedenen Kategorien von (φ, Γ_K)-Moduln und von Darstellungen der absoluten Galoisgruppe $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{L}/K)$ zusammen, woraufhin die Kategorien $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}^{L\text{-an}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ bzw. $\mathfrak{Rep}_L^{L\text{-an}}(G_K)$ der L-analytischen étalen (φ, Γ_K)-Moduln über dem Robba-Ring bzw. der L-analytischen G_K-Darstellungen über L in Abschnitt 3.3 definiert werden.
Schließlich wenden wir uns in Abschnitt 3.4 dem Beweis der Äquivalenz dieser beiden Kategorien zu, dessen Strategie wir an dieser Stelle kurz skizzieren wollen. Der wesentliche Schritt besteht darin zu zeigen, dass eine L-analytische Darstellung V stets überkonvergent ist (s. Theorem 3.4.6). Als Konsequenz erhält man einen volltreuen Funktor

$$\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \colon \mathfrak{Rep}_L^{L\text{-an}}(G_K) \hookrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}),$$

dessen essentielles Bild dann im Beweis von Theorem 3.4.8 mit $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}^{L\text{-an}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ identifiziert wird. Für den ersten Schritt zeigen wir in Lemma 3.4.4 unter Verwendung der L-Analytizität von V, dass der $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}$-Modul[1] $M := (\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V))^{\mathrm{pa}}$ stabil unter den Operatoren ∂_σ ist und folglich die Voraussetzungen des Monodromiesatzes 2.4.9 erfüllt, welcher den Abstieg zu einem (φ, Γ_K)-Modul $\mathrm{Sol}(M)$ über $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}$ ermöglicht.
Nach Satz 2.3.8 gilt $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-n}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$, und nach Wahl einer Basis $(e_1, \dots, e_d)$ für $\mathrm{Sol}(M)$ findet man ein $n \gg 0$, sodass die Darstellungsmatrizen von φ und allen $\gamma \in \Gamma_K$ in $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-n}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}))$ liegen. Wir erhalten mit $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}} := \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \cdot \varphi^n(e_i)$ einen eindeutig bestimmten (φ, Γ_K)-Modul über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Sol}(M) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,\infty} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}.$$

[1] siehe Konstruktion 3.3.2 für die Definition von $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.

Man zeigt dann unter Verwendung der Ergebnisse von Kedlayas *Theorie des Anstieges*, die im Appendix A.2 zusammengestellt sind, dass $D^\dagger_{\mathrm{rig}}$ étale und daher aufgrund der Kategorienäquivalenzen aus Bemerkung 3.2.3 von der Form

$$D^\dagger_{\mathrm{rig}} = \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(W) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(W)$$

für eine überkonvergente Darstellung W ist. Aus der Konstruktion von $D^\dagger_{\mathrm{rig}}$ folgt schließlich die Isomorphie $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_L V \cong \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_L W$ von (φ, G_K)-Moduln, was $V \cong W$ in $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$ und damit die Überkonvergenz von V liefert.
Um den Beweis der Kategorienäquivalenz abzuschließen, wird in Theorem 3.4.8 gezeigt, dass für eine überkonvergente Darstellung V aus der L-Analytizität von $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ auch die L-Analytizität von V folgt. Dazu muss für $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ eingesehen werden, dass der $\mathbb{C}_p$-Vektorraum $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ von seinen G_K-Invarianten $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K}$ erzeugt wird. Man wählt zunächst $r \gg 0$ genügend groß, dass $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \cong \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ als Isomorphie von (φ,Γ_K)-Moduln gilt, siehe die Sätze 3.3.1 und 3.3.3. Dann betrachtet man für ein kompaktes Teilintervall $I \subseteq [r,\infty)$ den $\mathbf{B}^I_K$-Modul $\mathbf{D}_I(V) := \mathbf{B}^I_K \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$, der nach Voraussetzung L-analytisch ist.
Unter Verwendung der Konstruktionen 2.4.1(b) und 1.2.6 zusammen mit Satz 3.4.3 erhalten wir eine σ-semilineare, Γ_K-äquivariante und stetige Abbildung, die wir ad hoc mit Ψ bezeichnen:

$$\Psi\colon\ \mathbf{D}_I(V) \longrightarrow \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbf{B}^I_K} \mathbf{D}_I(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V.$$

Lemma 2.2.15 besagt nun $\Psi \circ \nabla_\tau = \nabla_{\sigma\circ\tau} \circ \Psi$ für alle $\tau \in \Sigma$, was aufgrund der L-Analytizität von $\mathbf{D}_I(V)$ impliziert, dass das Bild von Ψ aus lokal σ-analytischen Vektoren im Sinne von Definition 2.2.9 besteht.
Tensorieren von $\mathrm{im}(\Psi)$ mit dem Körper $\widehat{K}^\sigma_\infty := \{x \in \widehat{K}^{\mathrm{la}}_\infty \mid \nabla_\tau(x) = 0 \text{ für alle } \tau \neq \sigma\}$ liefert einen σ-analytischen $\widehat{K}^\sigma_\infty$-Unterraum $\mathbf{D}^\sigma_{\mathrm{Sen}}(V) \subseteq (\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{H_K}$, der $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ über $\mathbb{C}_p$ erzeugt. Von $\mathbf{D}^\sigma_{\mathrm{Sen}}(V)$ ausgehend wird dann mit Hilfe des in Beispiel 2.2.11(i) konstruierten Elementes $x_\sigma \in \widehat{K}^\sigma_\infty$ der Abstieg zu dem K_n-Vektorraum $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$ für ein $n \gg 0$ durchgeführt. Es ist K_n/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G_K/G_{K_n}, und aus Hilberts Satz 90 folgt schließlich, dass $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K}$ den K_n-Vektorraum $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$ und folglich auch den $\mathbb{C}_p$-Vektorraum $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ erzeugt, womit der Beweis abgeschlossen ist.

3.1 (φ,Γ)-Moduln und Darstellungen

Wir betrachten die diskret bewerteten Körper $\mathbf{B}^\dagger_K \subseteq \mathbf{B}_K$, versehen mit der schwachen Topologie (s. Konstruktion 1.2.7), sowie ihre Ganzheitsringe $\mathbf{A}^\dagger_K$ und $\mathbf{A}_K$.
Der Robba-Ring $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ enthält $\mathbf{B}^\dagger_K$ als Unterring und besitzt eine Topologie als LF-Raum (vgl. 1.3.27).
All diese Ringe sind mit einem q-Frobenius-Endomorphismus und einer kommutierenden Γ_K-Operation ausgestattet, und beide Wirkungen sind stetig und L-linear.

Definition 3.1.1. Sei R ein topologischer Ring, versehen mit einem stetigen Endomorphismus $\varphi\colon R \longrightarrow R$ und einer mit φ kommutierenden stetigen Γ_K-Aktion.

(a) Ein (φ, Γ_K)-*Modul* über R ist ein φ-Modul[2] D zusammen mit einer semilinearen stetigen Γ_K-Operation, die mit φ_D kommutiert.
Ist R einer der Ringe $\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{A}_K^\dagger, \mathbf{B}_K^\dagger, \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$, so nennen wir den (φ, Γ_K)-Modul D *étale*, wenn er als φ-Modul étale ist. Analog definiert man den Begriff des étalen (φ, Γ_K)-Moduls über $E \otimes_L R$ bzw. $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} R$ anstatt R.

(b) Ein *Homomorphismus von (étalen)* (φ, Γ_K)-*Moduln* C, D ist eine R-lineare Abbildung $\alpha\colon C \longrightarrow D$, die φ- und Γ_K-äquivariant ist, d.h.

$$\alpha \circ \varphi_C = \varphi_D \circ \alpha \quad \text{und} \quad \alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha \text{ für alle } \gamma \in \Gamma_K.$$

Wir bezeichnen die Kategorie der étalen (φ, Γ_K)-Moduln über R mit $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(R)$.

Bemerkung 3.1.2. Ein (φ, Γ_K)-Modul D über $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[\pi^{-1}]$ ist genau dann étale, wenn es einen $\mathbf{A}_K$-Untermodul $D_0 \subseteq D$ gibt, auf den sich Frobenius und Γ_K-Operation von D einschränken zu einer Struktur als étaler (φ, Γ_K)-Modul über $\mathbf{A}_K$, sodass die natürliche Abbildung

$$\mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{A}_K} D_0 \xrightarrow{\sim} D$$

ein Isomorphismus von (φ, Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}_K$ ist. Ein solches D_0 heißt ein *étales Modell* für D.
Um es zu erhalten, wähle man einen unter φ_D stabilen $\mathbf{A}_K$-Untermodul D' gemäß A.2.1(c). Dann ist der Stabilisator $\{\gamma \in \Gamma_K \mid \gamma(D') \subseteq D'\}$ von D' eine offene Untergruppe in Γ_K und hat wegen der Kompaktheit von Γ_K somit endlichen Index. Wir wählen ein Vertretersystem $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ der zugehörigen Faktorgruppe und setzen $D_0 := \sum_{i=1}^d \gamma_i(D')$. Dies ist ein unter φ_D und Γ_K stabiles $\mathbf{A}_K$-Gitter von D und daher der gesuchte Untermodul.
Dieselbe Aussage gilt analog für (φ, Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}_K^\dagger = \mathbf{A}_K^\dagger[\pi^{-1}]$.

Definition 3.1.3. Sei $F/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung und $A \in \{F, \mathcal{O}_F\}$.

(a) Eine A-*lineare Darstellung von* G_K ist ein endlich erzeugter freier A-Modul V zusammen mit einer stetigen A-linearen Gruppenoperation $G_K \times V \longrightarrow V$.

(b) Ein *Homomorphismus von* G_K-*Darstellungen* V, W *über* A ist eine G_K-äquivariante A-lineare Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$.

Sei $\mathfrak{Rep}_A(G_K)$ die Kategorie der A-linearen G_K-Darstellungen.

Wir führen nun die Funktoren ein, welche die „klassische“ Kategorienäquivalenz (vgl. [Ber10, Thm. 18.8] oder [Sch17, Thm. 3.3.10]) zwischen G_K-Darstellungen über L und (φ, Γ)-Moduln über $\mathbf{B}_K$ konstituieren, die wir in Theorem 3.1.5 in einer allgemeinen Version zitieren.

[2] für die Definition eines φ-Moduls siehe Definition A.2.1 im Appendix.

Konstruktion 3.1.4. (a) Für $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$ definieren wir

$$\mathbf{V}(D) := (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} D)^{\varphi=\text{id}}.$$

Dabei ist φ als $\varphi \otimes \varphi_D$ auf $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} D$ erklärt. Auf diesem Tensorprodukt operiert G_K durch

$$g(a \otimes x) := g(a) \otimes (g \mod H_K)(x),$$

und da Frobenius und Galois-Operation kommutieren, erhalten wir eine G_K-Wirkung auf $\mathbf{V}(D)$. Wegen $\mathbf{B}^{\varphi=\text{id}} = L$ (s. 1.2.7) ist $\mathbf{V}(D)$ ein L-Vektorraum. Man kann zeigen, dass $\mathbf{V}(D)$ endlich-dimensional und die G_K-Aktion stetig und L-linear ist, sodass wir einen Funktor

$$\mathbf{V}\colon \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K) \longrightarrow \mathfrak{Rep}_L(G_K)$$

erhalten. Es gilt $\dim_L \mathbf{V}(D) = \dim_{\mathbf{B}_K} D$, vgl. [Ber10, Prop. 18.7]. Analog erklärt man den Funktor $\mathbf{V}_0\colon \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{A}_K) \longrightarrow \mathfrak{Rep}_{\mathcal{O}}(G_K)$, $D_0 \longmapsto (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} D_0)^{\varphi=\text{id}}$.

