7. Der Satz von Stokes

Wir haben nun die Mittel bereitgestellt, um den Satz von Stokes zu formulieren. Der Beweis selbst wird mit dank entwickelten Techniken ganz einfach sein.

Der Einfachheit halber verwenden wir folgende Bezeichnung:

Sei $Y \in X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimmension d einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X (beispielsweise eine eingebettete Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$). Wir nehen an, daß Y orientiert ist. Die kanonische Inklusion $i : Y \to X$ ist offenbar eine differenzierbare Abbildung. Is ω eine Differentialform auf X, so können wir

$$\omega|Y = i^*\omega$$

betrachten. Ist ω eine d-Form, so ist die Einschränkung auf Y eine Topform und wir können —falls sie zulässig ist—, das Integral

$$\int\limits_Y \omega := \int\limits_Y \omega|Y$$

definieren. Man nennt dieses Intgral auch das Integral von ω längs Y.

7.1 Theorem (Satz von Stokes). *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $U \subset X$ ein offener nicht leerer Teil mit glattem Rand ∂U. Der Rand ist selbst eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (s. IX.3.6). Wir nehmen an, daß der Abschluß von U (insbesondere auch ∂U) kompakt ist. Sei $\omega \in A^{n-1}(X)$ eine differenzierbare $(n-1)$-Form auf X. Dann gilt*

$$\int\limits_U d\omega = \int\limits_{\partial U} \omega.$$

Man überlegt sich leicht, daß $\omega|U$ eine zulässige Volumenform auf U ist. Dies liegt daran, daß ω auf der umfassenden Mannigfaltigkeit X definiert ist, in welcher U relativ kompakt liegt.

Für den Beweis des Satzes von Stokes ist es technisch geschickt, ihn etwas allgemeiner zu formulieren:

7.2 Theorem (Satz von Stokes, vearallgmeinerte Variante).
Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $U \subset X$ ein offener nicht leerer Teil. Sei Y der glatte Teil des Randes. Schließlich sei ω eine differenzierbare $(n-1)$-Form auf X.

Annahme. Die Menge

$$(U \cup Y) \cap \mathit{Träger}(\omega)$$

ist kompakt.

Dann gilt der Satz von Stokes

$$\int_U d\omega = \int_Y \omega.$$

Wenn alle Randpunkte von U glatt sind und wenn schon $U \cup \partial U$ kompakt ist, so ist die Voraussetzung in 7.2 natürlich erfüllt. 7.1 folgt also aus 7.2.

Beweis von 7.2. Die Idee ist es, den Satz mit Hilfe der Technik der Zerlegung der Eins zu lokalisieren und auf einen Spezialfall zurückzuführen, dan man leicht nachrechnen kann. Dazu dienen zwei Bemerkungen, welche formuliert werden aber wegen ihre Offensichtlichkeit nicht bewiesen werden müssen.

1) Sei X_0 ein offener Teil von X, welcher $(U \cup Y) \cap \text{Träger}(\omega)$ umfasst. Die Formel von Stokes gilt genau dann für (X, U, Y, ω), wenn sie für die Situation (X_0, U, Y, ω) gilt. (Es kommt nicht darauf an , wie ω „weit weg" von $(U \cup Y) \cap \text{Träger}(\omega)$ aussieht.)

2) Sei $f : X' \to X$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus orientierter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Die Formel von Stokes gilt genau dann für (X, U, Y, ω), wenn sie für (X', U', Y', ω') mit $U' = f^{-1}(U)$, $y' = f^{-1}(y)$ und $\omega' = f^*\omega$ gilt.

Wir nutzen nun die Technik der Zerlegung der Eins aus. Die Existenz solcher Zerlegungen haben wir in VIII.3.8 bewiesen. Dort haben wie uns allerdings nur mit topologischen Mannigfaltigkeiten und folgedessen nur mit stetigen Partitionen der Eins befasst. Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist es jedoch sinnvoll, von differenzierbaren Zerlegungen der Eins zu sprechen, man fordert in VIII.3.2, daß alle aufteretenden Funktionen (unendlich oft) differenzierbar sind. Da Hilfssatz VIII.3.7 auch mit einer differenzierbaren Funktion zu realisieren ist, erhalten wir:

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten gestatten ***differenzierbare*** *Zerlegungen der Eins.*

Dank der Existenz der Zerlegung der Eins, genügt es, den Satz von Stokes für Differentialformen ω mit kleinem Träger zu beweisen. „Klein" bedeute hierbei, daß es einen Punkt $a \in U \cup T$ gibt, so daß der Träger in einer offenen Umgebung von a enthalten ist, welche im Definitionsbereich einer Karte (des maximalen orientierten Atlas) ist, welcher entweder ganz in U enthalten ist ($a \in U$) oder so daß der Rand durch die Karte „ebengebügelt" wird. Der allgemeine Satz von Stokes wird dank 1) und 2) damit auf folgende beiden Spezialfälle zurückgeführt:

a) $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^n$, $(\partial U = \emptyset)$,

b) $X = \mathbb{R}^n$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$. Wie behandeln den Fall b) (der Fall a) ist noch einfacher und beschränken uns der Übersichtlichkeit halber auf den Fall

$n = 2$,

$$\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$
$$d\omega = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Es gilt einerseits

$$\int\limits_{\partial U} \omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,0),$$

andererseits

$$\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

Die Integrale sind natürlich in Wirllichkeit eigentlich, da die Träger von f und g in der oberen Halbebene einschließlich der reellen Achse beschränkt sind. Die beiden Integrale kann man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung mühelos ausrechnen und so den Satz von Stokes verifizieren.

Der Satz von Stokes ist also nicht anderes als eine aufgeblähte Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

.