(b) Sei nun $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$. Wir setzen

$$\mathbf{D}(V) := (\mathbf{B} \otimes_L V)^{H_K}.$$

Dies ist ein $\mathbf{B}_K = \mathbf{B}^{H_K}$-Vektorraum, der mit einem φ-semilinearen Frobenius ausgestattet ist, gegeben durch $\varphi_{\mathbf{D}(V)} := \varphi \otimes \text{id}$. Weiter induziert die offensichtliche G_K-Wirkung von $\mathbf{B} \otimes_L V$ eine mit $\varphi_{\mathbf{D}(V)}$ kommutierende semilineare $\Gamma_K = G_K/H_K$-Operation auf $\mathbf{D}(V)$. Man hat $\dim_{\mathbf{B}_K} \mathbf{D}(V) = \dim_L(V)$, siehe [Ber10, Prop. 18.4]. Auf dieselbe Weise definieren wir $\mathbf{D}_0(V_0) := (\mathbf{A} \otimes_{\mathcal{O}} V_0)^{H_K}$ für $V_0 \in \mathfrak{Rep}_{\mathcal{O}}(G_K)$. Dies liefert Funktoren

$$\mathbf{D}\colon \mathfrak{Rep}_L(G_K) \longrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K) \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_0\colon \mathfrak{Rep}_{\mathcal{O}}(G_K) \longrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{A}_K).$$

Man vergleiche hierzu A.§3.4, insbesondere 3.4.2 und Remarque 3.4.4(c) in [Fon90], sowie §3.1 in [Sch17] für die Konstruktion und §§3.2, 3.3 ebenda für Beweise der Wohldefiniertheit von $\mathbf{V}_0$ und $\mathbf{D}_0$ im Fall $K = L$.

Theorem 3.1.5. *Die Funktoren* $\mathbf{D}$ *und* $\mathbf{V}$ *bzw.* $\mathbf{D}_0$ *und* $\mathbf{V}_0$ *sind zueinander quasi-invers und liefern somit Kategorienäquivalenzen*

$$\mathfrak{Rep}_L(G_K) \underset{\mathbf{V}}{\overset{\mathbf{D}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{Rep}_{\mathcal{O}}(G_K) \underset{\mathbf{V}_0}{\overset{\mathbf{D}_0}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{A}_K)\,.$$

Beweis. Siehe [Kup19, Thm. 3.9.1]. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer weiteren Kategorienäquivalenz, die im Gegensatz zu der Tiefe von Theorem 3.1.5 ein Ergebnis elementarer Natur über den Basiswechsel für (φ, Γ_K)-Moduln von $\mathbf{B}_K^\dagger$ -auf $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$-Koeffizienten ist. Siehe hierzu [Ked07, Prop. 1.5.5] sowie Bemerkung 21.2.9 und Lemma 18.5.4 in [Ked10].

Satz 3.1.6. *Der Funktor*

$$\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} -\colon \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K^\dagger) \longrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger)$$

ist eine Kategorienäquivalenz.

3.2 Überkonvergente Darstellungen

Um eine Verbindung zwischen Darstellungen von G_K und (φ,Γ_K)-Moduln über dem Robba-Ring in ähnlicher Manier wie in Theorem 3.1.5 herzustellen, ist ein Formalismus notwendig, der den Abstieg von étalen (φ,Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}_K$ zu solchen über $\mathbf{B}_K^\dagger$ erlaubt. Dies wird durch die Theorie der überkonvergenten (φ,Γ)-Moduln ermöglicht. Referenzen hierzu sind beispielsweise [CC98], [FX13, §1B] oder [Ber10, §25].

Definition 3.2.1. (a) Wir bezeichnen $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$ als *überkonvergent*, wenn es eine Basis $\mathfrak{B}$ von D gibt, sodass für die Darstellungsmatrizen von φ_D und allen $\gamma \in \Gamma_K$ gilt

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi_D), \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\gamma) \in \mathrm{GL}(\mathbf{A}_K^\dagger).$$

(b) Eine Darstellung $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ heißt *überkonvergent*, wenn ihr zugehöriger (φ,Γ_K)-Modul $\mathbf{D}(V)$ überkonvergent ist.

Bemerkung 3.2.2. (a) Es ist $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$ genau dann überkonvergent, wenn es einen φ- und Γ_K-stabilen $\mathbf{B}_K^\dagger$-Untervektorraum $D^\dagger \subseteq D$ gibt, sodass $D^\dagger \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K^\dagger)$ ist und $D = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger$ gilt.

(b) Ist $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ eine Darstellung, so setzen wir

$$\mathbf{D}^\dagger(V) := (\mathbf{B}^\dagger \otimes_L V)^{H_K}.$$

Für die Definition von $\mathbf{B}^\dagger$ siehe Konstruktion 1.3.22. Es ist $\mathbf{D}^\dagger(V) \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K^\dagger)$ mit $\dim_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) \leq \dim_L(V)$, vgl. [CC98, Def. II.3.1], und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) V ist überkonvergent.

(ii) $\dim_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) = \dim_L(V)$.

(iii) Die natürliche Abbildung $\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) \longrightarrow \mathbf{B}^\dagger \otimes_L V$ ist ein Isomorphismus von (φ, G_K)-Moduln.

(iv) $\mathbf{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$.

Ist in diesem Fall $D^\dagger \subseteq \mathbf{D}(V)$ ein endlich-dimensionaler φ_D -und Γ_K-stabiler $\mathbf{B}_K^\dagger$-Untervektorraum, so gilt $D^\dagger \subseteq \mathbf{D}^\dagger(V)$, vgl. [Ber10, §25 Ex. 1].

Bemerkung 3.2.3. (a) Sei $D^\dagger \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K^\dagger)$. Dann ist der (φ,Γ_K)-Modul $\mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$ offensichtlich überkonvergent. Nach [FX13, Prop. 1.5(b)] ist der Funktor

$$\mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} - \colon \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K^\dagger) \longrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$$

volltreu, und wegen 3.2.2(b) ist sein essentielles Bild gerade die volle Unterkategorie der überkonvergenten (φ,Γ_K)-Moduln.

Da sich die Kategorienäquivalenz $\mathbf{D}$ aus Theorem 3.1.5 auf die vollen Unterkategorien der überkonvergenten Objekte in $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$ resp. $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$ einschränkt – was sich unmittelbar aus den Definitionen ergibt – ist folglich der Funktor $\mathbf{D}^\dagger$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der überkonvergenten L-linearen Darstellungen von G_K und $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^\dagger_K)$. Man vergleiche [FX13, Prop. 1.5].

(b) Setzen wir nun für $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$

$$\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) := \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V),$$

so folgt aus (a) zusammen mit Satz 3.1.6, dass der Funktor $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der überkonvergenten L-linearen G_K-Darstellungen und der Kategorie $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K})$ der étalen (φ,Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ liefert.

Im *zyklotomischen Fall* $L = \mathbb{Q}_p$ bedeutet es keine Einschränkung, allein die überkonvergenten Darstellungen zu betrachten, was der Inhalt des nachfolgenden Theorems [CC98, Cor. III.5.2] ist:

Theorem 3.2.4 (Cherbonnier-Colmez). *Jede p-adische Darstellung $V \in \mathfrak{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ ist überkonvergent.*

Folgerung 3.2.5. *Im Falle $L = \mathbb{Q}_p$ liefern die Theoreme 3.1.5 und 3.2.4 zusammen mit Satz 3.1.6 eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}\colon\ \mathfrak{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K})$$

Diese Korrespondenz von Darstellungen und (φ,Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ bleibt nicht erhalten, wenn man von $\mathbb{Q}_p$ auf endliche Erweiterungen übergeht, denn Fourquaux beweist in [FX13, Remark 5.21]:

Satz 3.2.6. *Ist $L \neq \mathbb{Q}_p$, so gibt es Darstellungen $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$, die nicht überkonvergent sind.*

3.3 (φ,Γ)-Moduln über $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$

Satz 3.3.1. *Sei $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K})$. Dann gibt es ein $r(D) > 1$, sodass für alle $r \geq r(D)$ ein eindeutig bestimmter freier $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-Untermodul $D^r \subseteq D$ mit folgenden Eigenschaften existiert:*

(i) $D = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} D^r$.

(ii) D^r *besitzt eine Basis* $\mathfrak{B}$, *sodass* $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi_D) \in \mathrm{GL}(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$ *gilt.*

(iii) Es gilt $\gamma(D^r) = D^r$ *für alle* $\gamma \in \Gamma_K$.

Man hat außerdem $D^s = \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} D^r$ *für alle* $s \geq r \geq r(D)$*, und (i) gilt als Isomorphie von* (φ, Γ_K)*-Moduln.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ eine Basis von D über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$. Man wähle $r(D) > 1$ genügend groß, dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi_D) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r(D)}_{\mathrm{rig},K})$ gilt, und setze für $r \geq r(D)$:

$$D^r := \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \cdot e_i.$$

Der Modul D^r erfüllt offensichtlich die Eigenschaften (i) und (ii) sowie den Zusatz zur Erweiterung der Koeffizienten auf $s \geq r$. Wir zeigen, dass D^r durch (i) und (ii) bereits eindeutig bestimmt ist, dann folgt (iii), da für alle $\gamma \in \Gamma_K$ der $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-Modul $\gamma(D^r)$ ebenfalls (i) und (ii) erfüllt.
In der Tat ist mit $\mathfrak{B}$ auch $\gamma(\mathfrak{B})$ eine Basis von D über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, woraus (i) für $\gamma(D^r)$ folgt. Weiter gilt $\mathrm{Mat}_{\gamma(\mathfrak{B})}(\varphi_D) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$, da φ_D und γ kommutieren und die Ringe $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ invariant unter Γ_K sind, womit sich auch (ii) für $\gamma(D^r)$ ergibt.
Es bleibt also die Eindeutigkeit von D^r bzgl. (i) und (ii) zu zeigen. Sei $C^r \subseteq D$ ein weiterer freier $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-Untermodul, der diesen Eigenschaften genügt. Wir wählen eine Basis $\mathfrak{C}$ von C^r gemäß (ii) und setzen $A_{\mathfrak{C}} := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{C}}(\varphi_D), A_{\mathfrak{B}} := \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi_D) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$. Wegen (i) sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Basen von D, und wir bezeichnen mit $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ die Basiswechselmatrix von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$. Dann hat man die Relation (vgl. [Sch06, Lem. 1.4])

$$\varphi(S) = A_{\mathfrak{B}}^{-1} \cdot S \cdot A_{\mathfrak{C}}. \tag{$*$}$$

Dies impliziert $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$, denn wählt man $s \geq r$, sodass $S \in (\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K})^{d\times d}$ gilt, so hat wegen $(*)$ und $A_{\mathfrak{B}}, A_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}) \subseteq \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K})$ auch die Matrix $\varphi(S)$ Einträge in $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$. Nach Lemma 1.3.28(ii) gilt $\varphi(\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \cap \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} = \varphi(\mathbf{B}^{\dagger,s/q}_{\mathrm{rig},K})$, womit

$$S \in (\mathbf{B}^{\dagger,s/q}_{\mathrm{rig},K})^{d\times d}$$

folgt. Falls $s/q \leq r$ gilt, sind wir fertig, ansonsten ersetzen wir s durch s/q. Iteration dieses Argumentes liefert $S \in (\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{d\times d}$, und aus Symmetriegründen gilt dasselbe für S^{-1}, womit wir $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$ und folglich wie gewünscht $C^r = D^r$ erhalten. □

Konstruktion 3.3.2 (Die Funktoren $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ und $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$). Es sei V eine Darstellung in $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$ und $r > 1$. Wir setzen

$$\mathbf{D}^{\dagger,r}(V) := (\mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_L V)^{H_K} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) := \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r}(V).$$

Wie bei den in 3.1.4 konstruierten (φ, Γ_K)-Moduln hat man offensichtliche Γ_K-Operationen und kompatible Frobenius-Homomorphismen

$$\mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \longrightarrow \mathbf{D}^{\dagger,qr}(V) \quad \text{und} \quad \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \longrightarrow \mathbf{D}^{\dagger,qr}_{\mathrm{rig}}(V).$$

Offenbar gilt $\mathbf{D}^\dagger(V) = \bigcup_r \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ und damit auch $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \bigcup_r \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ (vgl. 3.2.2(b) und 3.2.3(b)).
Wenn V überkonvergent ist, so gibt es nach [Ber10, Prop. 25.4] ein $r_0 \gg 0$ und eine $\mathbf{B}^\dagger_K$-Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbf{D}^\dagger(V)$, sodass $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ für alle $r \geq r_0$ ein freier $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$-Modul mit Basis $\mathfrak{B}$ ist, der

$$\mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \cong \mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_L V \quad \text{sowie} \quad \mathbf{D}^\dagger(V) = \mathbf{B}^\dagger_K \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$$

erfüllt. Nehmen wir r_0 zusätzlich groß genug an, dass $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r_0}_K)$ gilt, so sehen wir, dass die freien Untermoduln $\{\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)\}_{r\geq r_0}$ von $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ den Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 3.3.1 genügen, und aus dem Beweis dieses Satzes folgt daraus bereits, dass sie mit den dort definierten D^r übereinstimmen, insbesondere hat man

$$\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V).$$

Als Nächstes ordnen wir der (nicht notwendig überkonvergenten) Darstellung V gewisse (φ,Γ_K)-Moduln über den „großen Periodenringen“ (1.3.22) zu:

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) := (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \otimes_L V)^{H_K} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{D}}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) := (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_L V)^{H_K} = \bigcup_r \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V).$$

Der Frobenius $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,qr}_{\mathrm{rig}}(V)$ ist bijektiv, da er dies bereits auf den Ringen $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ ist.

Satz 3.3.3. *Sei $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ überkonvergent. Dann gilt*

$$\widetilde{\mathbf{D}}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$$

als Isomorphie von (φ,Γ_K)-Moduln. Laut Konstruktion 3.3.2 folgt insbesondere für $r \gg 0$

$$\widetilde{\mathbf{D}}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V).$$

Beweis. Zunächst hat man wegen $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$, dass

$$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V) \tag{$*$}$$

gilt. Die Überkonvergenz von V bedeutet $\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V) \cong \mathbf{B}^\dagger \otimes_L V$ als (φ, G_K)-Moduln. Indem wir diesen Isomorphismus mit $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ tensorieren, erhalten wir

$$\widetilde{\mathbf{D}}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_L V)^{H_K} \cong (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V))^{H_K} \cong \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V).$$

Dies zusammen mit $(*)$ liefert die Behauptung. $\square$

Wir studieren nun die Γ_K-Operation auf (φ, Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$.

Satz 3.3.4. *Sei $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$. Dann ist die Γ_K-Wirkung auf D lokal $\mathbb{Q}_p$-analytisch, d.h. $D = D^{\mathrm{pa}}$ in der Sprache von Bemerkung 2.1.8(b) und Definition 2.1.1(a).*

Beweis. Zunächst erklären wir die Struktur von D als LF-Raum. Nach Satz 3.3.1 gibt es ein $r_0 > 1$, sodass für alle $r \geq r_0$ eindeutig bestimmte Γ_K-stabile $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-Untermoduln $D^r \subseteq D$ existieren mit

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} D^r = D.$$

Wegen $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} = \bigcup_r \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ gilt $D = \bigcup_{r \geq r_0} D^r$, und die D^r sind Frécheträume als endliche direkte Summen der Frécheträume $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ (s. 1.3.27). Um die Γ_K-Wirkung auf dem $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-Modul D^r zu beschreiben, sei $r = r_0 < r_1 < \ldots$ eine unbeschränkte Folge, sodass $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} = \varprojlim_{i \geq 0} \mathbf{B}^{[r,r_i]}_K$ für die Banachräume $\mathbf{B}^{[r,r_i]}_K$ (mit Normen $\|\cdot\|_{[r,r_i]}$) gilt. Dann folgt $D^r = \varprojlim_{i \geq 0} D^r_i$ mit

$$D^r_i := D^r \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{[r,r_i]}_K.$$

Die D^r_i sind freie Moduln über Γ_K-Banachalgebren, und die Behauptung folgt, wenn wir $(D^r_i)^{\mathrm{la}} = D^r_i$ zeigen können. Dazu genügt es nach [BSX15, Prop. 2.3.3 und Lem. 2.3.1], für die Γ_K-Operation auf $\mathbf{B}^{[r,r_i]}_K$ die folgende Aussage zu beweisen: Es gibt ein $m \gg 0$, sodass für alle $\gamma \in \Gamma_m$ bzgl. der Operatornorm $\|\gamma - 1\|_{[r,r_i]} < p^{1/(p-1)}$ gilt und daher der Audruck

$$\log(\gamma) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(\gamma - 1)^k}{k}$$

konvergiert. Für einen Beweis dieser Konvergenzaussage siehe z.B. [Ber02, §4.1] oder [BSX15, Prop. 2.3.4]. □

Bemerkung 3.3.5. Sei $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$. Aus dem Beweis oben folgt, dass für genügend große n und $\gamma \in \Gamma_n$ die Reihe $\log(\gamma)$ einen Endomorphismus von D liefert, insbesondere gilt dies für $\gamma = \exp(\mathfrak{x})$, wenn $\mathfrak{x} \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ in einer hinreichend kleinen Null-Umgebung liegt.
Wegen $D = D^{\mathrm{pa}}$ hat man außerdem eine abgeleitete Operation (s. 2.2.6) der Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ auf D, und jedes genügend kleine $\mathfrak{x} \in \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ besitzt als Operator von D die Taylorentwicklung $\exp(\mathfrak{x}) = \sum_{k \geq 0} 1/k! \cdot \mathfrak{x}^k$, siehe (2) in der Diskussion über Satz 2.2.8. Folglich stimmt die a priori nur auf einer kleinen Null-Umgebung definierte Abbildung

$$\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow \mathrm{End}_L(D), \ \mathfrak{x} \longmapsto \log(\exp(\mathfrak{x}))$$

mit der von der abgeleiteten Wirkung $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \times D \longrightarrow D$ induzierten $\mathbb{Q}_p$-linearen Abbildung $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow \mathrm{End}_L(D)$ überein.

Definition 3.3.6. Ein (φ, Γ_K)-Modul $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ heißt *L-analytisch*, falls die oben erklärte Abbildung $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \longrightarrow \mathrm{End}_L(D)$ sogar L-linear ist.
Die volle Unterkategorie der L-analytischen étalen (φ, Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Mod}^{L\text{-an}}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$.

Folgerung 2.2.17 zusammen mit Bemerkung 3.3.5 liefert sofort:

Bemerkung 3.3.7. Folgende Aussagen sind für $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ äquivalent:

(i) D ist L-analytisch.

(ii) $D^{L\text{-pa}} = D$.

(iii) Die abgeleitete Operation $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) \times D \longrightarrow D$ ist L-bilinear.

(iv) Für alle $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ gilt $\nabla_\sigma = 0$ auf D (wobei der Operator $\nabla_\sigma \in E \otimes_L \mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ auf $E \otimes_L D$ wirkt).

Als Nächstes wollen wir eine Entsprechung des Begriffes der L-Analytizität für Darstellungen von G_K erklären. Für echte Erweiterungen $L/\mathbb{Q}_p$ sind wegen Satz 3.2.6 und Bemerkung 3.2.3(b) Korrespondenzen zwischen L-linearen G_K-Darstellungen und (φ, Γ_K)-Moduln über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ nur zu erwarten, wenn man sich auf gewisse Klassen überkonvergenter Darstellungen beschränkt.
Der folgende Begriff wird sich als hinreichende Bedingung für die Überkonvergenz herausstellen und daher eine solche Klasse von Darstellungen liefern. Wir erinnern daran, dass Σ die Menge der $\mathbb{Q}_p$-Einbettungen von L nach $\overline{L}$ bezeichnet und $E/\mathbb{Q}_p$ eine Galois-Erweiterung ist, welche die normale Hülle von L umfasst.

Definition 3.3.8. Sei $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ und $\sigma \in \Sigma \neq \{\mathrm{id}\}$. Dann hat man auf dem $\mathbb{C}_p$-Vektorraum $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ eine naheliegende semilineare G_K-Operation.[3]
Die Darstellung V heißt *L-analytisch*, falls $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ für jedes $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ die triviale $\mathbb{C}_p$-semilinieare Darstellung ist, d.h. wenn ein G_K-äquivarianter Isomorphismus $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V \cong \mathbb{C}_p^d$ von $\mathbb{C}_p$-Vektorräumen existiert.
Sei $\mathfrak{Rep}^{L\text{-an}}_L(G_K) \subseteq \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ die volle Unterkategorie der L-analytischen Darstellungen.

Bemerkung 3.3.9. Sei $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ und $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$. In der Sprache der p-adischen Hodge-Theorie bedeutet die Bedingung $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V \cong \mathbb{C}_p^d$ aus der obigen Definition, dass die Darstellung *$\mathbb{C}_p$-zulässig bei σ* ist. Für den Vektorraum $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K}$ über $\mathbb{C}_p^{G_K} = K$ gilt im Allgemeinen

$$\dim_K(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K} \leq \dim_L V,$$

und es sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) V ist $\mathbb{C}_p$-zulässig bei σ.

[3] siehe A.2.1(a) für die Definition dieses Tensorproduktes.

(ii) $\dim_K(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K} = \dim_L V$.

(iii) $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ enthält eine $\mathbb{C}_p$-Basis, die von G_K fixiert wird.

Lemma 3.3.10. *Für $V \in \mathfrak{Rep}_E(G_K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) V ist L-analytisch als Objekt in $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$.

(ii) Für alle $g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$ mit $g|_L \neq \mathrm{id}$ ist $\mathbb{C}_p \otimes_{E,g} V$ die triviale $\mathbb{C}_p$-semilineare Darstellung.

Beweis. Wir fixieren $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$ und setzen $G_\sigma := \{g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p) \mid g|_L = \sigma\}$. Für $g \in G_\sigma$ sei $\mathbb{C}_p^g := \mathbb{C}_p$ mit der gewöhnlichen $\mathbb{C}_p$-Linksvektorraumstruktur versehen, und von rechts als E-Vektorraum via g aufgefasst. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} E \xrightarrow{\sim} \prod_{g \in G_\sigma} \mathbb{C}_p^g, \ x \otimes a \longmapsto (x \cdot g(a))_{g \in G_\sigma}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{C}_p$-Linksvektorräumen und E-Rechtsvektorräumen (dies ist eine leichte Verallgemeinerung von [Sha, Lem. 1.1.2]). Damit folgt

$$\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V \cong \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} (E \otimes_E V) \cong \left(\prod_{g \in G_\sigma} \mathbb{C}_p^g \right) \otimes_E V \cong \prod_{g \in G_\sigma} \mathbb{C}_p \otimes_{E,g} V,$$

was die behauptete Äquivalenz impliziert. □

3.4 Die Kategorienäquivalenz

Wir kommen schließlich zum Beweis der Äquivalenz [Ber16, Thm. 10.4] zwischen den Kategorien der L-analytischen E-Darstellungen und der L-analytischen (φ, Γ_K)-Moduln über dem Robba-Ring, den wir unter der vereinfachenden Annahme führen, dass $L/\mathbb{Q}_p$ galoissch ist und $L = E$ gilt.

Bemerkung 3.4.1 (Der allgemeine Fall mit E-Koeffizienten). Ist L allgemein und $n := [E : L]$, so bildet $\mathfrak{Rep}_E(G_K)$ eine Unterkategorie von $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$.
Entsprechend besitzt $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$ die Unterkategorie $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(E \otimes_L \mathbf{B}_K)$, denn ein étaler (φ, Γ_K)-Modul D über $E \otimes_L \mathbf{B}_K$ vom Rang d ist insbesondere ein freier $\mathbf{B}_K$-Modul vom Rang $n \cdot d$. Dass D über $E \otimes_L \mathbf{B}_K$ étale ist bedeutet, dass es einen freien $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}_K$-Untermodul $D_0 \subseteq D$ gibt mit $D_0 \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}_K)$ und

$$D \cong (E \otimes_L \mathbf{B}_K) \otimes_{\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}_K} D_0 \cong \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{A}_K} D_0.$$

Dabei folgt die zweite Isomorphie aus $E \otimes_L \mathbf{B}_K = (\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}_K)[\pi^{-1}]$. Weiter ist offensichtlich D_0 frei als $\mathbf{A}_K$-Modul und als solcher ebenfalls étale, was aus der $\mathcal{O}_E$-Linearität von φ folgt.

Somit gilt $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(E \otimes_L \mathbf{B}_K) \subseteq \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}_K)$, und für $D \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(E \otimes_L \mathbf{B}_K)$ besitzt die L-Darstellung

$$\mathbf{V}(D) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} D)^{\varphi=\text{id}}$$

über die zweite Komponente eine Struktur als E-Vektorraum wegen der E-Linearität von φ_D. Man sieht leicht, dass die G_K-Operation E-linear ist, sodass $\mathbf{V}(D) \in \mathfrak{Rep}_E(G_K)$ folgt. Ist andererseits $V \in \mathfrak{Rep}_E(G_K)$ mit $\dim_E(V) = d$ gegeben, so hat der étale (φ, Γ_K)-Modul

$$\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_L V)^{H_K} = ((E \otimes_L \mathbf{B}) \otimes_E V)^{H_K}$$

den Rang nd über $\mathbf{B}_K$ und trägt eine natürliche Struktur als $E \otimes_L \mathbf{B}_K$-Modul, bzgl. welcher die φ- und Γ_K-Wirkungen semilinear sind. Wählt man ein G_K-stabiles $\mathcal{O}_E$-Gitter $V_0 \subseteq V$, so ist

$$\mathbf{D}_0(V_0) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathcal{O}} V_0)^{H_K} = ((\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}) \otimes_{\mathcal{O}_E} V_0)^{H_K}$$

ein étales Modell für D, das mit einer $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}_K$-Modulstruktur versehen ist. Um nun $\mathbf{D}(V) \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(E \otimes_L \mathbf{B}_K)$ einzusehen bleibt zu zeigen, dass $\mathbf{D}_0(V_0)$ als $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}_K$-Modul frei vom Rang d ist, d.h. dass der $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}$-Modul $(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A}) \otimes_{\mathcal{O}_E} V_0$ eine Basis besitzt, die von H_K fixiert wird.[4]
Ist dies gezeigt, so erhält man damit eine Einschränkung der Kategorienäquivalenz 3.1.5 zu

$$\mathfrak{Rep}_E(G_K) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(E \otimes_L \mathbf{B}_K).$$

Ab jetzt nehmen wir $L = E$ an und schreiben $\Sigma = \text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$. Die nachstehenden Ergebnisse lassen sich durch Spezialisierung der Kategorienäquivalenz 3.1.6 auf E-Koeffizienten sowie unter Verwendung von Lemma 3.3.10 und Bemerkung 3.4.1 durch etwas mehr Notation auf den allgemeinen Fall übertragen.

Wie am Anfang von Abschnitt 2.4 betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{Z} = \{(g, n(g)) \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Z} \mid \widetilde{n}(g) \equiv n(g) \mod h\}.$$

3.4.1 Der freie $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\text{rig},K})^{\text{pa}}$-Modul $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\text{rig}}(V)^{\text{pa}}$

Wir fixieren eine beliebige Darstellung $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ der Dimension $d = \dim_L(V)$.

Um zu zeigen, dass jede L-analytische Darstellung überkonvergent ist, wollen wir in Theorem 3.4.6 den Monodromiesatz 2.4.9 auf den $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\text{rig},K})^{\text{pa}}$-Modul $M := \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\text{rig}}(V)^{\text{pa}}$ anwenden. Dafür müssen wir zunächst einsehen, dass M ein *freier* Modul vom Rang d ist.

[4]im Fall $L = E$ folgt die Aussage aus der Trivialität der Kohomologiegruppe $H^1(H_K, \text{GL}_d(\mathbf{A}))$, sodass eine Verallgemeinerung zu $H^1(H_K, \text{GL}_d(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{A})) = 1$ naheliegt. Wir haben dies nicht verifiziert.

Für überkonvergente Darstellungen folgt dies aus der Beschreibung von $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ in Satz 3.3.3, und in Analogie dazu soll im Folgenden für allgemeines V ein Isomorphismus

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig},\eta}(V)$$

mit einem geeigneten pro-analytischen Modul $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig},\eta}(V)$ vom Rang d konstruiert werden. Bergers Vorgehen in [Ber16, §8] besteht darin, die Lubin-Tate-Erweiterung K_∞/K durch eine Erweiterung K^η_∞/K zu ersetzen, die durch einen unverzweigten Twist des zyklotomischen Charakters gegeben ist und sich im Wesentlichen wie die zyklotomische Erweiterung von K verhält, genauer hat man $K^\eta_\infty \cdot \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} = K(\mu_{p^\infty}) \cdot \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$.
Auf die Erweiterung K^η_∞/K lässt sich dann das Theorem 3.2.4 von Cherbonnier und Colmez verallgemeinern, sodass man eine Kategorienäquivalenz zwischen $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$ und $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{K,\eta})$ für einen Teilkörper $\mathbf{B}^{\dagger}_{K,\eta} \subseteq \mathbf{B}^{\dagger}_{K}$ erhält. Dies liefert einen Ersatz für die in 3.3.3 benötigte Überkonvergenz von V.

Sei $\chi_{\mathrm{cyc}}\colon G_L \subseteq G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ der zyklotomische Charakter und $\chi_L\colon G_L \twoheadrightarrow \Gamma_L \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ der Lubin-Tate-Charakter. Dann existiert ein unverzweigter Charakter $\eta\colon G_L \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ mit $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}_p}(\chi_L) = \eta \cdot \chi_{\mathrm{cyc}}$. Wir definieren den über K galoisschen Erweiterungskörper

$$K^\eta_\infty := K \cdot \overline{L}^{\ker(\eta\chi_{\mathrm{cyc}})} \subseteq K \cdot L_\infty = K_\infty,$$

sowie die Galoisgruppen $H^\eta_K := \mathrm{Gal}(\overline{L}/K^\eta_\infty)$ und $\Gamma^\eta_K := G_K/H^\eta_K \cong \mathrm{Gal}(K^\eta_\infty/K)$. Wegen $H_K \subseteq H^\eta_K$ hat man eine Surjektion $\Gamma_K \twoheadrightarrow \Gamma^\eta_K$. Weiter korrespondiert Γ^η_K via $\eta\chi_{\mathrm{cyc}}$ zu einer offenen Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^\times$.

Setzen wir schließlich $\mathbf{B}^{\dagger}_{K,\eta} := (\mathbf{B}^{\dagger})^{H^\eta_K} \subseteq (\mathbf{B}^{\dagger})^{H_K} = \mathbf{B}^{\dagger}_{K}$, so lässt sich laut Berger mit denselben Argumenten wie im klassischen Theorem von Cherbonnier und Colmez[5] beweisen, dass der Funktor

$$\mathbf{D}^{\dagger}_{\eta}\colon \mathfrak{Rep}_L(G_K) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{K,\eta}),\ V \longmapsto (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_L V)^{H^\eta_K}$$

eine Kategorienäquivalenz ist. Insbesondere erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{K,\eta}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\eta}(V) \cong \mathbf{B}^{\dagger} \otimes_L V \tag{$*$}$$

von (φ, G_K)-Moduln (vgl. auch 3.2.2(b)).

Wie in Abschnitt 1.3.4 definieren wir für alle $r > 1$ die Unterringe $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{K,\eta} \subseteq \mathbf{B}^{\dagger}_{K,\eta}$ und deren Fréchet-Vervollständigungen $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\eta} \subseteq \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, sowie analog zu Konstruktion 3.3.2 die Funktoren

$$\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},\eta}(V) := \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\eta} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{K,\eta}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\eta}(V).$$

[5] das klassische Resultat ist der Spezialfall $K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$ und $\eta = 1$.

Bemerkung 3.4.2. Mit denselben Argumenten wie in 3.3.2 und 3.3.3 folgt unter Verwendung von $(*)$ für $r \gg 1$, dass $\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},\eta}(V)$ ein freier $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\eta}$-Modul vom Rang d ist und $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\eta}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},\eta}(V)$ gilt. Wegen $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\eta} \subseteq \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ und Satz 2.3.8 besteht $\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},\eta}(V)$ aus pro-analytischen Vektoren, sodass sich

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}} \cong (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\eta}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},\eta}(V)$$

aus Folgerung 2.1.7 ergibt.[6] Insbesondere ist $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}$ frei vom Rang d, und wegen $(*)$ hat man einen natürlichen φ- und G_K-äquivarianten Isomorphismus

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \otimes_{(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}} \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}} \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \otimes_L V.$$

3.4.2 Die Überkonvergenz L-analytischer Darstellungen

Wir fixieren ein $r_0 \gg 1$ gemäß Bemerkung 3.4.2. Als endlich erzeugte freie Moduln über den Frécheträumen $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ sind die $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$, $r \geq r_0$ ebenfalls Frécheträume, sodass $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \bigcup_{r\gg 0} \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ eine Struktur als LF-Raum trägt.
Wir fixieren ein $r \geq r_0$ und setzen für jedes kompakte Teilintervall $I \subseteq [r,\infty)$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_I(V) := \widetilde{\mathbf{B}}^I_K \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \quad \text{sowie} \quad \mathbf{D}_I(V) := \mathbf{B}^I_K \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V).$$

Dies sind freie $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ -bzw. $\mathbf{B}^I_K$-Moduln, die

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) = \varprojlim_{s\geq r} \widetilde{\mathbf{D}}_{[r,s]}(V) \quad \text{und} \quad \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) = \varprojlim_{s\geq r} \mathbf{D}_{[r,s]}(V)$$

erfüllen. Nach Wahl von r hat $\widetilde{\mathbf{D}}_I(V)$ den Rang d. Wenn V überkonvergent und r genügend groß ist, dass $\mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) = \mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_L V$ gilt (s. 3.3.2), so ist $\mathbf{D}_I(V)$ ebenfalls vom Rang d.

Satz 3.4.3. *Seien $\sigma \in \Sigma$ sowie $I \subseteq [r,\infty)$ ein kompaktes Intervall und $g = (\sigma^{-1}, n) \in \mathfrak{Z}$ mit $p^n(q-1)/q \in I$, sodass die Abbildung $\iota_g \colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ aus 2.4.1(b) wohldefiniert ist.*[7] *Wir fassen $\mathbb{C}_p$ via $\theta \circ \iota_g \colon \widetilde{\mathbf{B}}^I \longrightarrow \mathbb{C}_p$ als $\widetilde{\mathbf{B}}^I$-Modul auf.*

[6] vgl. auch [Ber16, Thm. 9.1] und beachte, dass $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}(V)$ dort durch Tensorieren über L anstatt über $\mathbb{Q}_p$ gegeben sein sollte.

[7] im Beweis von [Ber16, Thm. 7.3] wird g so gewählt, dass $g|_L = \sigma$ gilt, jedoch wird für die nachstehenden Isomorphismen die σ-Semilinearität der Abbildung $\theta \circ \iota_g$ benötigt, weshalb $g|_L = \sigma^{-1}$ die korrekte Wahl ist. In der Konsequenz besagt Lemma 3.4.4, dass aus der $\mathbb{C}_p$-Zulässigkeit von V bei σ die Stabilität von $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}$ unter dem Operator $\partial_{\sigma^{-1}}$ folgt anstatt unter ∂_σ, wie in [Ber16, Lem. 10.2] behauptet wird. Auf die Anwendung des Lemmas in Theorem 3.4.6 [Ber16, Thm. 10.1] hat dies keine Auswirkungen.

(i) Man hat einen natürlichen, G_K-äquivarianten Isomorphismus

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I_K,\theta\circ\iota_g} \widetilde{\mathbf{D}}_I(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$$

von $\mathbb{C}_p$-Linksvektorräumen und L-Rechtsvektorräumen.

(ii) Ist V überkonvergent und r genügend groß, dass $\mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \cong \mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_L V$ gilt, so hat man ebenfalls einen Isomorphismus

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbf{B}^I_K,\theta\circ\iota_g} \mathbf{D}_I(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V.$$

Beweis. Zu (i). Die Isomorphie aus Bemerkung 3.4.2 liefert durch Koeffizientenerweiterung auf $\widetilde{\mathbf{B}}^I \supseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ einen G_K-äquivarianten Isomorphismus

$$\widetilde{\mathbf{B}}^I \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I_K} \widetilde{\mathbf{D}}_I(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^I \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^I \otimes_L V.$$

Damit und weil $\theta\circ\iota_g$ eine σ-semilineare Abbildung über L ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_p \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I_K,\theta\circ\iota_g} \widetilde{\mathbf{D}}_I(V) &\cong (\mathbb{C}_p \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I,\theta\circ\iota_g} \widetilde{\mathbf{B}}^I) \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I_K} \widetilde{\mathbf{D}}_I(V)\\ &\cong \mathbb{C}_p \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I,\theta\circ\iota_g} (\widetilde{\mathbf{B}}^I \otimes_L V)\\ &\cong \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V.\end{aligned}$$

Zu (ii). Aus der Überkonvergenz erhält man die Isomorphie $\widetilde{\mathbf{B}}^I \otimes_{\mathbf{B}^I_K} \mathbf{D}_I(V) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^I \otimes_L V$. Nun argumentiert man analog wie in (i) mit $\mathbf{D}_I(V)$ und $\mathbf{B}^I_K$ anstatt $\widetilde{\mathbf{D}}_I(V)$ und $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$. □

Lemma 3.4.4. *Ist V bei $\sigma \in \Sigma$ zulässig für $\mathbb{C}_p$, so gilt $\partial_{\sigma^{-1}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}) \subseteq \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}$.*

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.4.7 wählen wir $m \in \mathbb{N}$, sodass $p^n(q-1)/q \geq r$ ist mit $n := \widetilde{n}(\sigma^{-1}) + mh$, und setzen $g := (\sigma^{-1}, n) \in \mathfrak{Z}$. Weiter sei $J_i := [r, s_i]$ für eine unbeschränkte Folge

$$p^n(q-1)/q \leq s_1 < s_2 < \dots$$

sodass $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} = \varprojlim_{i\geq 1} \widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K$ und $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) = \varprojlim_{i\geq 1} \widetilde{\mathbf{D}}_{J_i}(V)$ gilt. Sei $x = (x_i)_i \in \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}$. Nach Definition (2.4.7) von ∂_σ ist zu zeigen, dass $\nabla_{\sigma^{-1}}(x_i)$ für alle $i \geq 1$ durch $t_{\sigma^{-1}}$ teilbar ist.

Unter Verwendung von Satz 3.4.3(i) erhalten wir eine natürliche $\theta\circ\iota_g$-semilineare Abbildung

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{J_i}(V) \longrightarrow \mathbb{C}_p \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^{J_i}_K,\theta\circ\iota_g} \widetilde{\mathbf{D}}_{J_i}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V, \qquad (1)$$

Es ist $\widetilde{\mathbf{D}}_{J_i}(V)$ ein freier $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$-Modul, und im eindimensionalen Fall stimmt die Abbildung $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K \longrightarrow \mathbb{C}_p \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^I_K,\theta\circ\iota_g} \widetilde{\mathbf{B}}^I_K = \mathbb{C}_p$ mit $\theta\circ\iota_g$ überein, weshalb wir den Homomorphismus (1)

wieder mit $\theta \circ \iota_g$ bezeichnen. Er ist stetig und G_K-äquivariant und beschränkt sich folglich auf die Teilräume der lokal-analytischen Vektoren unter den H_K-Invarianten auf beiden Seiten.
Aufgrund der Zulässigkeit von V bei σ gibt es eine $\mathbb{C}_p$-Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_d)$ für $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$, die von G_K fixiert wird. Dann ist $\mathfrak{B}$ eine K-Basis für $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K}$ und eine $\widehat{K}_\infty$-Basis[8] von $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{H_K}$. Die v_j sind trivialerweise Γ_K-analytisch, und Satz 2.1.5 liefert somit

$$((\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{H_K})^{\mathrm{la}} = \bigoplus_{j=1}^{d} \widehat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \cdot v_j. \tag{2}$$

Wegen $x \in \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}$ gilt $x_i \in \widetilde{\mathbf{D}}_{J_i}(V)^{\mathrm{la}}$ für alle i. Aus (2) und Beispiel 2.2.11 folgt, dass $\nabla_{\mathrm{id}} = 0$ auf $((\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{H_K})^{\mathrm{la}}$ gilt, und mit Lemma 2.2.15 erhalten wir, da $\theta \circ \iota_g$ eine σ-semilineare Abbildung ist

$$\theta \circ \iota_g(\nabla_{\sigma^{-1}}(x_i)) = \nabla_{\mathrm{id}}(\theta \circ \iota_g(x_i)) = 0.$$

Wegen $\ker(\theta \circ \iota_g) = Q_m^{\sigma^{-1}}(y_{\sigma^{-1}}) \cdot \widetilde{\mathbf{D}}_{J_i}(V)$ nach Lemma 2.4.2 ist folglich $\nabla_\sigma(x_i)$ durch $Q_m^{\sigma^{-1}}(y_{\sigma^{-1}})$ teilbar für alle $m \gg 0$, und Lemma 2.4.6 liefert die Behauptung. □

Bemerkung 3.4.5. Es ist Γ_K topologisch endlich erzeugt, d.h. Γ_K besitzt eine endlich erzeugte dichte Untergruppe.

Beweis. Der Lubin-Tate-Charakter und [Sha, Prop. 9.1.9] liefern Isomorphismen topologischer Gruppen

$$\Gamma_L \overset{\chi_L}{\cong} \mathcal{O}^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1) \times \mathbb{Z}/(p^k) \times \mathbb{Z}_p^n,$$

sodass $A := \mathbb{Z}/(q-1) \times \mathbb{Z}/(p^k) \times \mathbb{Z}^n$ eine dichte endlich erzeugte Untergruppe von Γ_L ist. Da Γ_K offen in Γ_L ist (siehe das Ende von Abschnitt 1.1), liegt $A \cap \Gamma_K$ dicht in Γ_K und ist als Untergruppe von A ebenfalls endlich erzeugt. □

Theorem 3.4.6 (Berger). *Ist V eine L-analytische Darstellung, so ist V überkonvergent.*

Beweis. Aus Bemerkung 3.4.2 und der L-Analytizität von V zusammen mit Lemma 3.4.4 folgt, dass $M := \widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)^{\mathrm{pa}}$ alle Voraussetzungen des Monodromiesatzes 2.4.9 erfüllt. Somit ist $\mathrm{Sol}(M) = \bigcap_{\sigma \neq \mathrm{id}} \ker(\partial_\sigma)$ ein freier $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}$-Modul vom Rang d, auf dem φ und Γ_K bijektiv operieren. Weiter erhalten wir unter Verwendung von 3.4.2 Isomorphismen

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}} \mathrm{Sol}(M) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{\mathrm{pa}}} M \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_L V, \tag{1}$$

die mit φ und der G_K-Wirkung verträglich sind. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,m} := \bigcup_{r \gg 0} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,m} = \bigcup_{r \gg 0} \varphi^{-m}(\mathbf{B}^{\dagger,q^m r}_{\mathrm{rig},K}) = \varphi^{-m}\left(\bigcup_{r \gg 0} \mathbf{B}^{\dagger,q^m r}_{\mathrm{rig},K}\right) = \varphi^{-m}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}),$$

[8] man hat $\mathbb{C}_p^{H_K} = \widehat{K}_\infty$ nach Beispiel 2.2.11.

sodass mit Satz 2.3.8

$$(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}} = \bigcup_{r\gg 0} (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}} = \bigcup_{r\gg 0} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\infty} =: \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,\infty} = \bigcup_{m\geq 0} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,m}$$

folgt. Sei nun $\mathfrak{E} = (e_1, \ldots, e_d)$ eine $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,\infty}$-Basis von $\mathrm{Sol}(M)$ (und damit auch eine Basis für M bzw. $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$). Weiter sei r_0 gemäß dem Absatz nach Bemerkung 3.4.2 und $r \geq r_0$, mit $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathfrak{E}}(\gamma) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,\infty})$ für alle $\gamma \in \Gamma_K$.
Es ist φ ein Homöomorphismus auf dem Level der Ringe $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, und $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ ist abgeschlossen, da $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ vollständig für die Fréchet-Topologie ist. Somit ist $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,m} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ für alle m abgeschlossen. Wählen wir ein endliches System $F \subseteq \Gamma_K$ topologischer Erzeuger für Γ_K gemäß 3.4.5 und $n \geq 0$ groß genug, dass die Darstellungsmatrizen von φ und allen $\gamma \in F$ in $\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K,n})$ liegen, so gilt folglich dasselbe bereits für die Matrizen zu allen $\gamma \in \Gamma_K$ wegen der Stetigkeit der Γ_K-Operation auf M. Wir setzen nun

$$D^{\dagger}_{\mathrm{rig}} := \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \cdot \varphi^n(e_i).$$

Nach Wahl von n ist $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ ein (φ,Γ_K)-Modul über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, und weil φ auf $\mathrm{Sol}(M)$ ein Isomorphismus ist, ist $\mathfrak{A} = (\varphi^n(e_1), \ldots, \varphi^n(e_d))$ ebenfalls eine Basis für $\mathrm{Sol}(M)$, also gilt

$$\mathrm{Sol}(M) = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}. \tag{2}$$

Wir behaupten, dass $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ mit der Eigenschaft (2) eindeutig bestimmt ist. Sei dafür $C \subseteq \mathrm{Sol}(M)$ ein weiterer (φ,Γ_K)-Modul über $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, der (2) erfüllt, d.h. eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathrm{Sol}(M)$ enthält. Bezeichne $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,\infty})$ die Basiswechselmatrix von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und seien $A_{\mathfrak{A}}, A_{\mathfrak{B}} \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ die Darstellungsmatrizen von φ bzgl. $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$. Dann hat man die Gleichung (s. [Sch06, Lem. 1.4])

$$S = A_{\mathfrak{A}} \cdot \varphi(S) \cdot A_{\mathfrak{B}}^{-1}. \tag{$*$}$$

Ist $m > 0$, sodass $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,m})$ gilt, so folgt aus $(*)$, dass die Einträge von S bereits in $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K,m-1}$ liegen, und durch Iteration erhält man $S \in (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{d\times d}$. Dasselbe Argument für S^{-1} liefert $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$, was $C = D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ impliziert.
Um nun die Überkonvergenz von V zu beweisen, erklären wir den Abstieg von $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ zu einem étalen (φ,Γ_K)-Modul $D^{\dagger}$ über $\mathbf{B}^{\dagger}_K$, der via der Kategorienäquivalenz $\mathbf{D}^{\dagger}(-)$ aus Bemerkung 3.2.3(a) zu V korrespondiert. Aus (1) und (2) erhalten wir φ- und G_K-äquivariante Isomorphismen

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} D^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})^{L\text{-pa}}} \mathrm{Sol}(M) \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_L V. \tag{3}$$

Insbesondere wirkt φ trivial auf $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$, weshalb $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ isoklin vom Anstieg 0 ist nach Beispiel A.2.5. Wegen Theorem A.2.6 ist $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ somit étale, sodass nach Satz 3.1.6 ein bis auf Isomorphie eindeutiger étaler (φ, Γ_K)-Modul $D^{\dagger}$ über $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ existiert mit

$$D^{\dagger}_{\mathrm{rig}} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} D^{\dagger}. \tag{4}$$

Dieser korrespondiert nach Bemerkung 3.2.3(a) zu einer überkonvergenten Darstellung $W \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$, d.h. $D^{\dagger} = \mathbf{D}^{\dagger}(W)$. Die Überkonvergenz von W impliziert

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} D^{\dagger} \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_L W,$$

sodass mit (3) und (4) die Isomorphie

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_L V \cong \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_L W$$

von (φ, G_K)-Moduln folgt. Bildet man nun auf beiden Seiten φ-Invarianten, so erhält man $V \cong W$ in $\mathfrak{Rep}_L(G_K)$, was die Behauptung liefert. □

3.4.3 Die Kategorienäquivalenz $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(-)$

Bemerkung 3.4.7. Wegen Theorem 3.4.6 ist $\mathfrak{Rep}_L^{L\text{-an}}(G_K)$ eine volle Unterkategorie in der Kategorie der überkonvergenten L-Darstellungen von G_K. Folglich erhalten wir durch Einschränkung des Funktors $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ mit Hilfe von Bemerkung 3.2.3(b) eine volltreue Kategorieneinbettung

$$\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \colon \mathfrak{Rep}_L^{L\text{-an}}(G_K) \longrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}).$$

Ihr essentielles Bild ist in $\mathfrak{Mod}_{\text{ét}}^{L\text{-an}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ enthalten, denn aus dem Beweis von 3.4.6 folgt, dass für $V \in \mathfrak{Rep}_L^{L\text{-an}}(G_K)$ der (φ, Γ_K)-Modul $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ zu dem dort konstruierten $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ isomorph ist, dessen Elemente sämtlich Lösungen für das System der Differentialgleichungen

$$\partial_{\sigma}(X) = 0, \;\; \sigma \neq \mathrm{id}$$

sind. Wegen $\nabla_{\sigma} = t_{\sigma} v_{\sigma} \cdot \partial_{\sigma}$ folgt $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}^{L\text{-an}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ nach Bemerkung 3.3.7(iv).

Theorem 3.4.8. *Der Funktor*

$$\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \colon \mathfrak{Rep}_L^{L\text{-an}}(G_K) \longrightarrow \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}^{L\text{-an}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$$

ist eine Kategorienäquivalenz.

Beweis. Nach Bemerkung 3.4.7 ist der obige Funktor volltreu, und es bleibt zu zeigen, dass er essentiell surjektiv ist. Sei dazu $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \in \mathfrak{Mod}_{\text{ét}}^{L\text{-an}}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ gegeben. Nach Bemerkung 3.2.3(b) existiert eine überkonvergente Darstellung $V \in \mathfrak{Rep}_L(G_K)$ mit $D^{\dagger}_{\mathrm{rig}} = \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$,

und die Aussage folgt, wenn wir die L-Analytizität von V beweisen.
Sei also $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathrm{id}\}$, und sei $r \gg 0$ mit $\widetilde{\mathbf{D}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ gemäß Satz 3.3.3. Wir fixieren ein kompaktes Intervall $I \subseteq [r, \infty)$ und betrachten den freien $\mathbf{B}^I_K$-Modul $\mathbf{D}_I(V) = \mathbf{B}^I_K \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ vom Rang $d = \dim_L(V)$.
Sei $m \geq 0$, sodass $p^n(q-1)/q \in I$ gilt für $n := \widetilde{n}(\sigma^{-1}) + hm$, und sei $g := (\sigma^{-1}, n) \in \mathfrak{Z}$. Unter Verwendung der Isomorphie 3.4.3(ii) setzen wir $\theta \circ \iota_g \colon \mathbf{B}^I_K \longrightarrow \mathbb{C}_p$ wie im Beweis von Lemma 3.4.4 semilinear auf $\mathbf{D}_I(V)$ fort durch

$$\theta \circ \iota_g \colon \mathbf{D}_I(V) \longrightarrow \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbf{B}^I_K, \theta\circ\iota_g} \mathbf{D}_I(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V. \tag{1}$$

Bezeichne $\widehat{K}^{\sigma}_{\infty} \subseteq \widehat{K}_{\infty}$ den Unterraum der lokal σ-analytischen Vektoren im Sinne von Definition 2.2.9. Wegen Lemma 2.1.4 ist $\widehat{K}^{\mathrm{la}}_{\infty}$ ein Körper, und mit der Produktregel sieht man, dass $\widehat{K}^{\sigma}_{\infty} \subseteq \widehat{K}^{\mathrm{la}}_{\infty}$ ein Teilkörper ist. Für $\tau \neq \mathrm{id}$ gilt $\nabla_\tau = 0$ auf $\mathbf{B}^I_K$ nach Theorem 2.3.7 und auch auf $\mathbf{D}_I(V)$ wegen der L-Analytizität von $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$. Nach Lemma 2.2.15 hat man $(\theta \circ \iota_g) \circ \nabla_\tau = \nabla_{\sigma\circ\tau} \circ (\theta \circ \iota_g)$, weshalb $\theta \circ \iota_g(\mathbf{B}^I_K) \subseteq \widehat{K}^{\sigma}_{\infty}$ gilt und der $\widehat{K}^{\sigma}_{\infty}$-Untervektorraum

$$\mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V) := \widehat{K}^{\sigma}_{\infty} \otimes_{\theta\circ\iota_g(\mathbf{B}^I_K)} \theta \circ \iota_g(\mathbf{D}_I(V)) \subseteq (\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{H_K}$$

aus lokal σ-analytischen Vektoren besteht. Wegen (1) wird $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ von $\theta \circ \iota_g(\mathbf{D}_I(V))$ über $\mathbb{C}_p$ erzeugt, was $\dim_{\widehat{K}^{\sigma}_{\infty}} \mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V) = d$ und

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\widehat{K}^{\sigma}_{\infty}} \mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V) = \mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V \tag{2}$$

impliziert. Wir statten $\widehat{K}^{\sigma}_{\infty}$ mit der Teilraumtopologie der LB-Topologie (s. 2.1.2) von $\widehat{K}^{\mathrm{la}}_{\infty}$ und den $\widehat{K}^{\sigma}_{\infty}$-Vektorraum $\mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V)$ mit der entsprechenden Produkttopologie aus.
Sei nun $y \in \mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V)$ und $n = n(y) \gg 0$, sodass y in $\mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V)^{\Gamma_n\text{-an}}$ lebt und daher seine Orbitabbildung in $\gamma \in \Gamma_n$ unter Verwendung der σ-Analytizität gemäß Konstruktion 2.2.7($\mathbf{T}$) die Taylorentwicklung $\gamma(y) = \sum_{k\geq 0} \sigma(\ell\gamma)^k \cdot \nabla^k_\sigma(y)/k!$ besitzt. Wegen Bemerkung 2.1.3 können wir n genügend groß wählen, dass $|\cdot|_p = \|\cdot\|_{\Gamma_n}$ auf dem Banachraum $\widehat{K}^{\Gamma_n\text{-}\sigma\text{-an}}_{\infty}$ gilt. Weil nach Bemerkung 2.2.6 die Γ_K- und $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$-Aktionen miteinander kommutieren, ist $\mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V)^{\Gamma_n\text{-an}}$ stabil unter ∇_σ.
Nach Beispiel 2.2.11(i) existiert ein $x_\sigma \in \widehat{K}^{\sigma}_{\infty}$ mit $\nabla_\sigma(x_\sigma) = 1$. Wir wählen $x_{\sigma,0} \in K_\infty$, für welches $|x_\sigma - x_{\sigma,0}|_p$ hinreichend klein ist, dass für $\mathfrak{X}_\sigma := x_\sigma - x_{\sigma,0}$ die Reihe

$$\mathfrak{F}(y) := \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{\mathfrak{X}^k_\sigma}{k!} \cdot \nabla^k_\sigma(y)$$

in $\mathbf{D}^{\sigma}_{\mathrm{Sen}}(V)^{\Gamma_n\text{-an}}$ konvergiert.[9] Wegen $\nabla_\sigma(x_{\sigma,0}) = 0$ und $\nabla_\sigma(x_\sigma) = 1$ hat man für $k \geq 0$

$$\nabla_\sigma(\mathfrak{X}^k_\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \\ k \cdot \mathfrak{X}^{k-1}_\sigma, & \text{falls } k > 0, \end{cases} \tag{3}$$

[9]für Konvergenzbetrachtungen in $\widehat{K}^{\mathrm{la}}_{\infty}$ siehe auch [BC14, §4.2].

sodass sich $\nabla_\sigma(\mathfrak{F}(y)) = 0$ leicht mit der Produktregel 2.2.12 ergibt. Folglich erhalten wir für die Taylorentwicklung von $\mathfrak{F}(y)$ auf Γ_n

$$\gamma(\mathfrak{F}(y)) = \sum_{k\geq 0} \sigma(\ell\gamma)^k \cdot \frac{\nabla_\sigma^k(\mathfrak{F}(y))}{k!} = \mathfrak{F}(y),$$

womit $\mathfrak{F}(y) \in (\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$ folgt. Unter Verwendung von (3) sieht man weiter, dass für alle $j \geq 0$ die Reihe

$$\mathfrak{F}(\nabla_\sigma^j(y)) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{\mathfrak{X}_\sigma}{k!} \cdot \nabla_\sigma^{j+k}(y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{\nabla_\sigma^j(\mathfrak{X}_\sigma^{j+k})}{(j+k)!} \cdot \nabla_\sigma^{j+k}(y)$$

ebenfalls in $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}^\sigma(V)^{\Gamma_n\text{-an}}$ konvergiert, indem man ∇_σ^j durch seine Operatornorm beschränkt, und wie oben folgt $\mathfrak{F}(\nabla_\sigma^j(y)) \in (\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$. Es gilt

$$y = \sum_{j\geq 0} \frac{\mathfrak{X}_\sigma^j}{j!} \cdot \mathfrak{F}(\nabla_\sigma^j(y)),$$

denn mit der Formel

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}(-1)^k = (1-1)^\nu = \begin{cases} 1, & \text{falls } \nu = 0, \\ 0, & \text{falls } \nu > 0 \end{cases}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} \frac{\mathfrak{X}_\sigma^j}{j!} \cdot \mathfrak{F}(\nabla_\sigma^j(y)) &= \sum_{j,k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{\mathfrak{X}_\sigma^{j+k}}{k! \cdot j!} \cdot \nabla_\sigma^{j+k}(y) \\ &= \sum_{\nu\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!} \right) \cdot \mathfrak{X}_\sigma^\nu \cdot \nabla_\sigma^\nu(y) = y. \end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{X}_\sigma \in \widehat{K}_\infty^\sigma$ erhalten wir damit $y \in \widehat{K}_\infty^\sigma \otimes_{K_n} (C_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$. Die Anwendung dieser Überlegungen auf die Elemente $y_1, \ldots, y_d$ einer Basis von $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}^\sigma(V)$ liefert

$$\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}^\sigma(V) = \widehat{K}_\infty^\sigma \otimes_{K_n} (\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$$

mit $n := \max_i n(y_i)$. Wegen (2) wird $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ folglich von $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$ erzeugt. Dieser ist also ein d-dimensionaler K_n-Vektorraum, und er trägt eine induzierte semilineare Operation der Faktorgruppe $G_n := G_K/G_{K_n} = \mathrm{Gal}(K_n/K)$.
Nach Hilberts Satz 90 (siehe z.B. [Ber10, Thm. 7.2]) gilt $H^1(G_n, \mathrm{GL}_d(K_n)) = 1$, weshalb $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_{K_n}}$ eine K_n-Basis aus Vektoren besitzt, die von G_n fixiert werden. Folglich wird $\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V$ von $(\mathbb{C}_p \otimes_{L,\sigma} V)^{G_K}$ erzeugt, womit die $\mathbb{C}_p$-Zulässigkeit von V bei σ bewiesen ist. □

Appendix A

Kedlayas Theorie des Anstieges

In [Ked05] und [Ked07] entwickelt Kedlaya die Theorie des Anstieges für Robba-Ringe, deren Resultate generell bei der Handhabung von (φ, Γ)-Moduln über solchen Ringen eine große Rolle spielen und speziell in die Beweise einiger Theoreme aus dieser Arbeit eingehen.

Kedlayas Formalismus funktioniert in einem abstrakteren Setting als dem von uns betrachteten, und in den Definitionen seiner Koeffizientenringe treten Variationen zwischen [Ked05] und [Ked07] und auch in Bezug zu unseren Konstruktionen in Kapitel 1 auf. Die Ringe aus den verschiedenen Arbeiten haben jedoch Entsprechungen untereinander, die in der folgenden Übersicht zusammengestellt sind. Unsere Notationen sind die aus [Ber16].[1]

[Ber16]	[Ked05]	[Ked07]
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$	$\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an,con}}$, $\mathcal{R}$	$\widetilde{\mathcal{R}}$
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$	$\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an},r}$	/
$\widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}$	$\Gamma^{\mathrm{alg}}_{[r,s]}$	/
$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$	$\Gamma_{\mathrm{an,con}}$	$\mathcal{R}$
$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, $\mathbf{B}^{[r,\infty)}_{K}$	$\Gamma_{\mathrm{an},r}$, $\Gamma_{(0,r]}$	$\mathcal{R}^r$
$\mathbf{B}^{\dagger}_{K}$	$\Gamma_{\mathrm{con}}[\pi^{-1}]$	$\mathcal{R}^{\mathrm{bd}}$
$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{K}$	$\Gamma_r[\pi^{-1}]$	/
$\mathbf{B}^{[r,s]}_{K}$	$\Gamma_{[r,s]}$	/
$\mathbf{B}_K$	$\Gamma[\pi^{-1}]$	$\mathcal{E}$

[1] gelegentlich werden im selben Artikel auch mehrere Schreibweisen für ein Objekt verwendet, so wird etwa $\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an,con}}$ in Kapitel 4 von [Ked05] mit $\mathcal{R}$ abgekürzt.

A.1 Vektorbündel

Wir geben nun eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus [Ked05, §2.8] über Vektorbündel, die wir für den Beweis des Monodromiesatzes 2.4.9 benötigen. Sei $I \subseteq (1, \infty)$ ein abgeschlossenes Intervall.

Definition A.1.1. Sei $\mathfrak{J}$ eine Klasse von kompakten Teilintervallen $J \subseteq I$, die abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist und $\bigcup_{J\in\mathfrak{J}} J = I$ erfüllt.
Ein $\mathfrak{J}$-*Vektorbündel* über $\mathbf{B}_K^I$ ist eine Familie $\mathfrak{V} = \{V_J\}_{J\in\mathfrak{J}}$ aus endlich erzeugten freien $\mathbf{B}_K^J$-Moduln V_J zusammen mit Isomorphismen

$$\varrho_{J,J'} \colon \mathbf{B}_K^{J'} \otimes_{\mathbf{B}_K^J} V_J \xrightarrow{\sim} V_{J'}$$

für jede Inklusion $J' \subseteq J$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$, welche für alle $J'' \subseteq J' \subseteq J$ der Kompatibilitätsbedingung $\varrho_{J,J''} = \varrho_{J',J''} \circ \varrho_{J,J'}$ genügen.

Bemerkung A.1.2. (a) Nach [Ked05, Lem. 2.8.2] ist der Begriff des Vektorbündels über $\mathbf{B}_K^I$ kanonisch unabhängig von der Wahl der Klasse $\mathfrak{J}$ in dem Sinne, dass für zwei solche Klassen $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}'$ der offensichtliche Funktor von der Kategorie der $\mathfrak{J}'$-Vektorbündel in die Kategorie der $\mathfrak{J}$-Vektorbündel eine Äquivalenz ist. Wir sprechen daher einfach von *Vektorbündeln* über $\mathbf{B}_K^I$.

(b) Aus (a) folgt, dass wir jedes Vektorbündel über $\mathbf{B}_K^I$ in der Form $\{V_{I_k}\}_{k\geq 0}$ schreiben können, wobei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ eine Folge von Intervallen mit $\bigcup_{k\geq 0} I_k = I$ ist.
Ist insbesondere I kompakt, so gibt es zu jedem Vektorbündel $\{V_J\}_{J\in\mathfrak{J}}$ über $\mathbf{B}_K^I$ einen eindeutigen endlich erzeugten freien $\mathbf{B}_K^I$-Modul V mit $V_J = \mathbf{B}_K^J \otimes_{\mathbf{B}_K^I} V$ für alle $J \in \mathfrak{J}$.

Bemerkung A.1.3. Sei $r > 1$ und sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ eine Folge kompakter Intervalle mit $\bigcup_{k\geq 0} I_k = [r, \infty)$ und $J_k := I_k \cap I_{k+1} \neq \varnothing$ für alle $k \geq 0$. Weiter setzen wir $I'_k := \bigcup_{j=0}^k I_j$, und wir nehmen an, dass $I'_k \cap I_{k+1} = J_k$ für alle k gilt.
Sei nun $\mathfrak{V} = \{V_k\}_{k\geq 0}$ eine Familie von $\mathbf{B}_K^{I_k}$-Moduln V_k zusammen mit Isomorphismen

$$\mathbf{B}_K^{J_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I_k}} V_k \cong \mathbf{B}_K^{J_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I_{k+1}}} V_{k+1} \tag{$*$}$$

für alle $k \geq 0$. Da die Menge $\{I_k\}_{k\geq 0}$ nicht gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen ist, erfüllt $\mathfrak{V}$ nicht die obige Definition eines Vektorbündels. Jedoch verkleben sich die V_k zu einem Vektorbündel $\mathfrak{W}$ über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} = \mathbf{B}_K^{[r,\infty)}$, mit dem wir $\mathfrak{V}$ identifizieren können:
Um dies einzusehen, konstruieren wir induktiv eine Folge von endlich erzeugten freien $\mathbf{B}_K^{I'_k}$-Moduln W_k, sodass für alle $k \geq 0$ gilt:

(i) $V_k \cong \mathbf{B}_K^{I_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I'_k}} W_k$,

(ii) $\mathbf{B}_K^{J_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I'_k}} W_k \cong \mathbf{B}_K^{J_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I_{k+1}}} V_{k+1}$.

Für $k = 0$ erfüllt $W_0 := V_0$ offensichtlich diese Bedingungen. Sei W_k bereits konstruiert, sodass (i) und (ii) gelten. Wegen (ii) und $I'_k \cap I_{k+1} = J_k$ ist dann die Familie $\mathfrak{W}_{k+1} := \{W_k, V_{k+1}, \mathbf{B}_K^{J_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I'_k}} W_k\}$ ein Vektorbündel über $\mathbf{B}_K^{I'_k \cup I_{k+1}} = \mathbf{B}_K^{I'_{k+1}}$, welches nach Bemerkung A.1.2(b) von einem $\mathbf{B}_K^{I'_{k+1}}$-Modul W_{k+1} induziert wird. Dieser erfüllt (i), da $V_{k+1} \in \mathfrak{W}_{k+1}$ gilt, sowie Eigenschaft (ii), denn unter Verwendung von (i) und $(*)$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_K^{J_{k+1}} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I'_{k+1}}} W_{k+1} &\cong \mathbf{B}_K^{J_{k+1}} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I_{k+1}}} (\mathbf{B}_K^{I_{k+1}} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I'_{k+1}}} W_{k+1})\\ &\cong \mathbf{B}_K^{J_{k+1}} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I_{k+1}}} V_{k+1} \cong \mathbf{B}_K^{J_{k+1}} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I_{k+2}}} V_{k+2}.\end{aligned}$$

Die Familie $\mathfrak{W} := \{W_k\}_{k\geq 0}$ bildet nun ein Vektorbündel über $\mathbf{B}_K^{[r,\infty)} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$, denn die Folge $I'_0 \subseteq I'_1 \subseteq \ldots$ erfüllt $\bigcup_{k\geq 0} I'_k = [r, \infty)$, und es folgt $\mathbf{B}_K^{I'_k} \otimes_{\mathbf{B}_K^{I'_{k+1}}} W_{k+1} \cong W_k$ aus der Konstruktion der W_k, was für alle $1 \leq j < k$ kompatible Isomorphismen liefert.

Theorem A.1.4. *Für $r > 1$ ist der natürliche Funktor von der Kategorie der endlich erzeugten freien Moduln über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ in die Kategorie der Vektorbündel über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ eine Äquivalenz.*
Ist speziell $\{V_k\}_{k\geq 0}$ eine Familie wie in Bemerkung A.1.3 und $\{W_k\}_{k\geq 0}$ das zugehörige $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$-Vektorbündel, dann gibt es also Elemente $e_1, \ldots, e_d \in \bigcap_{k\geq 0} W_k$, sodass das System $\mathfrak{E} = (e_1, \ldots, e_d)$ eine Basis des induzierten $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$-Moduls und damit auch eine Basis aller W_k bildet. Aufgrund von A.1.3(i) ist $\mathfrak{E}$ dann auch eine Basis für alle V_k.

A.2 Theorie des Anstieges

Wir fassen die im Beweis von Theorem 3.4.6 benötigten Ergebnisse aus [Ked05] zusammen, siehe §§ 4.1, 4.5, 4.6 und 6.3 ebenda.

Definition A.2.1. Sei R ein Ring zusammen mit einem Endomorphismus $\varphi\colon R \longrightarrow R$.

(a) Für einen R-Modul M definieren wir $R \otimes_{R,\varphi} M$ analog zum gewöhnlichen Tensorprodukt, jedoch mit der Variation, dass R als Modul über sich selbst mit der von φ induzierten Rechtsmodulstruktur versehen ist, während er in üblicher Weise als R-Linksmodul aufgefasst wird, d.h.

$$r \cdot (s \otimes x) = rs \otimes x \quad \text{und} \quad s \otimes rx = s\varphi(r) \otimes x \quad \text{für alle } r, s \in R,\ x \in M.$$

(b) Eine Abbildung $\Phi\colon M \longrightarrow N$ von R-Moduln heißt *φ-semilinear*, wenn sie additiv ist und

$$\Phi(r \cdot x) = \varphi(r) \cdot \Phi(x)$$

für alle $r \in R$ und $x \in M$ erfüllt.
Ein *φ-Modul* über R ist ein endlich erzeugter freier R-Modul M, versehen mit einem φ-semilinearen Endomorphismus $\varphi_M \colon M \longrightarrow M$, sodass die R-lineare Abbildung

$$\varphi_M^* \colon R \otimes_{R,\varphi} M \longrightarrow M,\ r \otimes x \longmapsto r \cdot \varphi_M(x)$$

ein Isomorphismus ist. Wir schreiben meist wieder φ für φ_M.
Ein *Morphismus von φ-Moduln* ist eine R-lineare Abbildung $\alpha \colon M \longrightarrow N$, die φ-äquivariant ist, d.h. $\alpha \circ \varphi_M = \varphi_N \circ \alpha$.

(c) Ist $R = \mathbf{B}_K$ bzw. $R \in \{\mathbf{B}_K^\dagger, \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger\}$, so heißt ein φ-Modul M über R *étale*, wenn es einen φ-Modul M_0 über $\mathbf{A}_K$ bzw. $\mathbf{A}_K^\dagger$ gibt mit $R \otimes M_0 \cong M$ (als φ-Moduln).
Über $R \in \{\mathbf{A}_K, \mathbf{A}_K^\dagger\}$ bezeichnen wir per Konvention jeden φ-Modul als *étale*.

Definition A.2.2. Sei $R = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger$.

(a) Für teilerfremde ganze Zahlen $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $d > 0$ definieren wir den φ-Modul $M_{c,d}$ über R als $M_{c,d} := R^d$, wobei φ auf der kanonischen Basis $(e_1, \dots, e_d)$ folgendermaßen wirkt:

$$\varphi(e_i) = e_{i+1} \text{ für } i < d, \quad \varphi(e_d) = \pi^c \cdot e_1.$$

Ein φ-Modul über R heißt *Standard-φ-Modul*, wenn er isomorph zu $M_{c,d}$ für gewisse c, d wie oben ist.

(b) Sei M ein φ-Modul über R. Eine *Dieudonné-Manin-Zerlegung* für M ist eine Zerlegung der Form $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ mit Standard-φ-Moduln $M_i \cong M_{c_i,d_i}$. Die Elemente der Menge $\{c_i/d_i \mid i = 1, \dots, n\}$ heißen die *Anstiege* (oder *Slopes*) der Zerlegung und werden in der Form $s_1 < \ldots < s_\ell$, $\ell \leq n$ geschrieben.

Theorem A.2.3. *[Ked05, Thm. 4.5.7] Sei M ein φ-Modul über $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger$. Dann besitzt M eine Dieudonné-Manin-Zerlegung, und je zwei solche Zerlegungen liefern dieselben Anstiege. Wir sprechen daher auch von* den Anstiegen *von M.*

Definition A.2.4. Sei D ein φ-Modul über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$. Die *absoluten Anstiege* von D sind die Anstiege $s_1 < \ldots < s_\ell$ des φ-Moduls $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger} D$.
Ist $\ell = 1$, so nennen wir D *isoklin* (oder *rein*) *von Anstieg* $s = s_1$.

Beispiel A.2.5. Wenn $\widetilde{D} := \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger} D$ eine Basis besitzt, die von φ fixiert wird, so ist D isoklin von Anstieg 0, weil $\widetilde{D}$ dann in eine direkte Summe von Kopien von $M_{0,1}$ zerfällt.

Theorem A.2.6. *[Ked05, Prop. 6.3.5] Ein φ-Modul D über $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$ ist genau dann isoklin von Anstieg* 0*, wenn er étale ist. Nach Definition bedeutet das, dass ein étaler φ-Modul D_0 über $\mathbf{B}_K^\dagger$ existiert, sodass $D = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D_0$ als φ-Moduln gilt.*

Literatur

[BC09] Olivier Brinon und Brian Conrad. *CMI Summer School Notes on p-adic Hodge Theory (Preliminary Version)*. verfügbar unter: http://math.stanford.edu/ conrad/papers/notes.pdf. 2009.

[BC14] Laurent Berger und Pierre Colmez. "Théorie de Sen et vecteurs localement analytiques". arXiv:1405.5430. 2014.

[Ber02] Laurent Berger. "Représentations p-adiques et équations différentielles". In: *Inventiones Mathematicae* 148.2 (2002), S. 219–284.

[Ber10] Laurent Berger. *Galois Representations and (φ, Γ)-Modules*. Course given at IHP. 2010.

[Ber13] Laurent Berger. "On p-adic Galois Representations". In: *Elliptic Curves, Hilbert Modular Forms and Galois Deformations*. Advanced Courses in Mathematics (2013), S. 3–19.

[Ber16] Laurent Berger. "Multivariable (φ, Γ)-Modules and locally analytic Vectors". In: *Duke Mathematical Journal* 165.18 (2016).

[Bou67] Nicolas Bourbaki. *Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats / Paragraphes 1 à 7*. Éléments de Mathematique, Fasc. XXXIII. Hermann, 1967.

[Bou72] Nicolas Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 2 et 3*. Éléments de Mathematique, Fasc. XXXVII. Hermann, 1972.

[Bre10] Christophe Breuil. "The emerging p-adic Langlands programme". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* II (2010), S. 203–230.

[BSX15] Laurent Berger, Peter Schneider und Bingyong Xie. "Rigid Character groups, Lubin-Tate-Theory, and (φ, Γ)-Modules". arXiv:1511.01819v1. 2015.

[CC98] Frédéric Cherbonnier und Pierre Colmez. "Représentations p-adiques surconvergentes". In: *Inventiones Mathematicae* 133.3 (1998), S. 581–611.

[DS16] Ehud de Shalit. "Mahler Bases and elementary p-adic analysis". In: *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* (2016).

[Eme11] Matthew Emerton. "Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups". In: *Memoirs of the American Mathematical Society* (2011). unveröffentlicht.

[Féa97] C. T. Féaux de Lacroix. “Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper”. Doktorarbeit. Köln, 1997.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. “Représentations p-adiques des corps locaux. (1ère partie)”. In: *Progress in Mathematics* 87 (1990). Vol. 2 in The Grothendieck Festschrift.

[FX13] Lionel Fourquaux und Bingyong Xie. “Triangulable $\mathcal{O}_F$-analytic (φ_q, Γ)-modules of rank 2”. In: *Algebra & Number Theory* 7.10 (2013).

[Haz78] Michiel Hazewinkel. *Formal Groups and Applications*. Academic Press, 1978.

[Ked05] Kiran S. Kedlaya. “Slope Filtrations Revisited”. In: *Documenta Mathematica* 10 (2005), S. 447–525.

[Ked07] Kiran S. Kedlaya. “Slope Filtrations for relative Frobenius”. arXiv:math/0609272v2. 2007.

[Ked10] Kiran S. Kedlaya. *p-adic Differential Equations*. Cambridge University Press, 2010.

[Kri16] Andreas Kriegl. *Fréchet-Spaces*. Vorlesung in Wien. SS 2016.

[Kup19] Benjamin Kupferer. “Lubin-Tate (φ, Γ)-modules, a reciprocity law, Galois cohomology via a generalized Herr complex and a regulator map”. vorläufiger Titel. Doktorarbeit. Universität Heidelberg, 2019.

[Lan78] Serge Lang. *Cyclotomic Fields*. Springer, 1978.

[Sch02] Peter Schneider. *Nonarchimedean Functional Analysis*. Springer, 2002.

[Sch06] Peter Schneider. *Die Theorie des Anstieges*. Vorlesung in Münster im WS 2006/07. 2006.

[Sch11] Peter Schneider. *p-Adic Lie Groups*. Springer, 2011.

[Sch17] Peter Schneider. *Galois Representations and* (φ, Γ)*-Modules*. Cambridge University Press, 2017.

[Sha] Romyar Sharifi. *Algebraic Number Theory*. Lecture Notes.

[ST02] Peter Schneider und Jeremy Teitelbaum. “Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2”. In: *Journal of the American Mathematical Society* 15.2 (2002), S. 443–468.